Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. R. Hiptmair

Draft version 12. Dezember 2014, SVN rev.

URL: http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/LANM14.pdf

Inhaltsverzeichnis

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Allgemeine Informationen

- Link zur Webseite der Vorlesung im Herbstsemester 2014
- Links zu den Tabletnotizen aus der Vorlesung:
  - Kapitel 1 Kapitel 2 Kapitel 3 Kapitel 4 Kapitel 5 Kapitel 6 Kapitel 7
- MATLAB-Codes sind verfügbar unter: http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/MATLAB/
- WIKI zur Vorlesung: lanmdbaug.wikispaces.com

  Bitte melden Sie Fehler in den Vorlesungsunterlagen via dieser Wikiseite.
- Course videocast: Link

Vorwort

Inhalt

☞ Eine Vorlesung über mathematische und numerische Methoden

Klar: Mathematische und numerische Methoden spielen eine zentrale Rolle in den (modernen) (Ingenieur-)wissenschaften!

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

☞ Das wird Ihnen (leider erst) im Laufe des Studiums klar werden

Lineare Algebra: “is the branch of mathematics concerning vector spaces and linear mappings between such spaces” (Wikipedia)

= ein *mathematisches Grundlagenfach*

- Lineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme
- Vektoren, Matrizen, Unterräume und Basen
- Lineare Abbildungen und Determinanten
- Eigenwerte und Eigenräume

Numerik: "beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen zur Lösung kontinuierlicher mathematischer Probleme."

- Rechenaufwand von Algorithmen
- Rundungsfehler
- Dünnbesetze Matrizen
- Interpolation mit Polynomen und Splines

Lernziele

❶ **Wissen und Kenntnisse**

- Begriffe und Konzepte aus der linearen Algebra
- Resultate, Techniken und deren Anwendung
- Lösungsverfahren und (numerische) Algorithmen

❷ **Fähigkeiten und Fertigkeiten**

- *Analytisches* Denken
- *Abstraktes* Denken
- *Algorithmisches* Denken

➢ Das muss ein ETH-Ingenieur können **!**
Leider schwierig und anspruchsvoll **!**

Wenn Sie kein Genie sind:

Sie werden vieles **nicht sofort** verstehen **!**

- Sie verstehen nur 1/3 des Stoffs gleich in der *Vorlesung*
- Ein weiteres Drittel verstehen Sie bei Bearbeitung und Besprechung der *Übungsaufgaben* (Natürlich nur, wenn Sie die Hausaufgaben machen!)
- Das letzte Drittel erschliesst sich Ihnen bei der *Prüfungsvorbereitung*

➢ Bitte Geduld

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1 Lineare Gleichungssysteme

LINK zur Vorlesungsniederschrift für Kapitel 1

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1.1 Lineare Gleichungen

1.1.1 Definition und Notation

Definition I.1.1.A (Lineare Gleichung)**.**
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.
Dann heisst

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \tag{I.1.1.B}$$

eine lineare Gleichung in den Unbekannten x_j, $j = 1, \ldots, n$, mit Koeffizienten a_j, $j = 1, \ldots, n$, und rechter Seite b.

Notation: $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b) \hat{=}$ lineare Gleichung mit Koeffizienten a_j, $j = 1, \ldots, n$ und rechter Seite b

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1.1.2 Lösungen linearer Gleichungen

Definition I.1.2.C (Lösung(smenge) einer linearen GLeichung)**.**
Eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ *von* $n \in \mathbb{N}$ *reellen Zahlen heisst Lösung der linearen Gleichung* $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$*, wenn sie* (I.1.1.B) *erfüllt (nach "Einsetzen").*
Für die Menge der Lösungen einer linearen Gleichung $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$ *schreiben wir* $\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b))$*.*

Wir schreiben die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in eckigen Klammern übereinander ➢ Spaltenvektor

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Die x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ heissen Komponenten des Spaltenvektors $\mathbf{x}$, n seine Lnge.

✎ Notation: Spaltenvektoren bezeichnen wir mit kleinen fettgedruckten/unterstrichenen Buchstaben: $\mathbf{x}, vy, \mathbf{z}, \mathbf{a}, \ldots$.

✎ Notation: $\mathbb{R}^n \mathrel{\hat=}$ Menge der Spaltenvektoren der Länge $n \in \mathbb{N}$.

✎ Notation: Summenzeichen, z.B.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n} x_j := x_m + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n$$

(für $m \leqslant i \leqslant n$)

Satz I.1.2.D (Beschreibung der Lösungsmenge linearer Gleichungen)**.**
Für eine gegebene lineare Gleichung $\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, *gilt:*

1. *Gibt es ein* a_j, $j = 1, \dots, n$, *mit* $a_j \neq 0$ *dann ist die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ \dfrac{b}{a_j} - \sum\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} \dfrac{a_\ell}{a_j}\alpha_\ell \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{array}{c} \alpha_1 \in \mathbb{R}, \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}, \\ \alpha_{j+1} \in \mathbb{R}, \\ \vdots \\ \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \qquad \text{(I.1.2.E)}$$

2. *Gilt für alle* $j \in \{1, \dots, n\}$, *dass* $a_j = 0$, *dann besitzt* $\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)$ *die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(0, \dots, 0; b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{, falls } b \neq 0 \, , \\ \mathbb{R}^n & \text{, falls } b = 0 \, . \end{cases}$$

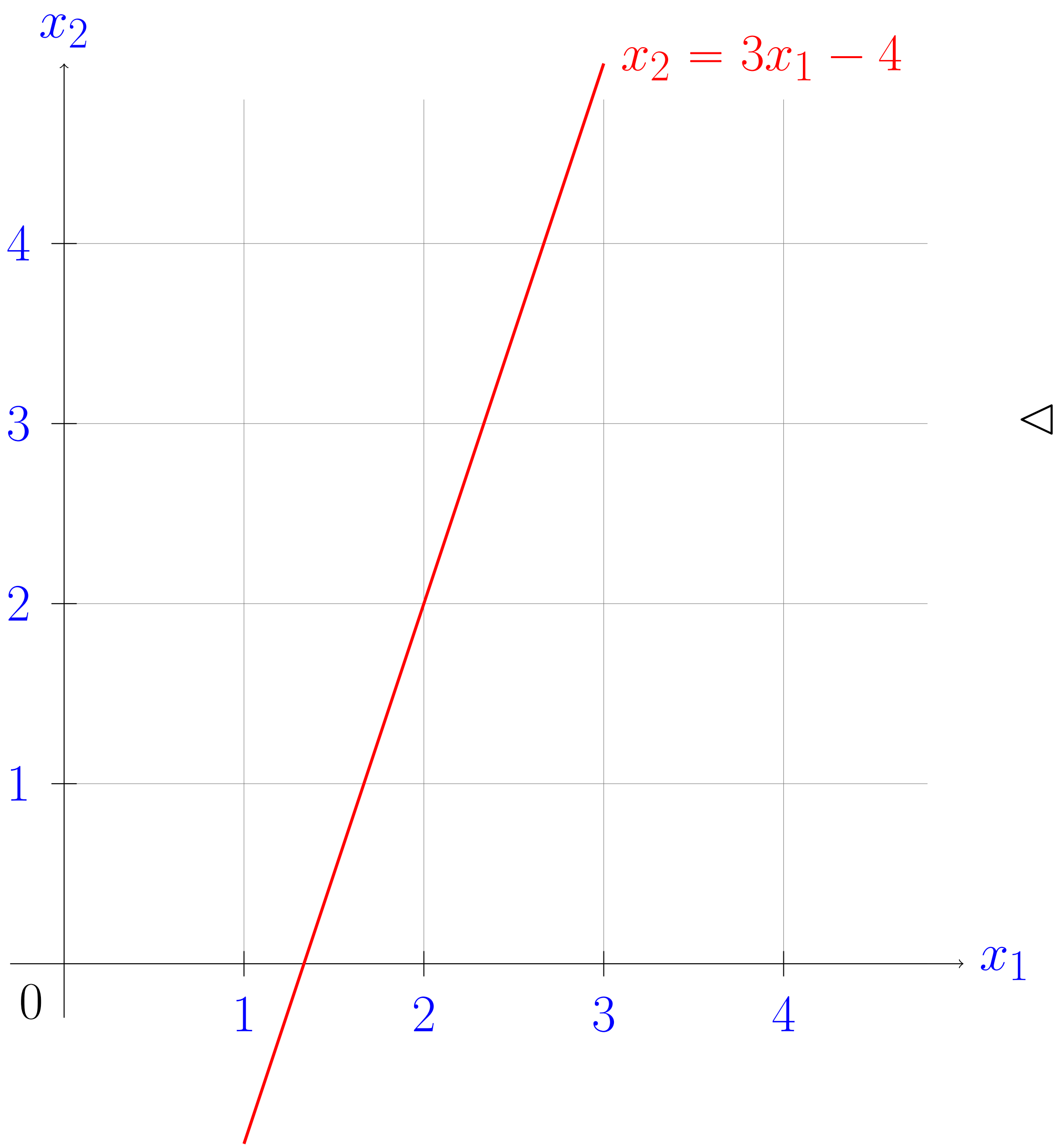
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar I.1.2.F (Invarianzeigenschaft der Lösungsmenge einer linearen Gleichung)**.**
Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$*, beliebige* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)) = \mathcal{L}(\mathrm{LG}(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n; \lambda b))$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

1.1.3 Visualisierung von Lösungsmengen linearer Gleichungen

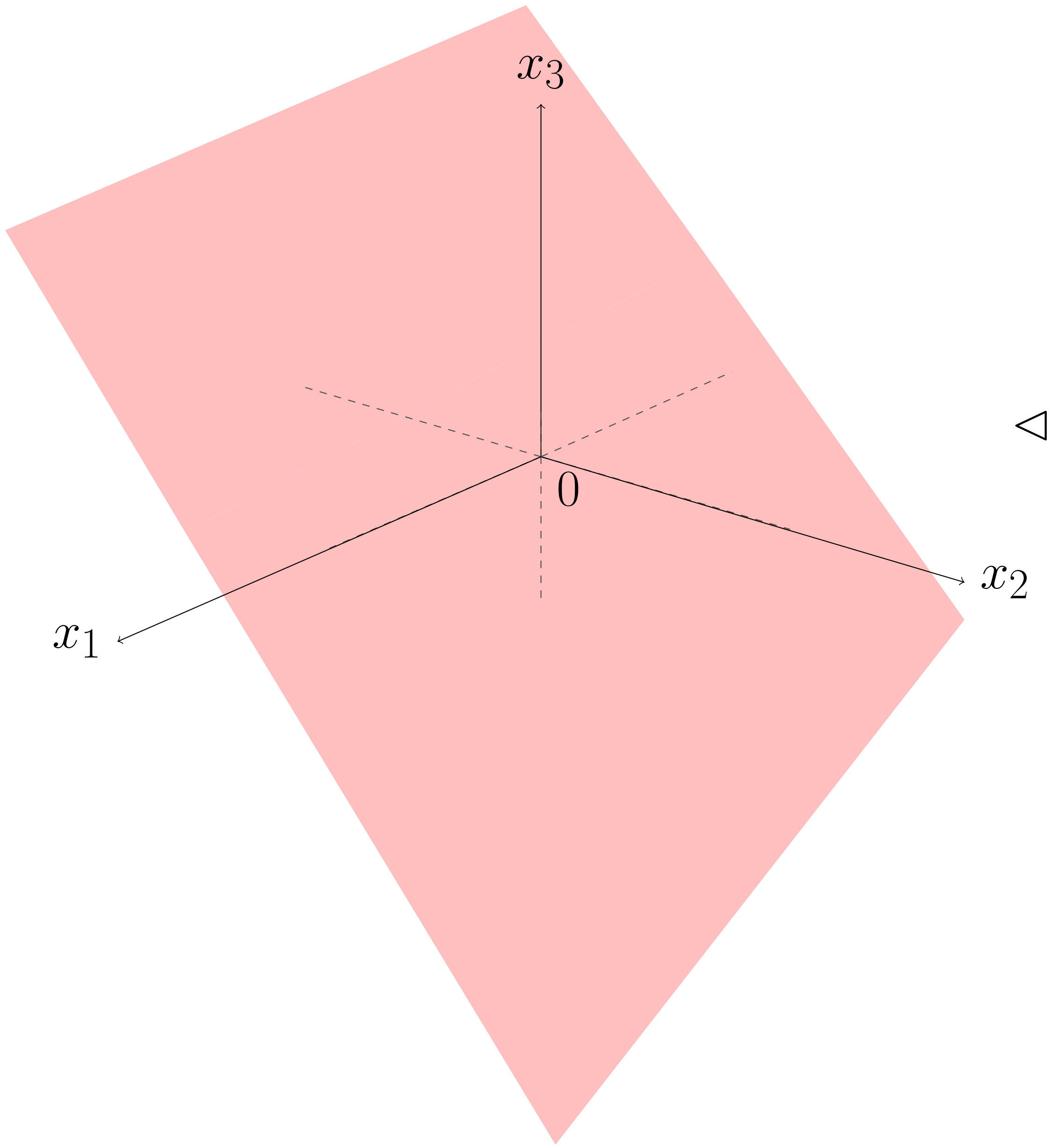


◁ Lösungsmemge der Gleichung

$$3x_1 - x_2 = 4$$

im Kartesischem Koordinatensystem.

= eine Gerade



$\triangleleft$ Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$

im 3D Kartesischen Koordinatensystem

= eine Ebene

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1.2 Lineare Gleichungssysteme: Einführung

1.2.1 Definition und Lösungsmengen

Definition I.2.1.A (Lineares Gleichungssystem)**.**
Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n$ *reelle Zahlen* $a_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *und* m *reelle Zahlen* b_i, $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann heissen die m *linearen Gleichungen*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{I.2.1.B}$$

*ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) von* m *Gleichungen in den* n *Unbekannten* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *mit den **Koeffizienten*** $a_{i,j}$ *und **rechter Seite*** $b_1, \dots, b_m$.
Die lineare Gleichung $\mathrm{LG}(a_{i,1}, \dots, a_{i,n}; b_i)$ *heisst die* i*-te **Zeile** des linearen Gleichungssystems,* $i \in \{1, \dots, m\}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition I.2.1.D (Lösung(smenge) eines linearen Gleichungssystems)**.**
Eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ *von* n *reellen Zahlen heisst Lösung eines linearen Gleichungssystems wie definiert in Definition I.2.1.A, wenn sie* alle *linearen Gleichungen in Gleichung I.2.1.B erfüllt.*

Korollar I.2.1.F (Charakterisierung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)**.**
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wie in Definition I.2.1.A ist

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}; b_1)) \cap \mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}; b_2)) \cap \cdots \cap \mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}; b_m)) \,.$$

1.2.2 Matrixnotation

Definition I.2.2.F (Matrix)**.**
Für gegebene natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter einer $m \times n$-Matrix ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ reellen Zahlen, angeordnet in m Zeilen und n Spalten.
Die $m \cdot n$ Zahlen einer Matrix werden Elemente oder Einträge der Matrix genannt und durch zwei Indices referenziert.

✎ Notation: grosse Buchstaben im Fettdruck für Matrizen:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

✎ Notation: Eintrag der Matrix $\mathbf{A}$ in Zeile i und Spalte j: $(\mathbf{A})_{i,j}$, also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,n} \\ (\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,n} \end{bmatrix} .$$

✎ Notation: Menge der $m \times n$-Matrizen: $\mathbb{R}^{m,n}$.

✎ Notation: Nullmatrix

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} .$$

Spezialfälle:

Definition I.2.2.H (Spalten- und Zeilenvektoren)**.**
Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times 1$-Matrix heisst Spaltenvektor der Länge m und eine $1 \times n$-Matrix heisst Zeilenvektor der Länge n.
Im Fall von Spalten- und Zeilenvektoren bezeichnet man die Einträge auch als Komponenten.

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben für *Spaltenvektoren*, z.B.

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Referenzierung der i. Komponente des Spaltenvektors $\mathbf{x}$: $(\mathbf{x})_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

✎ Notation: Menge der Spaltenvektoren der Länge m: $\mathbb{R}^n$

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben mit hochgestelltem $\top$ für *Zeilenvektoren*

$$\mathbf{z}^\top := \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{bmatrix} .$$

Referenzierung der i. Komponente des Zeilenvektors $\mathbf{z}$: $(\mathbf{z}^\top)_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Teilmatrizen von

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,n} \\ (\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{k,1} & (\mathbf{A})_{k,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{i,1} & (\mathbf{A})_{i,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} .$$

➊ Für $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

i. Zeile: $(\mathbf{A})_{i,:} := \left[(\mathbf{A})_{i,1} \; (\mathbf{A})_{i,2} \; \cdots \; (\mathbf{A})_{i,n} \right] \in \mathbb{R}^{1,n}$ (ein Zeilenvektor, Länge m)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

j. Spalte: $(\mathbf{A})_{:,j} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,j} \\ (\mathbf{A})_{2,j} \\ \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m}$ (ein Spaltenvektor, Länge n)

✎ Notation: Bereich ganzer Zahlen:
für $i, j \in \mathbb{Z}$: $i : j = (i, i+1, i+2, \dots, j)$ (leer, wenn $j < i$)

❷ Für $k, i \in \{1, \dots, m\}$, $k \leqslant i$, $\ell, j \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \leqslant j$:

$$(\mathbf{A})_{k:i,\ell:j} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{k,\ell} & (\mathbf{A})_{k,\ell+1} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,j} \\ (\mathbf{A})_{k+1,\ell} & (\mathbf{A})_{k,\ell+1} & \cdots & (\mathbf{A})_{k+1,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{i,\ell} & (\mathbf{A})_{i,\ell+1} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i-k+1,j-\ell+1} \quad \text{(Matrixblock)} .$$

Spezielle Matrizen:

Definition I.2.2.J (Diagonalmatrix)**.**
Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, heisst Diagonalmatrix, wenn $(\mathbf{D})_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n$ mit $i \neq j$.

Terminologie: Die Zahlen $(\mathbf{D})_{i,i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, heissen Diagonaleinträge.

✎ Notation: Für gegebene Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$/gegebenen Spaltenvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} ,$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\mathrm{diag}(\mathbf{d}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{d})_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{d})_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & \dots \; 0 & (\mathbf{d})_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} .$$

Matrixnotation für lineare Gleichungssysteme: für das LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{I.2.1.B}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten schreibt man auch

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \, , \tag{I.2.2.L}$$

mit der $m \times n$-Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} ,$$

dem Lösungs(spalten-)vektor (der Länge n)

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n ,$$

und dem Rechte-Seite-(Spalten-)Vektor (der Länge m)

$$\mathbf{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

✎ Notation: $\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})$ = lineares Gleichungssystem (→ Unterabschnitt 1.2.2) mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b}$.

✎ Notation: Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit $m \times n$-Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b}$, siehe Korollar I.2.1.F,

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) := \bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{L}(\mathrm{LG}((\mathbf{A})_{j,:};b_j)) .$$

1.3 Lineare Gleichungssysteme: Anwendungsbeispiele

LINK zu Präsentationsfolien für Abschnitt 1.3.

1.3.1 Additive Überlagerung: Mischungsprobleme

1.3.2 Input-Output-Modelle aus der Ökonomie (Leontief-Modelle)

1.3.3 Signalverarbeitung

1.3.4 Flussnetzwerke

1.4 Gausselimination

1.4.1 Eliminationsidee

Beispiel I.4.1.A (3×3-LGS mit eindeutiger Lösung).

LINK zu Präsentationsfolien. ◇

Beispiel I.4.1.B (Parametrisiertes 3×3-LGS ohne eindeutige Lösung).

LINK zu Präsentationsfolien. ◇

1.4.2 Zeilenumformungen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem (I.2.1.B), in Matrixnotation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, siehg (I.2.2.L).

Definition I.4.2.A (Zeilenumformungen eines LGS)**.**
Bezogen auf das lineare Gleichungssystem (I.2.1.B) *schreiben wir*

$$\text{Zeile}\,j \quad \leftarrow \quad \text{Zeile}\,j + \beta \cdot \text{Zeile}\,i\ , \tag{I.4.2.C}$$

für ein $\beta \in \mathbb{R}$*, wenn die* j*. Zeile,* $j \in \{1, \ldots, m\}$*,*

$$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j\ ,$$

ersetzt *wird durch eine "Summe aus der* j*. Zeile und dem* β*-fachen der* i*. Zeile",* $i \in \{1, \ldots, m\}$
(Zeilenkombination):

$$(a_{j,1} + \beta a_{i,1})x_1 + (a_{j,2} + \beta a_{i,2})x_2 + \cdots + (a_{j,n} + \beta a_{i,n})x_n = b_j + \beta b_i\ .$$

Wir schreiben für $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $j \in \{1, \ldots, m\}$*,*

$$\text{Zeile}\,j \quad \leftarrow \quad \alpha \cdot \text{Zeile}\,j\ , \tag{I.4.2.E}$$

wenn die j*. Zeile* ersetzt wird durch *das "*α*-fache der* j*. Zeile" (Zeilenskalierung):*

$$\alpha a_{j,1}x_1 + \alpha a_{j,2}x_2 + \cdots + \alpha a_{j,n}x_n = \alpha b_j\ .$$

Diese Transformationen eines linearen Gleichungssystems nennt man Zeilenumformungen.

✎ Notation: $\leftarrow$ ist zu lesen als "wird ersetzt durch"

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Analog: Transformation einer Matrix durch Zeilenumformungen
(Einfach rechte Seite ignorieren)

Elimination von x_ℓ aus der k. Zeile in der i. Zeile ($a_{k,\ell} \neq 0$); Matrixperspektive:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,\ell} & \dots & a_{j,k} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j,1} - ta_{i,1} & a_{j,2} - ta_{i,2} & \dots & 0 & \dots & a_{j,k} - ta_{i,k} & \dots & a_{j,n} - ta_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j - tb_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

mit $t := \dfrac{a_{j,\ell}}{a_{i,\ell}}$.

Satz I.4.2.G (Invarianz der Lösungsmenge unter Zeilenumformungen)**.**
Unterwirft man ein lineares Gleichungssystem in $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten und mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen den Zeilenumformungen

$$
\begin{array}{lcll}
\text{Zeile}\, j & \leftarrow & \text{Zeile}\, j + \beta \cdot \text{Zeile}\, i\,, & j, i \in \{1, \dots, m\},\ i \neq j\,, \\
\text{Zeile}\, j & \leftarrow & \alpha \cdot \text{Zeile}\, j\,, & j \in \{1, \dots, m\},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,
\end{array}
$$

dann ändert sich seine Lösungsmenge nicht.

1.4.3 Zeilenstufenform

LINK zu Vorlesungsunterlagen.

✎ Notation: j. Einheitsvektor $\in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (\mathbf{e}_j)_k = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } k = j \, , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad , \quad k \in \{1,\dots,n\} \, .$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \, , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \mathbf{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \, , \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \, .$$

Definition I.4.3.A (Zeilenstufenform einer Matrix)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, *ist in Zeilenstufenform (ZFS), falls es eine Zahl* $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min\{n, m\}$ *und Indices*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$$

so gibt, dass

$$(\mathbf{A})_{:,i_k} = \mathbf{e}_k \quad \textit{und} \quad \begin{cases} j < i_k \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \textit{für alle } i \geqslant k \;, \\ \qquad (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \textit{, wenn} \quad i > r \;, \end{cases} \qquad k \in \{1, \ldots, r\} \;.$$

Die Matrixspalten $(\mathbf{A})_{:,i_k}$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, *heissen Pivotspalten von* $\mathbf{A}$.

$$\text{Zeilenstufenform} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & & 0 & \star \\ & & 0 & 1 & \star & 0 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \ddots & 0 & \star \\ & & & & & & & & 1 & \star \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad r\text{. Zeile} \\ \\ \end{array} \qquad \text{(ZSF)}$$

($\star$ steht für beliebige Matrixeinträge.)

1.4.4 Gausselimination: Algorithmus

LINK zur Präsentation des Gaussalgorithmus in Beispielen

Satz I.4.4.A (Transformierbarkeit von LGS in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen)**.**
Jedes *lineare Gleichungssystem lässt sich durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.4.2.A in ein lineares Gleichungssystem transformieren, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform gemäss Definition I.4.3.A vorliegt.*

Korollar I.4.4.C (Transformierbarkeit von Matrizen in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen)**.**
Jede *beliebige $m \times n$-Matrix lässt sich durch Zeilenumformungen analog zu Definition I.4.2.A auf Zeilenstufenform gemäss Definition I.4.3.A transformieren.*

Algorithmus Gausselimination: Transformation eines linearen Gleichungssystems auf Zeilenstufenform

Gegeben: LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

$\ell := 1$ *% ℓ ist ein Zeilenindex*

$j := 1$ *% j ist ein Spaltenindex*

$r := 0$ *% Meta-Index für Pivotspalten*

while $(j \leqslant n)$ **do**

{ *% Suche nach Pivotelement*

$i := \ell$ *% i ist ein Zeilenindex (Hilfsvariable)*

while $(i \leqslant m$ **and** $(\mathbf{A})_{i,j} = 0)$ **do** { $i \leftarrow i + 1$ }

if $(i \leqslant m)$ **then** *% $(\mathbf{A})_{\ell:m,j} = \mathbf{0}$, wenn $i > m$!*

{ $i_{r+1} := j$ *% Speichere Position der Pivotspalte*

Zeilenvertauschung: i. Zeile$(\mathbf{A})$ $\longleftrightarrow$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$

Zeilenskalierung: ℓ. Zeile$(\mathbf{A}) \leftarrow \frac{1}{(\mathbf{A})_{\ell,j}} \cdot$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$

for $(k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\ell\})$ **do**

{ Zeilenkombination: k. Zeile$(\mathbf{A}) \leftarrow k$. Zeile$(\mathbf{A}) - (\mathbf{A})_{k,j} \cdot$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$ }

$\ell \leftarrow \ell + 1$ *% Eine Zeile weniger zu bearbeiten*

$r \leftarrow r + 1$ *% (Eventuell) weiter zu nächster Pivotspalte*

}

$j \leftarrow j + 1$ *% Weiter zu nächster Spalte*

}

Ausgabe: Lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in Zeilenstufenform
(Koeffizientenmatrix/Rechte-Seite-Vektor modifiziert!)
Anzahl r und Indices $i_1, \ldots, i_r$ der Pivotspalten

Satz I.4.4.C (Transformation auf Zeilenstufenform durch Gausselimination)**.**
Die Gausselimination (siehe Algorithmus) transformiert eine beliebiges *lineares Gleichungssystem durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.4.2.A auf Zeilenstufenform nach Definition I.4.3.A.*

Korollar I.4.4.D (Invarianz der Lösungsmenge bei Gausselimination)**.**
Die bei Gausselimination stattfindende Transformation eines lineares Gleichungssystems ändert dessen Lösungsmenge nicht. p

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz I.4.4.F (Eindeutigkeit der Zeilenstufenform)**.**
Die nach Satz I.4.4.A/Korollar I.4.4.C durch Zeilenumformungen hergestellten Zeilenstufenformen von linearen Gleichungssystemen/Matrizen sind eindeutig.

Definition I.4.4.H (Rang einer Matrix)**.**
Die Anzahl r *der Pivotspalten in* der *Zeilenstufenform einer Matrix bezeichnet man als Rang der Matrix (in Zeichen:* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ *für eine Matrix* $\mathbf{A}$*).*

Beispiel I.4.4.K (Zeilenstufenform von (verallgemeinerten) Dreiecksmatrizen)*.*

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \geqslant m$, heisst verallgemeinerte Dreiecksmatrix, wenn $(\mathbf{A})_{i,j} = 0$ für $i > j$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & \cdots & a_{2,m} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{m-1,m} & \cdots & a_{m-1,n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_{m,m} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} .$$

Annahme: $a_{i,i} \neq 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}$.

▶ Zeilenstufenform:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,m+1} & \cdots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,m+1} & \cdots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{m-1,m+1} & \cdots & z_{m-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{m,m+1} & \cdots & z_{m,n} \end{bmatrix}.$$

m Pivotspalten: $i_j = j$, $j = 1,\dots,m$ ➢ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m$.

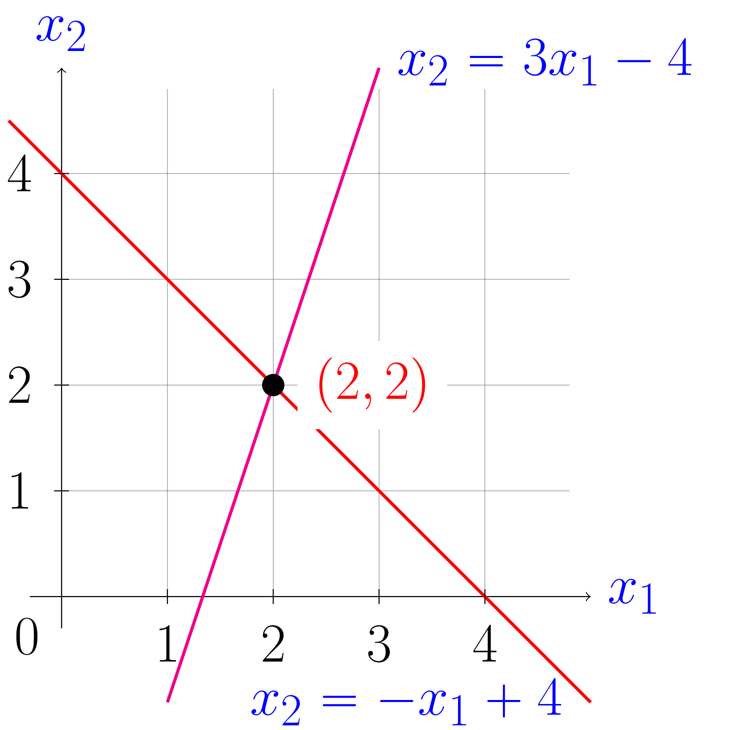
◇

1.4.5 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

LINK zu Vorlesungsunterlagen.

Veranschaulichung von Lösungsmengen im Kartesischen Koordinatensystem für $n = m = 2$ und $n = m = 3$:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

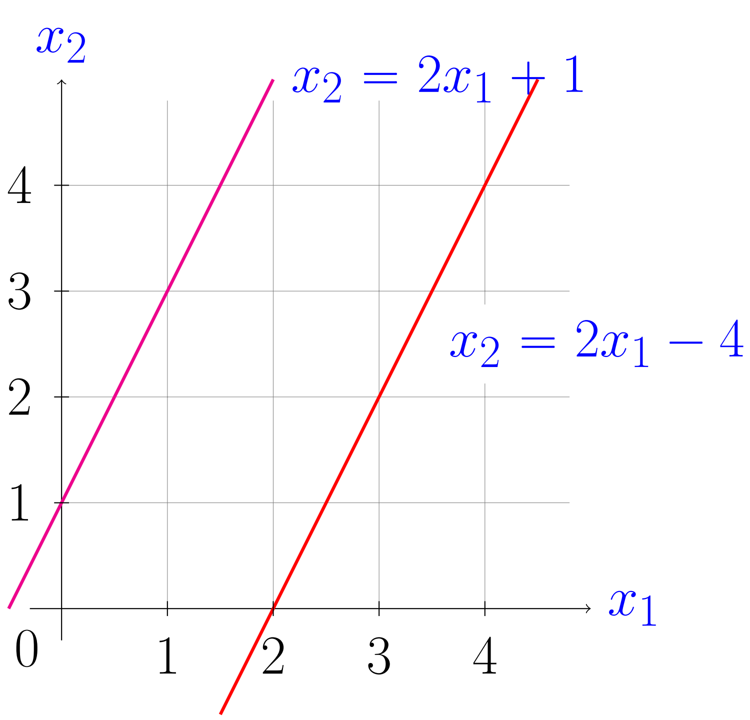


Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ 6x_1 & - & x_2 & = & 8 \end{array}$$

◁ • Lösungsmengen der einzelnen linearen Gleichungen sind Hyperebenen in 2D (Geraden)

• Schnittpunkt der Geraden ist *eindeutige* Lösung des LGS

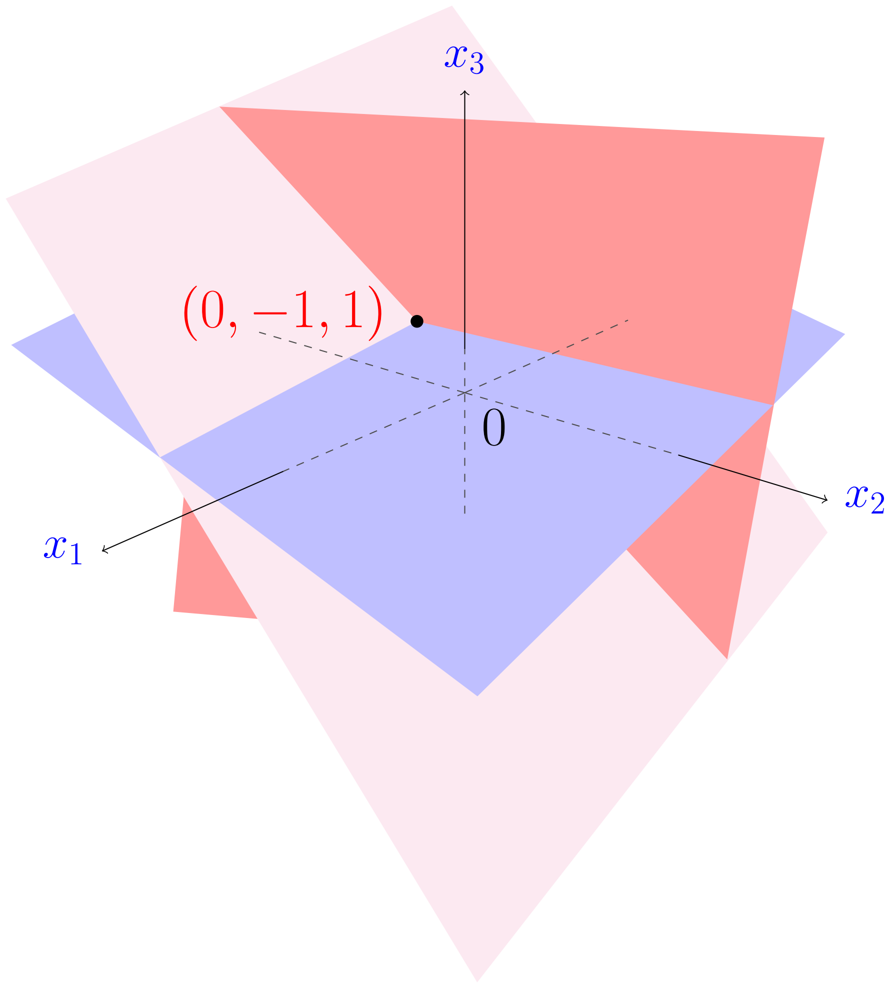


Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 &= 4\,. \end{aligned}$$

◁ Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ parallele Geraden

keine Lösung

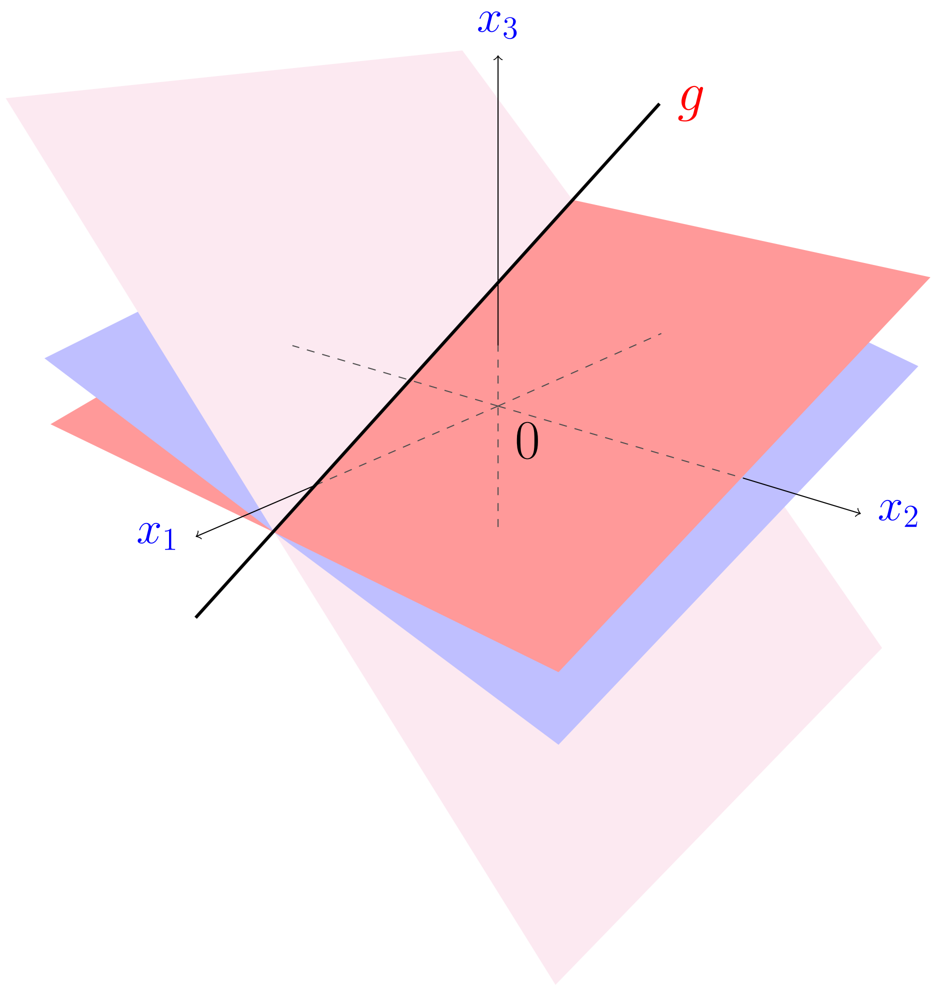


Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

- Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ Ebenen
- Eindeutige Lösung = Schnittpunkt von drei Ebenen



Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ -7x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

◁ Lösungsmenge = Gerade im Schnitt der drei Ebenen: unendlich viele Lösungen.

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)**.**
Sei $\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss Definition I.4.3.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.4.4.H),* $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die* geordnete *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$*) Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$*.*

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\mathrm{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k,j_\ell},\ k \in \{1, \dots, r\}\ , \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n-r\} \end{array},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

Korollar I.4.5.D (Existenz von Lösungen eines linearen Gleichungssystems)**.**
Falls $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m$ *für* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$*, dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *mindestens eine Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{und} \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\ .$$

Korollar I.4.5.E (Eindeutige Lösbarkeit von quadratischen LGS)**.**
Gilt $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$ *für eine quadratische Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$*, dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine eindeutige Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \textit{und} \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \exists_1 \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\ .$$

Satz I.4.5.F (Eindeutigkeit aus Existenz)**.**
Wenn für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$*, das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung besitzt, dann ist* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}\colon \quad \Big(\quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n \quad \Big)\ .$$

Korollar I.4.5.G (Lineare Gleichungssysteme mir rechter Seite $\mathbf{0}$)**.**
Falls $n > m$*, so hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *mit Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *unendlich viele Lösungen.*

2 Rechnen mit Vektoren und Matrizen

LINK zur Vorlesungsniederschrift für Kapitel 2

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2.1 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

Definition II.1.0.B (Grundoperationen der Vektorarithmetik)**.**
Vektoraddition: Für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, definieren wir ihre Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *durch*

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})_i := (\mathbf{v})_i + (\mathbf{w})_i \;, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \;.$$

Skalarmultiplikation: Für einen beliebigen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir das Produkt $\alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *wie folgt:*

$$(\alpha \cdot \mathbf{v})_i := \alpha \cdot (\mathbf{v})_i \;, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \;.$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ w_n + v_n \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.1.0.D (Rechenregeln für die Vektoroperationen)**.**
Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Vektoraddition kommutativ:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}\ ,$	(VR1)
Vektoraddition assoziativ:	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\ ,$	(VR2)
Vektoraddition, neutrales Element:	$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}\ ,$	(VR3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})\ ,$	(VR4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\ ,$	(VR5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}\ ,$	(VR6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}\ .$	(VR7)

2.2 Linearkombinationen und Matrix-Vektor-Produkt

Motivation: Eine andere Sicht auf LGS

"Matrixnotation": $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Updownarrow$$

LGS:
$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung:
$$x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung kompakt: $x_1(\mathbf{A})_{:,1} + x_2(\mathbf{A})_{:,2} + \cdots + x_n(\mathbf{A})_{:,n} = \mathbf{b}$.

Definition II.2.0.A (Linearkombination von (Spalten)vektoren)**.**
Gegeben sei eine Menge von $n \in \mathbb{N}$ *(Spalten)vektoren* $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\} \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. *Für reelle Zahlen* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *heisst*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^j = c_1 \mathbf{a}^1 + \cdots + c_n \mathbf{a}^n \tag{II.2.0.B}$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ *mit (reellen) Koeffizienten* c_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Lineares Gleichungssystem = Linearkombination von Matrixspalten mit *unbekannten Koeffizienten*:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j (\mathbf{A})_{:,j} = \mathbf{b}\ . \tag{II.2.0.C}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.2.0.D (Matrix-Vektor-Multiplikation)**.**
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *und* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *ist das Matrix-Vektor-Produkt* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m}$ *definiert durch*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_i := \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} v_j \;, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j (\mathbf{A})_{:,j} \;.$$

Ausgeschrieben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} .$$

$$i\text{-te Zeile} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ \boxed{* \;\; * \;\; * \;\; *} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ \boxed{*} \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} \leftarrow (\mathbf{Ax})_i$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Linearkombination geschrieben mit Matrix-Vektor-Produkt:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^j = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$

$m \times n$-Matrix, erzeugt durch Nebeneinanderschreiben der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$

Bemerkung II.2.0.F (Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen).

Spezielle Zeilenstufenform (vgl. Beispiele aus Abschnitt 1.4.5):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,r+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,r+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{r-1,r+1} & \dots & z_{r-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \dots & z_{r,n} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} , \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{Z}) = r \leqslant \min\{m,n\} .$$

$$\overset{(\mathbf{y})_{r+1:m}=0}{\blacktriangleright} \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{y})) = \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{y})_{1:r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \cdots & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \cdots & \cdots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} .$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{0})) = \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \cdots & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \cdots & \cdots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} \\ \vdots \\ z_{r,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{1,r+2} \\ \vdots \\ z_{r,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} z_{1,n-1} \\ \vdots \\ z_{r,n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{1,n} \\ \vdots \\ z_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} .$$

△

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2.3 Matrixprodukt

Definition II.3.0.B (Matrixprodukt)**.**
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k,n}$. *Das Matrixprodukt* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *ist* elementweise *definiert durch*

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})_{i,j} := \sum_{\ell=1}^{k} (\mathbf{B})_{i,\ell} (\mathbf{S})_{\ell,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \ .$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & \\
i\text{-te Zeile} \rightarrow &
\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & = &
\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\
 & \mathbf{B} & \mathbf{S} & & \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S} &
\end{array}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Schema für Rechnung mit Bleistift und Papier:

$$\begin{array}{cc}
 & \mathbf{S} \\
 & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
\mathbf{B} & \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S}
\end{array}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel: $m = 2, n = 4, k = 3$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{S} := \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{S} \\ & \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -14 & 1 & -2 \\ 42 & -32 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S} \end{array}$$

Beispiel II.3.0.G (Inneres Produkt von Zeilen- und Spaltenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1,k}$ $\leftrightarrow$ Zeilenvektor $\mathbf{a}^\top = [a_1, \dots, a_k]$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,1} = \mathbb{R}^k$ $\leftrightarrow$ Spaltenvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = [a_1, \dots, a_k] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \left[\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell b_\ell \right] \in \mathbb{R} \,.$$

◇

Beispiel II.3.0.H (Äusseres Produkt/Tensorprodukt von Spalten- und Zeilenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,1} \leftrightarrow$ Spaltenvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1,n} \leftrightarrow$ Zeilenvektor $\mathbf{a}^\top = [b_1, \dots, b_n]$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \cdot [b_1, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & \dots & a_mb_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} ,$$

$$\boxed{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top)_{i,j} = (\mathbf{a})_i \cdot (\mathbf{b}^\top)_j} , \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} .$$

Beispiel II.3.0.J (Multiplikation mit Diagonalmatrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad , \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &:= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^{m,m} , \\ \mathbf{T} &:= \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n,n} . \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1a_{1,1} & d_1a_{1,2} & \dots & d_1a_{1,n} \\ d_2a_{2,1} & d_2a_{2,2} & \dots & d_2a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_ma_{m,1} & d_ma_{m,2} & \dots & d_ma_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{D}\cdot\mathbf{A})_{i,j} = d_i(\mathbf{A})_{i,j}}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1a_{1,1} & t_2a_{1,2} & \dots & t_na_{1,n} \\ t_1a_{2,1} & t_2a_{2,2} & \dots & t_na_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1a_{m,1} & t_2a_{m,2} & \dots & t_na_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{T})_{i,j} = t_j(\mathbf{A})_{i,j}}$$

➤ $\mathbf{I}_m\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ für Einheitsmatrix $\mathbf{I}_k = \mathrm{diag}(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^{k,k}$.

◇

Beispiel II.3.0.K (Zeilenkombination durch Matrixmultiplikation).

$$\mathbf{A}' := \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & & & \dots & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m,n}} .$$

▶ $\mathbf{A}'$ geht aus $\mathbf{A}$ durch die Zeilenkombination (→ Definition I.4.2.A)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$i\text{. Zeile} \leftarrow i\text{. Zeile} + \alpha \cdot j\text{. Zeile}$$

hervor.

◇

Satz II.3.0.L (Assoziativität der Matrixmultiplikation).
Für $m, n, k, \ell \in \mathbb{N}$ *und beliebige* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,\ell}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$ *gilt*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .$$

2.4 Matrixkalkül

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.4.0.B (Grundoperationen der Matrixarithmetik).
Matrixaddition: Für beliebige Matrizen gleicher Grössse $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *definieren wir ihre Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ elementweise *durch*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{i,j} := (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \ j \in \{1, \dots, m\} \ .$$

Skalarmultiplikation: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir das Produkt* $\alpha \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \alpha \in \mathbb{R}^{m,n}$ elementweise *wie folgt:*

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})_{i,j} = (\mathbf{A} \cdot \alpha)_{i,j} := \alpha \cdot (\mathbf{A})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \ j \in \{1, \dots, m\} \ .$$

Echte Verallgemeinerung der Vektoroperationen von Definition II.1.0.B.

Satz II.4.0.D (Rechenregeln für die Matrixoperationen)**.**
Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Matrixaddition kommutativ:	$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$,	(M1)
Matrixaddition assoziativ:	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,	(M2)
Matrixaddition, neutrales Element:	$\mathbf{B} + \mathbf{O}_{m,n} = \mathbf{B}$,	(M3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{B})$,	(M4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$,	(M5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \alpha \cdot \mathbf{B} + \alpha \cdot \mathbf{C}$,	(M6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{B}$.	(M7)

Satz II.4.0.F (Distributivgesetze für Matrixmultiplikation)**.**
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k,n} .$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k,n} .$$

Korollar II.4.0.G (Verträglichkeit von Matrixmultiplikation und Skalarmultiplikation)**.**
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B}) \; .$$

2.5 Inverse Matrix

Definition II.5.0.A (Invertierbare/reguläre Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst invertierbar oder regulär, wenn es eine Matrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n \quad \textit{oder} \quad \mathbf{XA} = \mathbf{I}_n \; ,$$

wobei $\mathbf{I}_n$ *die* $n \times n$*-Einheitsmatrix bezeichnet.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel II.5.0.B (Inverse einer 2×2-Matrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} : \qquad \underbrace{\frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{I}_2} . \tag{II.5.0.B}$$

Notwendig: $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ **!**

◇

Satz II.5.0.C (Inverse einer Matrix)**.**

Zu jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine* eindeutig *bestimmte Matrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$*, die* *Inverse* *von* $\mathbf{A}$*, so, dass*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n .$$

✎ Notation: $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n} \mathrel{\hat{=}}$ eindeutige Inverse von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.5.0.E (Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix)**.**
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$.

(ii) Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *besitzt für jedes* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *eine die eindeutige Lösung.*

(iii) das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *hat nur die* triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(iv) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Satz II.5.0.F (Invertierbarkeit von Produktmatrizen)**.**
Für quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ ***und*** $\mathbf{B}$ *sind invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *ist invertierbar,*

(iii) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Treffen die Aussagen zu, dann gilt ferner

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad \textit{und} \quad (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \,. \qquad \text{(II.5.0.G)}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.5.0.J (Transformation von LGS mit invertierbaren Matrizen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,m}$ *eine invertierbare quadratische Matrix. Dann gilt die Gleichheit der Lösungsmengen:*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{MA};\mathbf{Mb})) \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \ .$$

2.6 Transponierte Matrix

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.6.0.A (Transponierte Matrix)**.**
Zu einer gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $mn, \in \mathbb{N}$, *heisst* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ *mit*

$$(\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i} \ , \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\} \ .$$

die Transponierte von $\mathbf{A}$

✎ Notation: $\mathbf{A}^\top \hat{=}$ Transponierte von $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m} .$$

Satz II.6.0.C (Rechenregeln für die Tranponierten)**.**

Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\left(\mathbf{A}^{\top}\right)^{\top} = \mathbf{A} \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} , \tag{T1}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\top} = \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}^{\top} \qquad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n} , \tag{T2}$$

$$(\alpha \mathbf{A})^{\top} = \alpha \cdot \mathbf{A}^{\top} \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall \alpha \in \mathbb{R} , \tag{T3}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\top} = \mathbf{B}^{\top} \cdot \mathbf{A}^{\top} \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n} . \tag{T4}$$

Korollar II.6.0.F (Inverse der Transponierten).
Die Transponierte jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ist wiederum invertierbar und es gilt*

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top . \tag{T5}$$

✎ Notation: Inverse der Transponierten: $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top = \mathbf{A}^{-\top}$

Definition II.6.0.J (Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst symmetrisch, falls* $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst schiefsymmetrisch, falls* $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

Korollar II.6.0.K (Inverse (schief-)symmetrischer Matrizen).
Die Inverse einer invertierbaren (schief-)symmetrischen Matrix ist wieder (schief-)symmetrisch.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2.7 Blockmatrixoperationen

Matrixpartitionierung:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & a_{1,\ell+1} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & a_{2,\ell+1} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & a_{i,\ell+1} & \dots & a_{i,k} \\ \hline a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,\ell} & a_{i+1,\ell+1} & \dots & a_{i+1,k} \\ a_{i+2,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+2,\ell} & a_{i+2,\ell+1} & \dots & a_{i+2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & a_{m,\ell+1} & \dots & a_{m,k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \end{array}\right]$$

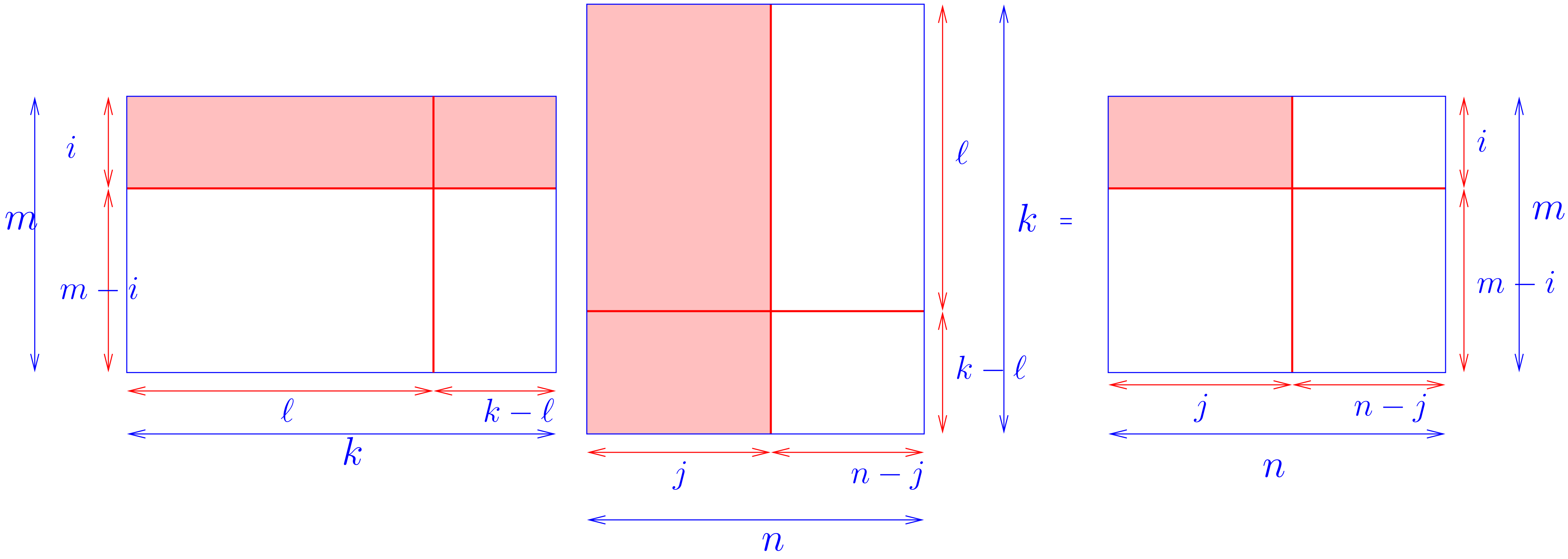
$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,j} & b_{1,j+1} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} & b_{2,j+1} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\ell,1} & b_{\ell,2} & \dots & b_{\ell,j} & b_{\ell,j+1} & \dots & b_{\ell,n} \\ \hline b_{\ell+1,1} & b_{\ell+1,2} & \dots & b_{\ell+1,j} & b_{\ell+1,j+1} & \dots & b_{\ell+1,n} \\ b_{\ell+2,1} & b_{\ell+1,2} & \dots & b_{\ell+2,j} & b_{\ell+2,j+1} & \dots & b_{\ell+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,j} & b_{k,j+1} & \dots & b_{k,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right]$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.7.0.B (Blockmatrixmultiplikation)**.**

Es seien $m, k, n, i, \ell, j \in \mathbb{N}$ *mit* $i \leqslant m$, $\ell \leqslant k$, $j \leqslant n$. *Dann gilt für beliebige Matrizen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,1:j} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j}\,,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}\,,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,1:j} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j}\,,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}
\end{aligned}
$$


i
m
m − i
ℓ
k − ℓ
k
ℓ
k − ℓ
k
j
n − j
n
=
i
m
m − i
j
n − j
n

$$\left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right]$$

Kompakte Notation für Matrixblöcke:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{1,1} &:= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} && \in \mathbb{R}^{i,\ell}\,, \\
\mathbf{A}_{1,2} &:= (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} && \in \mathbb{R}^{i,k-\ell}\,, \\
\mathbf{A}_{2,1} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} && \in \mathbb{R}^{m-i,k}\,, \\
\mathbf{A}_{2,2} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} && \in \mathbb{R}^{m-i,k-\ell}\,,
\end{aligned}
\quad \blacktriangleright \quad
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right],
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1,1} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} && \in \mathbb{R}^{\ell,j}\,, \\
\mathbf{B}_{1,2} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} && \in \mathbb{R}^{\ell,n-j}\,, \\
\mathbf{B}_{2,1} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} && \in \mathbb{R}^{k-\ell,j}\,, \\
\mathbf{B}_{2,2} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} && \in \mathbb{R}^{k-\ell,n-j}\,,
\end{aligned}
\quad \blacktriangleright \quad
\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right].
$$

Kompakte Notation für Blockmatrixmultiplikation:

$$
\left[\begin{array}{c|c}
\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline
\mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|c}
\mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \hline
\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c}
\mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2} \\ \hline
\mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2}
\end{array}\right]
$$

$$\updownarrow$$

$$
\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}
$$

Beispiel II.7.0.D (Multiplikation von Pfeilmatrizen).

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$
\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} \quad , \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & q_n \\ p_1 & \dots & \dots & p_n & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} .
$$

► Schnelle Berechnung von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ durch Blockmatrixmultiplikation

◇

Blockpartitionierung des LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M}$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A}_{1,1} := (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & \in \mathbb{R}^{i,\ell}\,, & \\ \mathbf{A}_{1,2} := (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:n} & \in \mathbb{R}^{i,n-\ell}\,, & \mathbf{b}_1 := (\mathbf{b})_{1:i}\,, \quad \mathbf{x}_1 := (\mathbf{x})_{1:\ell}\,, \\ \mathbf{A}_{2,1} := (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & \in \mathbb{R}^{m-i,k}\,, & \mathbf{b}_2 := (\mathbf{b})_{i+1:m}\,, \quad \mathbf{x}_2 := (\mathbf{x})_{\ell+1:n}\,. \\ \mathbf{A}_{2,2} := (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:n} & \in \mathbb{R}^{m-i,n-\ell} & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] .$$

Wenn $i = l$ und $\mathbf{A}_{1,1}$ invertierbar:

$$\underbrace{\left(\mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right)}_{\text{Schur-Komplement-Matrix}} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{b}_1 \,. \qquad \text{(II.7.0.F)}$$

Beispiel II.7.0.H (Blockelimination bei Pfeilmatrizen).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

◇

3 Unterräume und Basen

✎ Notation: $\mathcal{V} := \mathbb{R}^{m,n} \hat{=}$ Menge von $m \times n$-Matrizen, $m, n \in \mathbb{N}$ (in jedem Kontext sind m, n fest, aber oft nicht eigens spezifiziert)

Spezialfälle: Spaltenvektoren ($n = 1$), Zeilenvektoren ($m = 1$)

Sprachgebrauch: Elemente von $\mathcal{V}$ werden als "Vektoren" bezeichnet, auch wenn es sich vielleicht um Matrizen handelt.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.1 Erzeugnisse und Unterräume

Definition III.1.0.A (Span/Erzeugnis)**.**
Für gegebene Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *heisst die* Menge

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^k\}) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}^j,\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ [\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k] \cdot \mathbf{a},\ \ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \right\}$$

aller möglicher Linearkombinationen (→ Definition II.2.0.A) von $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ *der Span oder das Erzeugnis von* $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Veranschaulichung: Geraden durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^2$, Geraden & Ebenen durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^3$

Konvention: $\operatorname{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$

Definition III.1.0.C (Unterraum)**.**
Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *heisst Unterraum (UR), wenn gilt*

- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{U}$*,*
- $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Korollar III.1.0.D (Schnitt von Unterräumen)**.**
Sind $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *Unterräume von* $\mathcal{V}$*, dann ist auch* $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ *ein Unterraum.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Die vielen Gesichter von '+':

- $\alpha + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ für Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$: Vektoraddition/Matrixaddition, Definitionen II.1.0.B, II.4.0.B
- **Addition eines Vektors zu einer Menge** $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$**!**

$$\mathbf{v}\in\mathcal{V} \quad , \quad \mathcal{M}\subset V: \quad \mathbf{v} + \mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \ \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{m} \text{ für ein } \mathbf{m} \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{V} \ .$$

- **Addition zweier Mengen $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$!**

$$\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}:\quad \mathcal{U}+\mathcal{W}:=\{\mathbf{x}\in\mathcal{V}:\ \mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{w}\ \text{für irgendwelche}\ \mathbf{u}\in\mathcal{U},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}\}\subset\mathcal{V}\ .$$

Korollar III.1.0.F (Summe von Unterräumen)**.**

Sind $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$ Unterräume von $\mathcal{V}$, dann ist auch $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ ein Unterraum.

Satz III.1.0.G (Erzeugnisse sind Unterräume)**.**

Für eine Teilmenge $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt $k\in\mathbb{N}$ und Vektoren $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\in\mathcal{V}$, so dass $\mathcal{U}=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\})$.

(ii) $\mathcal{U}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}$.

Definition III.1.0.H (Erzeugendensystem)**.**

Gilt für einen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$, dass $\mathcal{U}=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\})$ für Vektoren $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\in\mathcal{V}$, so heisst die Menge $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}$ ein Erzeugendensystem (ES))von $\mathcal{U}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.1.0.J (Affiner Teilraum)**.**

Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ *heisst* *affiner Teilraum* *von* $\mathcal{V}$, *wenn es einen* Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *von* $\mathcal{V}$ *und einen Vektor* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *so gibt, dass* $\mathcal{A} = \mathbf{v} + \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ *heisst der zu* $\mathcal{A}$ *parallele Unterraum.*

Satz III.1.0.K (Nichtleere Lösungsmengen von LGS sind affine Teilräume)**.**

Die Lösungsmenge eines lineare Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *ist entweder leer oder eine affiner Teilraum von* $\mathbb{R}^n$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

Definition III.2.0.B (Lineare (Un)abhängigkeit)**.**
Eine endliche Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *heisst linear unabhängig (l.u.), falls die Vektoren sich nur trivial zu Null linear kombinieren lassen:*

$$\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V} \quad \text{l.u.} \quad :\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}^k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \right)$$

Andernfalls heisst $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig (l.a.).*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma III.2.0.C („Überflüssiger Vektor" im Erzeugendensystem)**.**
Ist $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *linear abhängig, dann gibt es* $j \in \{1, \dots, k\}$ *so, dass*

$$\mathbf{v}^j \in \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \setminus \{\mathbf{v}^j\}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \setminus \{\mathbf{v}^j\}) \ .$$

Lemma III.2.0.D (Minimales Erzeugendensystem)**.**
Ist $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig *so gilt für* alle $j \in \{1,\dots,k\}$

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\}) \neq \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}) \; .$$

Lemma III.2.0.E. *Ist* $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *linear unabhängig und*

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{w} \notin \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}) \; ,$$

dann ist auch die Menge $\{\mathbf{w},\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma III.2.0.F (Transformation linear (un)abhängiger Mengen in $\mathbb{R}^n$)**.**
Für jede invertierbare Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{l.u.} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\mathbf{M}\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{M}\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{l.u.}\; .$$

Definition III.2.0.G (Basis)**.**
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem *eines Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *heisst eine* *Basis* *von* $\mathcal{U}$.

Korollar III.2.0.H (Existenz von Basen)**.**
Jeder nichttriviale ($\neq \{\mathbf{0}\}$) *Unterraum von* $\mathcal{V}$ *besitzt eine Basis.*

Satz III.2.0.J (Gleichmächtigkeit von Basen)**.**
Alle Basen eines Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *besitzen die gleiche Anzahl von Elementen.*

Definition III.2.0.K (Dimension)**.**
Die Anzahl der Elemente einer (beliebigen) Basis eines Unterraums (→ Definition III.1.0.C) wird als dessen *Dimension* *bezeichnet.*
Die Dimension eines affinen Teilraums (→ Definition III.1.0.J) ist die Dimension des parallelen Unterraums.

✎ Notation: $\dim \mathcal{U} \hat{=}$ Dimension des Unterraums $\mathcal{U}$

Konvention: $\dim\{\mathbf{0}\} := 0$

Korollar III.2.0.L (Monotonie der Dimension)**.**
Für zwei Unterräume $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *gilt*

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{U} \; .$$

Lemma III.2.0.M (Lineare Abhängigkeit von mehr als $\dim$ Vektoren)**.**
Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *ein Unterraum und* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ist $k > \dim \mathcal{U}$, *dann ist* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig.*

Satz III.2.0.N (Dimensionssatz für Unterräume)**.**
Für beliebige Unterräume $\mathcal{W}, \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *gilt*

$$\dim(\mathcal{W} + \mathcal{U}) = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{U} - \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \; .$$

Satz III.2.0.P (Mächtigkeiten von Vereinigungs- und Schnittmengen)**.**
Für beliebige endliche Teilmengen $\mathcal{M}, \mathcal{L}$ *einer Menge gilt*

$$\sharp(\mathcal{M} \cup \mathcal{L}) = \sharp\,\mathcal{M} + \sharp\,\mathcal{L} - \sharp(\mathcal{M} \cap \mathcal{L}) \; .$$

✎ Notation: $\sharp\,\mathcal{M} \;\hat{=}$ Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer endlichen Menge $\mathcal{M}$

3.3 Bild und Kern von Matrizen, Dimensionssatz

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.3.0.B (Bild und Kern einer Matrix)**.**
Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *ist ihr Kern oder Nullraum definiert durch*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{0})) \; ,$$

während ihr Bild oder Spaltenraum gegeben ist durch

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{A}\mathbf{c}, \; \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Span}(\{(\mathbf{A})_{:,1}, \ldots, (\mathbf{A})_{:,n}\}) \; .$$

Korollar III.3.0.D.
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *ist* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$, *und* $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^m$.

Satz III.3.0.F (Darstellungssatz für den Kern einer Matrix)**.**
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Definition I.4.3.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.4.4.H).*

(i) Falls $r = n$, *dann ist* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Falls $r < n$, *dann ist*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{z}^1, \dots \mathbf{z}^{n-r}\})$$
$$\textit{mit} \quad (\mathbf{z}^\ell)_j = \begin{cases} (\mathbf{Z})_{k,j_\ell} & , \text{für } j = i_k,\ k \in \{1, \dots, r\}\ , \\ -1 & , \text{für } j = j_\ell\ , \\ 0 & , \text{für } j \notin \{i_1, \dots, i_r, j_\ell\} \end{cases} \quad , \quad \ell \in \{1, \dots, n-r\}\ ,$$

wobei $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die* geordnete *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$*) Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$.

Satz III.3.0.G (Darstellungssatz für das Bild einer Matrix)**.**
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Definition I.4.3.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.4.4.H), und* $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die* geordnete *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$*) Indexmenge der Pivotspalten von* $\mathbf{A}$*. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left(\left\{(\mathbf{A})_{:,i_1} \dots, (\mathbf{A})_{:,i_r}\right\}\right) .$$

Korollar III.3.0.H (Dimensionssatz für Matrizen)**.**
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

(i) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ *,*

(ii) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = n$ *.*

Satz III.3.0.I (Invarianz des Rangs)**.**
Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und jede invertierbare Matrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,m}$ *gilt*

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{MA}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) .$$

Korollar III.3.0.J (Darstellungssatz für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)**.**
Zu einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *einem Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *gebe es* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *so, dass* $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{b})) = \mathbf{y} + \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \ .$$

Satz III.3.0.K (Transformationen von Erzeugendensystemen)**.**
Gegeben sei eine beliebige Menge $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}) \ ,$$

wenn

(i) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j \ , \\ \mathbf{v}^j + \beta \mathbf{v}^i & \text{für } \ell = j \ . \end{cases}$ *für beliebige* $i, j \in \{1, \ldots, l\}$, $i \neq j$, *und* $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j \ , \\ \alpha \mathbf{v}^j & \text{für } \ell = j \ . \end{cases}$ *für beliebige* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $\alpha \neq 0$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar III.3.0.L (Invarianz des Zeilenraums unter Zeilenumformungen)**.**
Die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *gehe durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.4.2.A aus der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *hervor. Dann gilt*

$$\mathrm{Span}(\{(\mathbf{B})_{1,:}, \dots, (\mathbf{B})_{m,:}\}) = \mathrm{Span}(\{(\mathbf{A})_{1,:}, \dots, (\mathbf{A})_{m,:}\}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Bild}(\mathbf{B}^\top) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A}^\top) \ .$$

Satz III.3.0.M (Zeilenrang einer Matrix)**.**
Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

$$\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}^\top) = \dim \mathrm{Span}(\{(\mathbf{A})_{1,:}, \dots, (\mathbf{A})_{m,:}\}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) \ .$$

Satz III.3.0.P (Kriterien für Invertierbarkeit, vgl. Satz II.5.0.E)**.**

Für eine quadratische *Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$,

(iii) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ *(* $\Leftrightarrow$ *Matrixspalten linear unabhängig)*

(iv) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$, *(* $\Leftrightarrow$ *Matrixzeilen linear unabhängig)*

(v) $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.4 Koeffizientenvektoren und Basiswechsel

Korollar III.4.0.B (Eindeutigkeit der Basisdarstellung)**.**
Sei $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k\}$*,* $k \in \dim \mathcal{U}$*, eine Basis des Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$*.*
Dann gibt es zu jedem $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *eindeutige Koeffizienten* $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{b}^j \; . \tag{III.4.0.C}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.4.0.D (Koordinaten/Koeffizienten)**.**
Die eindeutigen Zahlen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *aus Korollar III.4.0.B heissen die Koordinaten oder Koeffizienten des Vektors* $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{B}$*.*
Der Spaltenvektor $\mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$ *heisst der Koordinatenvektor oder Koeffizientenvektor von* $\mathbf{u}$ *bzgl.* $\mathcal{B}$ *und* (III.4.0.C) *seine Basisdarstellung.*

Satz III.4.0.F (Basiswechselmatrix)**.**
Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ *und* $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$ *Basen des* n*-dimensionalen Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.
Dann ist die Basiswechselmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$*, definiert durch*

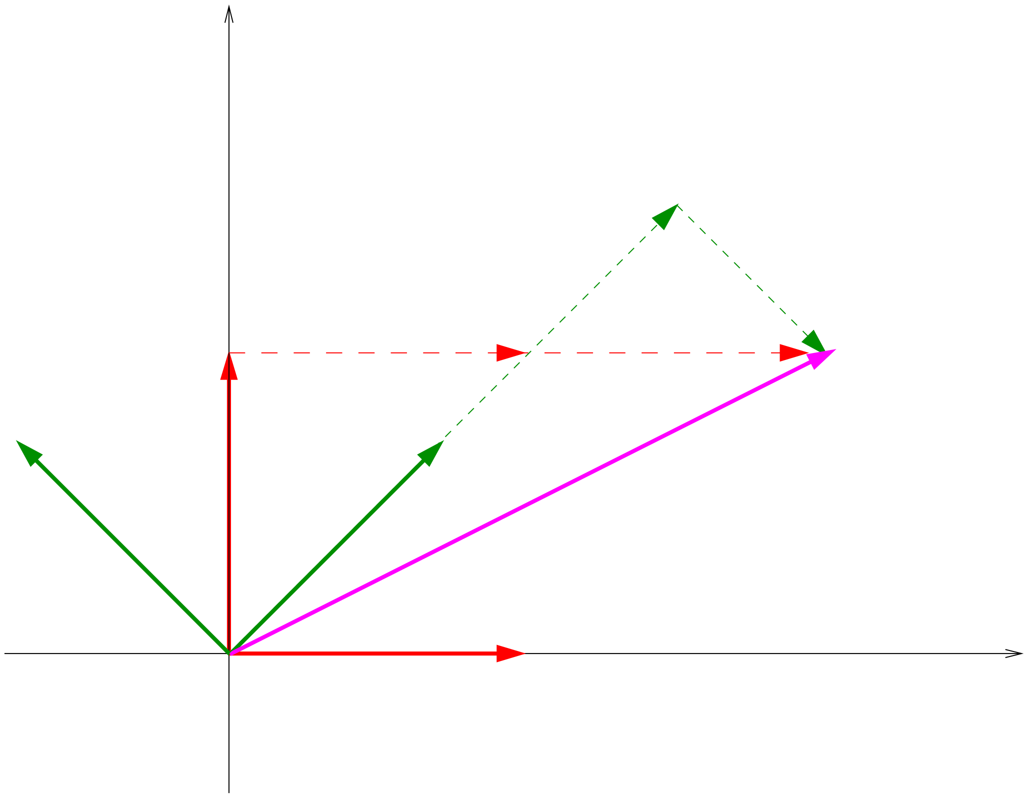
$$\widetilde{\mathbf{b}}^j = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{S})_{i,j} \mathbf{b}^i \;, \qquad \text{(III.4.0.E)}$$

invertierbar.

Satz III.4.0.H (Basiswechsel)**.**
Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ *und* $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$ *zwei Basen des* n*-dimensionalen Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *mit zugehöriger Basiswechselmatrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$.
Dann besteht zwischen den Koordinatenvektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ *eines Vektors* $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *bzgl.* $\mathcal{B}$ *bzw.* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *die Beziehung*

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c} \;.$$

(Koordinaten in der „neuen Basis" $\mathcal{B}$ *erhält man aus den Koordinaten bzgl. der „alten Basis" durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{S}$*.)*



$\triangleleft$ Zwei Basen (rot/grün) von $\mathbb{R}^2$ und die Darstellung eines Vektors durch Linearkombinationen von Basisvektoren.

Clickerfragen

Clickerfrage 3.4.1 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

□ richtig □ falsch

Clickerfrage 3.4.2 (Dimensionssatz).

Es gibt eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ so, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

□ richtig □ falsch

Clickerfrage 3.4.3 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist bekannt, dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Dann ist $\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) > \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Clickerfrage 3.4.4 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist bekannt, dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Dann ist $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} \leqslant \frac{n}{2}$.

□ richtig □ falsch

4 Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

4.1 Das Euklidische Skalarprodukt

4.1.1 Definition und Eigenschaften

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition IV.1.1.A (Euklidisches Skalarpodukt)**.**
Das Euklidische Skalarprodukt (ESP) im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Abbildung, die jedem Paar $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl zuordnet gemäss der Vorschrift

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell w_\ell \in \mathbb{R}$$

wenn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$.

vgl. Bsp. II.3.0.G (inneres Produkt): $\boxed{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\top \mathbf{w}}$

Satz IV.1.1.C (Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts)**.**
Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

Skalarprodukt kommutativ: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, (ESP1)

distributiv bzgl. $\cdot$*:* $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} \rangle$, (ESP2)

distributiv bzgl. $+$*:* $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, (ESP3)

Positive Definitheit: $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$. (ESP4)

Korollar IV.1.1.D (Linearität des Euklidischen Skalarprodukts in jedem Argument)**.**
Für das Euklische Skalarprodukt gelten die Rechenregeln:

(i) (Linearität im ersten Argument)

$$\langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,.$$

(ii) (Linearität im zweiten Argument)

$$\langle \mathbf{w}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u} \rangle = \alpha\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,.$$

Korollar IV.1.1.F (Transponierte Matrix und Skalarprodukt)**.**

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^\top \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \,.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.1.2 Länge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Definition IV.1.2.A (Länge/(Euklidische) Vektornorm)**.**
Die Länge oder (Euklidische) Vektornorm eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} .$$

Definition IV.1.2.B (Normierter Vektor)**.**
Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heisst normiert, wenn $\|\mathbf{v}\| = 1$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.1.2.C (Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU))**.**

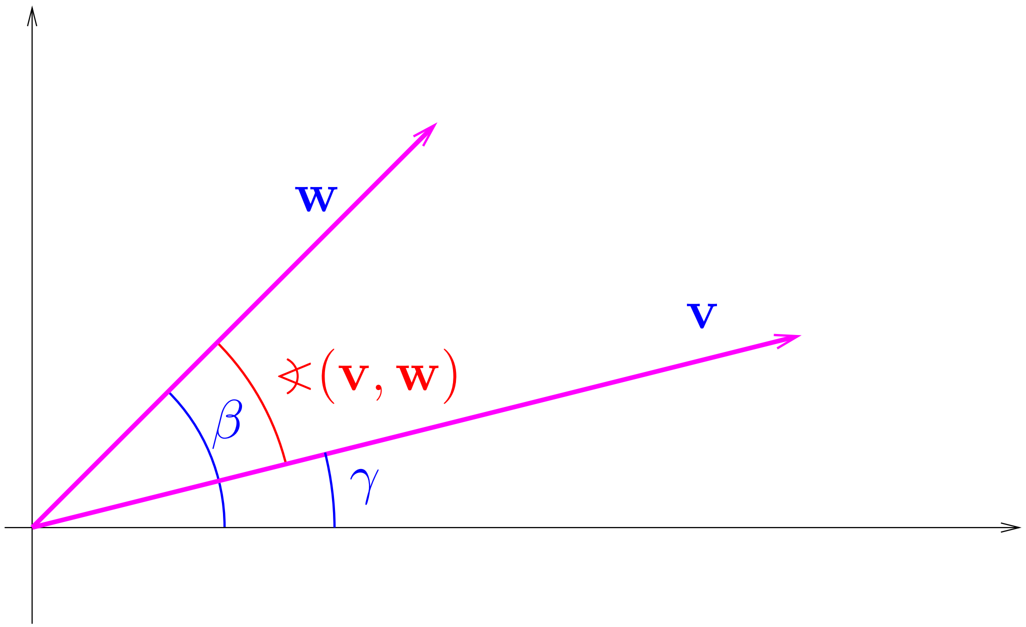
$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n . \tag{CSU}$$

Gleichheit gilt genau dann, *wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig sind.*

Satz IV.1.2.E (Dreiecksungleichung für Vektornorm)**.**

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \,. \qquad (\triangle\text{-UG})$$

4.1.3 Winkel

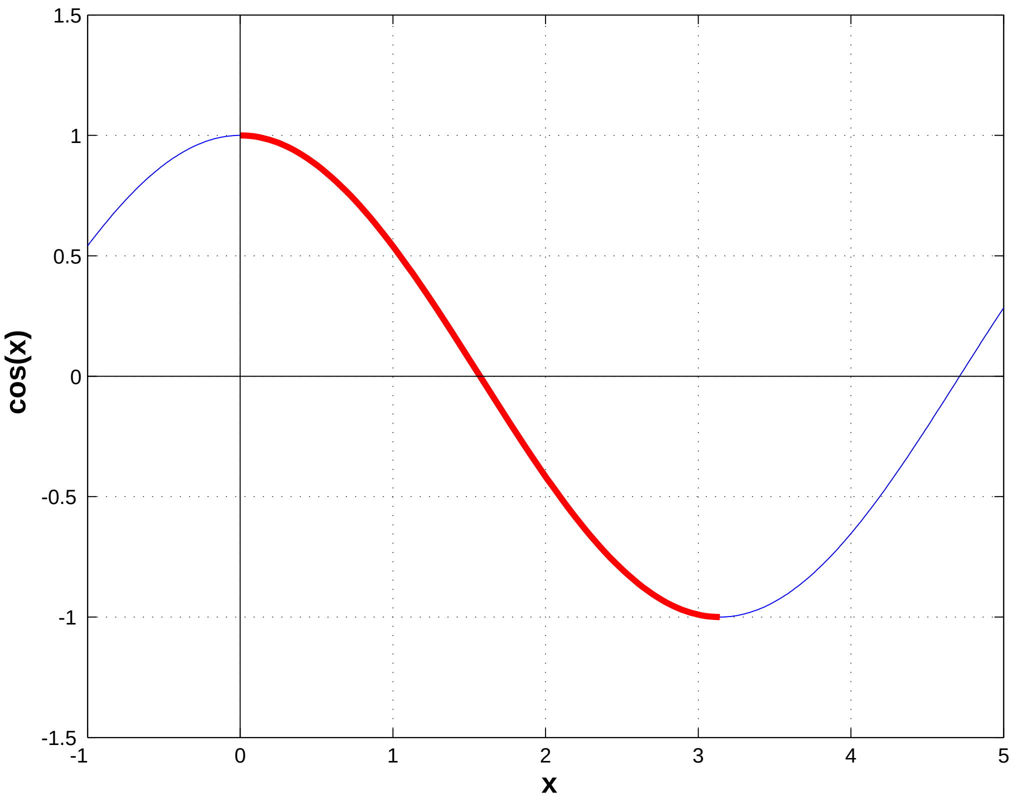


$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \begin{bmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} \quad ,$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

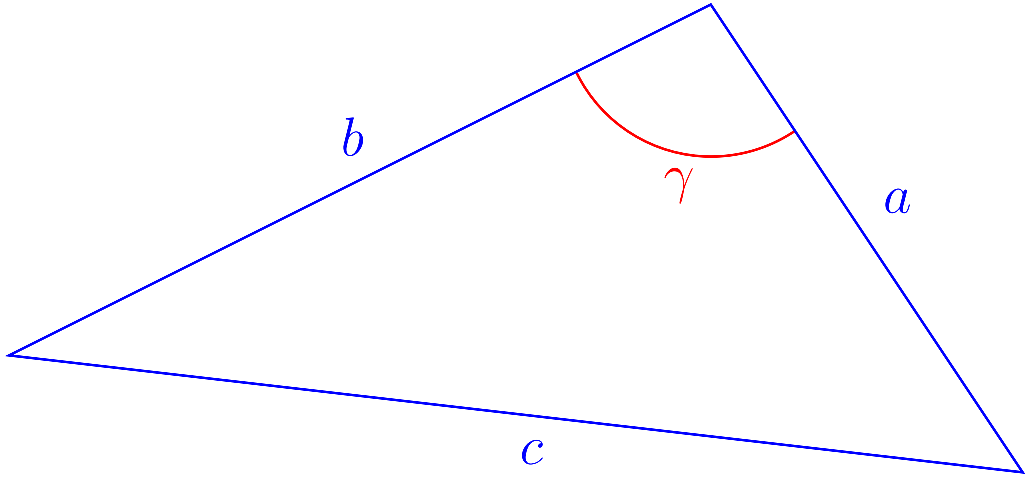
Definition IV.1.3.A (Winkel zwischen Vektoren)**.**
Der Winkel $\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in [0,\pi]$ *(im Bogenmass) zwischen zwei Vekoren* $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *ist definiert durch*

$$\cos\left(\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})\right) := \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\rangle .$$



◁ Kosinus ist umkehrbar im für die Winkelberechnung relevanten Bereich.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Im Dreieck:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ .$$

Satz IV.1.3.C (Kosinussatz)**.**

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\left(\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})\right) \quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}\ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition IV.1.3.E (Senkrecht/orthogonal)**.**
Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *heissen senkrecht oder orthogonal, wenn* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$*:*

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \qquad \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ .$$

Zwei Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ *heissen sind orthogonal, in Zeichen* $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$*, wenn*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{F},\ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{G}: \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ .$$

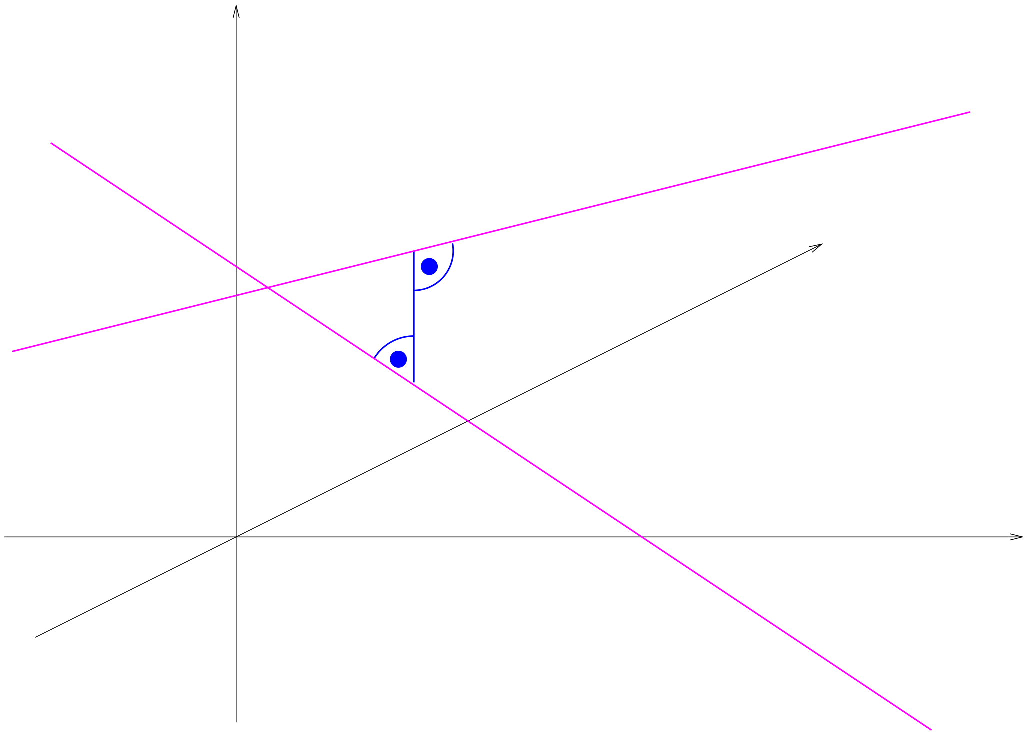
4.2 Abstand

4.2.1 Abstandsbegriff

Definition IV.2.1.B (Abstand von affinen Teilräumen)**.** *Der Abstand von zwei affinen Teilräumen* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{G}$ *von* $\mathbb{R}^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, ist definiert durch*

$$\mathrm{dist}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \ \mathbf{x} \in \mathcal{G}, \ \mathbf{y} \in \mathcal{F}\} \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



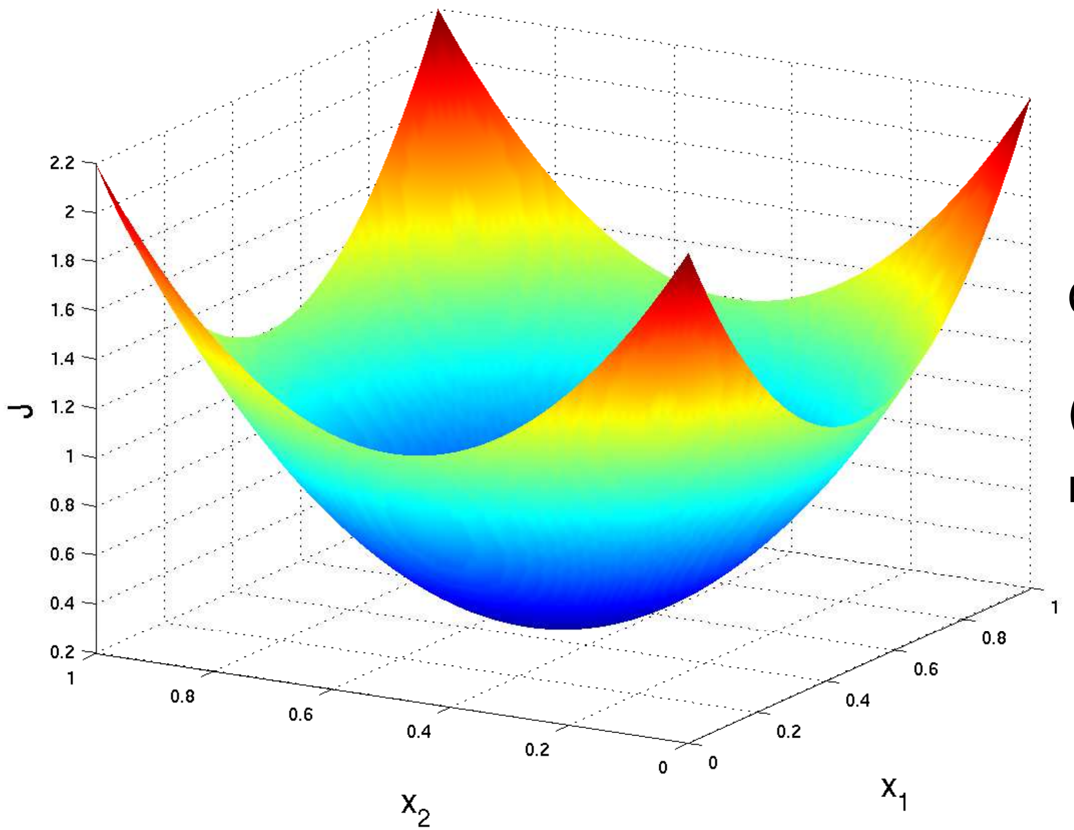
Abstand zweier Geraden im dreidimensionalen Raum:

Verbindungsstrecke der „nächsten Punkte” orthogonal zu beiden Geraden.

4.2.2 Ergänzung: Quadratische Formen

Definition IV.2.2.D (Quadratische Form)**.**
Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst eine quadratische Form auf* $\mathbb{R}^n$, *wenn es eine Matrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$, *einen Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *und eine Zahl* $\gamma \in \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \gamma\ , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ .$$



Graph einer quadratischen Form $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(Jeder Schnitt entlang einer Geraden ist eine Parabel!)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition IV.2.2.F (Positiv (semi-)definite Matrix)**.**
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definieren wir:*

(i) $\mathbf{M}$ *positive semidefinit* $:\Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(i) $\mathbf{M}$ *positive definit* $:\Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lemma IV.2.2.H (Invertierbarkeit positiv definiter Matrizen)**.**

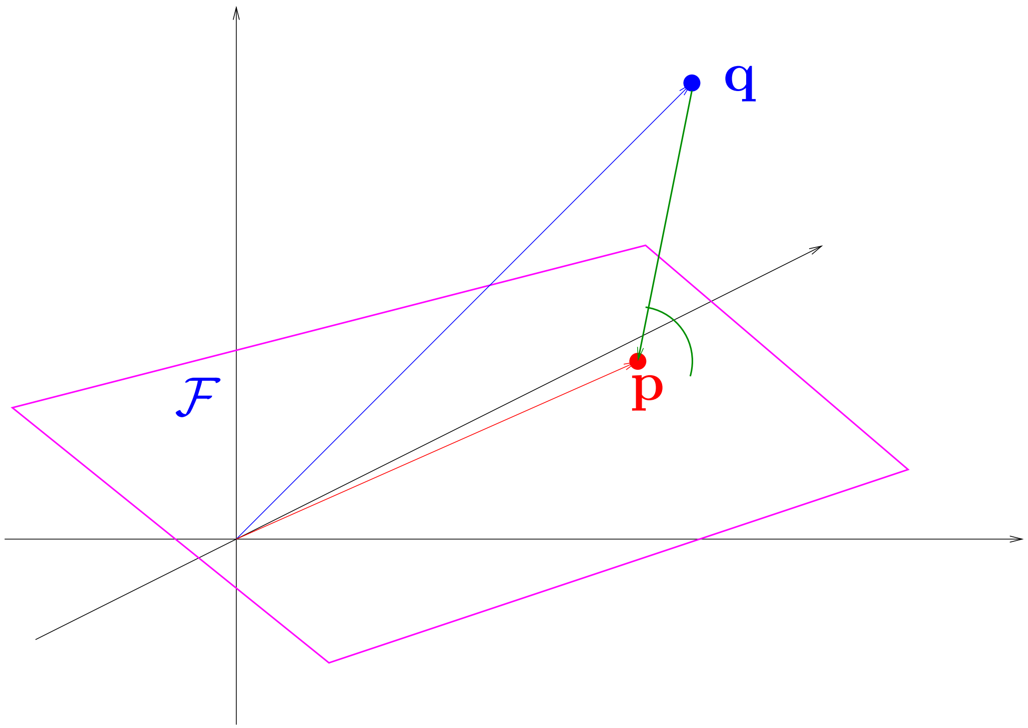
Jede positiv definite Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ist invertierbar (*$\rightarrow$ *Definition II.5.0.A).*

Satz IV.2.2.J (Normalengleichungsmatrizen)**.**

Hat $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, *vollen Rang* k*, dann ist* $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ *positiv definit:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}\,, \quad k \leqslant n : \qquad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = k \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} \quad \text{positiv definit}\,.$$

4.2.3 Orthogonale Projektion



Affiner Teilraum $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, $k < n$,

$$\mathcal{F} = \mathbf{y} + \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U} = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k\} \ ,$$

$\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k\}$ = Basis von $\mathcal{U}$

$$\mathbf{p} \in \mathcal{F} \quad , \quad \boxed{\mathbf{q} - \mathbf{p} \perp \mathcal{U}} \ .$$

$\rightarrow \hat{=} \ \mathbf{q} - \mathbf{p}$

Lemma IV.2.3.K (Normalengleichungsmatrizen II)**.**
Hat $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, *vollen Rang* k, *dann ist* $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ *invertierbar (→ Definition II.5.0.A).*

Satz IV.2.3.L (Orthogonale Projektion eines Vektors)**.**
Sei $\mathcal{F}$ ein affiner Teilraum (→ Definition III.1.0.J) von $\mathbb{R}^n$ parallel zum Unterraum $\mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{F} = \mathbf{y} + \mathcal{U}$ für ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.

(i) Es gibt es einen eindeutigen *Vektor $\mathbf{p} \in \mathcal{F}$, die orthogonale Projektion von $\mathbf{q}$ auf $\mathcal{F}$, so, dass*

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \operatorname{dist}(\mathbf{q}, \mathcal{F}) = \min\{\|\mathbf{q} - \mathbf{w}\| : \mathbf{w} \in \mathcal{F}\} .$$

(ii) $\mathbf{p} \in \mathcal{F}$ ist genau dann *die orthogonale Projektion von $\mathbf{q}$ auf $\mathcal{F}$, wenn $\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = 0$ für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ (d.h. wenn $\mathbf{q} - \mathbf{p} \perp \mathcal{U}$).*

4.3 Orthogonalität

4.3.1 Orthogonale Vektoren

Definition IV.3.1.A (Orthogonale (Mengen von) Vektoren)**.**
Ein endliche Menge von Vektoren $\mathcal{Q} := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *heisst orthogonal, wenn*

$$i, j \in \{1, \dots, k\},\ i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j \rangle = 0 \ .$$

Die Menge $\mathcal{Q}$ *heisst orthonormal, wenn zusätzlich*

$$\left\| \mathbf{q}^j \right\|^2 = \langle \mathbf{q}^j, \mathbf{q}^j \rangle = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.3.1.C (Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Vektoren)**.**
Eine orthogonale Menge von Vektoren $\neq \mathbf{0}$ *ist linear unabhängig (→ III.2.0.B).*

Satz IV.3.1.D ("Satz von Pythagoras")**.**

Für eine orthogonale Menge $\mathcal{Q} := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \mathbf{q}^j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^2 \left\| \mathbf{q}^j \right\|^2 \quad \forall \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R} \, .$$

4.3.2 Orthogonale Komplemente

Definition IV.3.2.B (Orthogonales Komplement)**.**

Sei $\mathcal{U}$ *ein Unterraum (→ Definition III.1.0.C) von* $\mathbb{R}^n$ *der Dimension (→ Definition III.2.0.K)* $k \in \{0, \dots, n\}$.

Das orthogonale Komplement von $\mathcal{U}$ *(in* $\mathbb{R}^n$*) ist die Menge*

$$\mathcal{U}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \, .$$

Korollar IV.3.2.D (Orthogonales Komplement als Unterraum).
Sei $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Dann ist das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ ebenfalls ein Unterraum und hat die Dimension $n-k$.

Satz IV.3.2.F (Komplementeigenschaft von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$).
Für jeden Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\mathbf{0}\} \quad \textit{und} \quad \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = \mathbb{R}^n \ .$$

4.3.3 Orthogonale Matrizen

Definition IV.3.3.B (Orthogonale Matrix).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, heisst orthogonal, wenn $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$.

✎ Notation: $\mathcal{O}(n) \mathrel{\hat{=}}$ Menge der orthogonalen Matrizen $\in \mathbb{R}^{n,n}$

Korollar IV.3.3.D (Produkte und Inverse orthogonaler Matrizen)**.**

$$\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathcal{O}(n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{QP} \in \mathcal{O}(n) \ ,$$
$$\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} \in \mathcal{O}(n) \ .$$

Lemma IV.3.3.F (Längenerhaltung bei Multiplikation mit orthogonaler Matrix)**.**

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(n) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.3.4 Orthogonalisierung

Lemma IV.3.4.A (Orthogonale Projektion mit orthonormalen Basen)**.**
Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k\}$ *eine orthonormale Basis (ONB) des Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$*. Dann ist die* orthogonale Projektion $\mathbf{p}$ *von* $\mathbf{z}$ *auf* $\mathcal{U}$ *(→ Satz IV.2.3.L) gegeben durch*

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{z}, \mathbf{q}^j \rangle \, \mathbf{q}^j \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsalgorithmus:

Gegeben: Endliche Menge von Vektoren $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k \leqslant n$.

```
q^1 := a^1 / ||a^1||        % Erster der orthonormalen Vektoren
for  j = 2, ..., k  do
  {  % Orthogonale Projektion auf das Erzeugnis der bisher berechneten Vektoren
     q^j := a^j
     for  ℓ = 1, 2, ..., j-1  do
        {  q^j ← q^j - <a^j, q^ℓ> q^ℓ  }
     if  ( q^j = 0 )  then  Abbruch
     else  {  q^j ← q^j / ||q^j||  }
  }
```

Ausgabe (wenn kein Abbruch):

Orthonormale Vektoren $\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^k$ mit

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^\ell\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^\ell\} \quad \forall \ell \in \{1, \ldots, k\} \ . \tag{IV.3.4.C}$$

Lemma IV.3.4.D (Abbruch des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsalgorithmus)**.**
Ist $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^\ell\}$, $\ell \leqslant k$, *linear unabhängig, so bricht der Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsalgorithmus frühestens nach dem* $\ell + 1$. *Schritt ab (oder gar nicht).*

Satz IV.3.4.F (QR-Zerlegung einer Matrix)**.**
Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}$ *mit* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = k$ *gibt es*

(i) eine eindeutige *Matrix* $\mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^{n,k}$, *die erfüllt* $\mathbf{Q}_0^\top \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}_k$, *und eine* eindeutige *Matrix* $\mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{k,k}$ *mit* $(\mathbf{R}_0)_{i,j} = 0$ *für* $i > j$ *und* $(\mathbf{R}_0)_{i,i} > 0$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *so, dass*

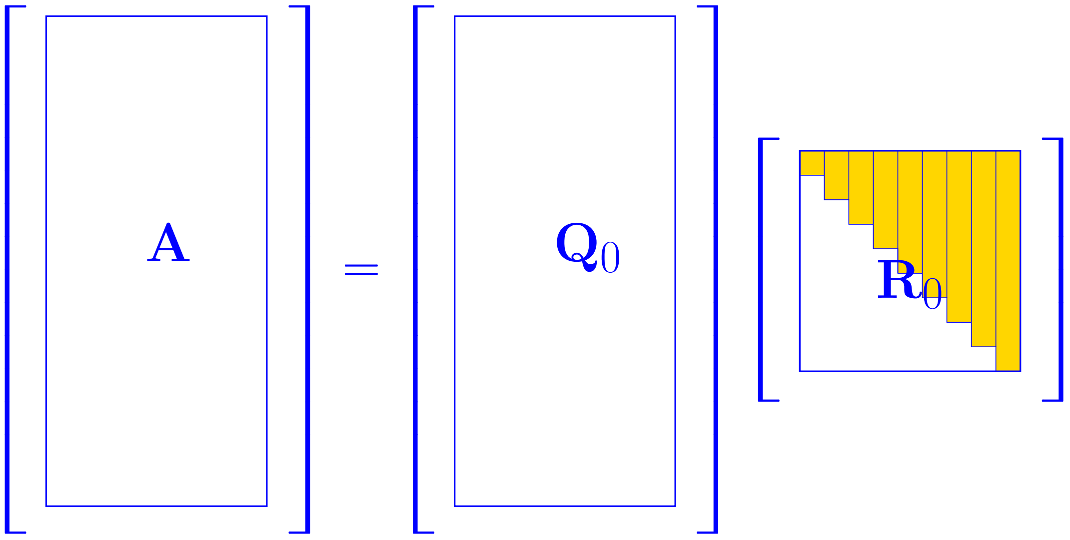
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{R}_0 \qquad \text{(„sparsame" QR-Zerlegung)}\ ,$$

(ii) eine eindeutige *orthogonale Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(n)$ *und eine* eindeutige *Matrix* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,k}$ *mit* $(\mathbf{R})_{i,j} = 0$ *für* $i > j$ *und* $(\mathbf{R})_{i,i} > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *so, dass*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \qquad \text{(volle QR-Zerlegung)}\ .$$

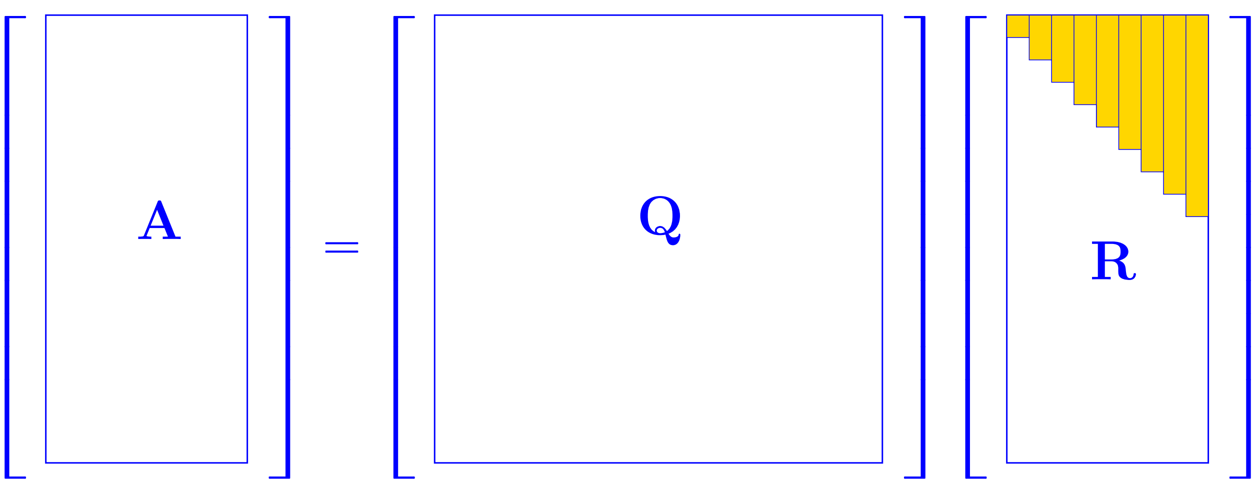
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

„sparsame" QR-Zerlegung: $\mathbf{Q}_0^\top \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}_k$,



$$, \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0 , \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^{n,k} , \\ \mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{k,k} , \end{array} \tag{IV.3.4.H}$$

volle QR-Zerlegung: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$,



$$, \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} , \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n} , \\ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,k} , \end{array} \tag{IV.3.4.J}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.3.5 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

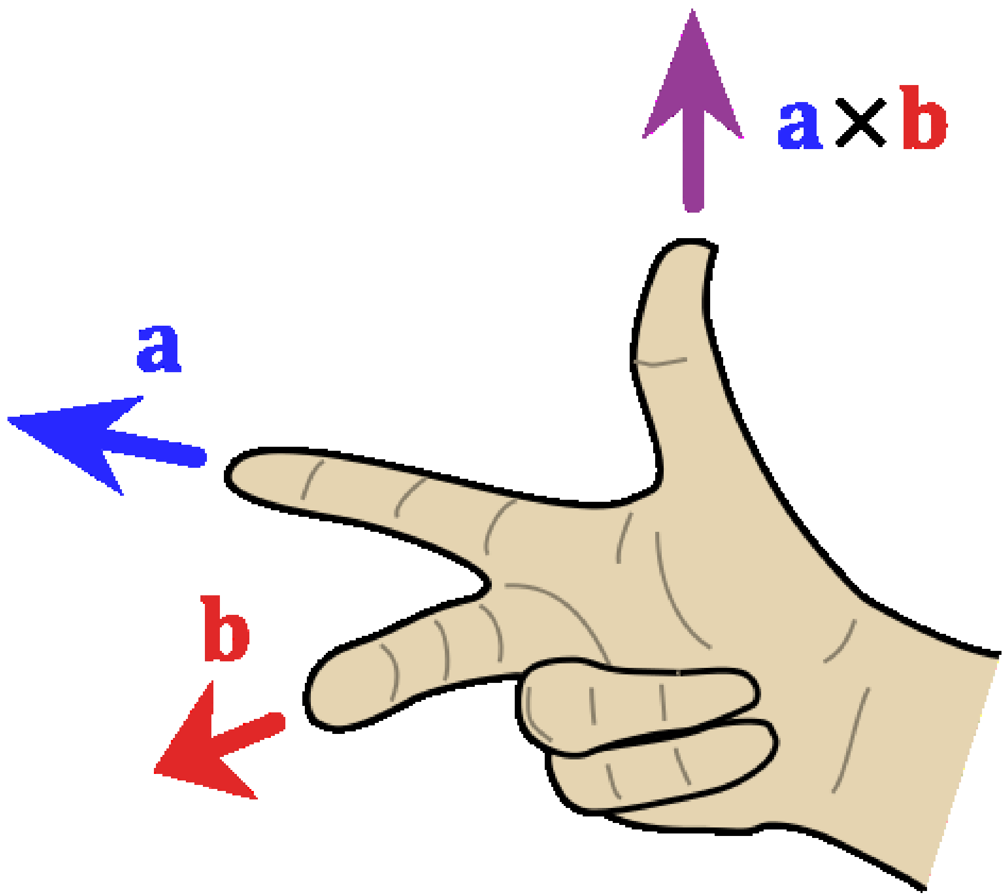
Definition IV.3.5.A (Vektorprodukt)**.**
Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *ist eine Abbildung* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definiert durch*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.3.5.C (Orthogonalität des Vektorprodukts)**.**

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n: \quad \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0 \,. \tag{VP1}$$



◁ „Rechte-Hand-Regel"

Satz IV.3.5.E (Länge des Vektorprodukts)**.**

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \sin \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ . \qquad \text{(VP2)}$$

Satz IV.3.5.G (Rechenregeln für das Vektorprodukt).

Für das Vektorprodukt von Definition IV.3.5.A gelten die Rechenregeln:

(i) (Antikommutativität)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,. \tag{VP3}$$

(ii) (Linearität im ersten Argument)

$$(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,. \tag{VP4}$$

(iii) (Linearität im zweiten Argument)

$$\mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,. \tag{VP5}$$

(iv) (Dreifaches Vektorprodukt)

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \right\rangle - \mathbf{w}\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle \,. \tag{VP6}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.4 Lineare Ausgleichsrechnung

4.4.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme: Beispiele

LINK zu Präsentationsfolien für Abschnitt 4.4.1.

Korollar IV.4.1.A (Existenz von Lösungen überbestimmter lienearer Gleichungssysteme)**.**
Eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *existiert* genau dann, *wenn* $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

4.4.2 Kleinste-Quadrate Lösung

Definition IV.4.2.B (Kleinste-Quadrate-Lösung)**.**
$\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *heisst Kleinste-Quadrate-Lösung (KQL) von* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, *wenn gilt*

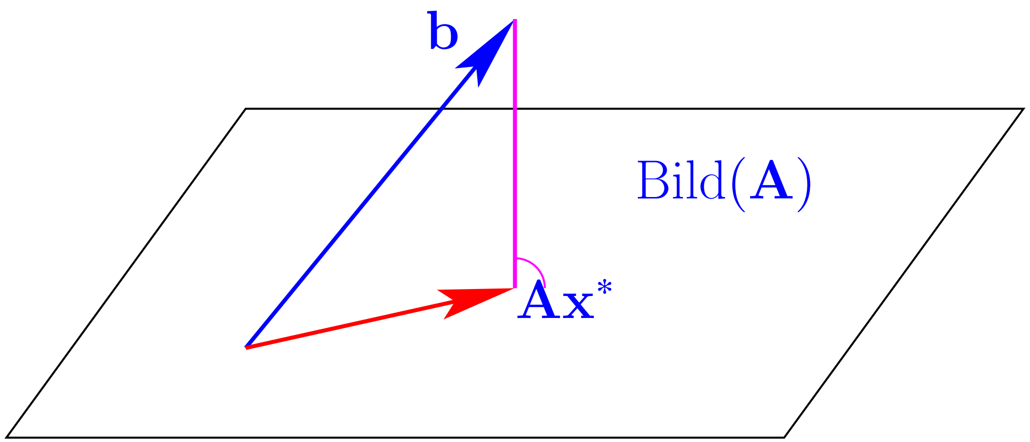
$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\| = \min\{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \tag{IV.4.2.C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} (\mathbf{x}^*)_j \right)^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} x_j \right)^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} ,$$

d.h. die kleinste-Quadrate-Lösung realisiert ein Residuum $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ *mit minimaler Norm.*

4.4.3 Normalengleichungen



Geometrische Perspektive:

$\mathbf{A}\mathbf{x}^*$ ist zu $\mathbf{b}$ nächster Punkt $\in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A}\mathbf{x}^* \;\hat{=}\;$ Orthogonale Projektion of $\mathbf{b}$ auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ [Satz IV.2.3.L].

Satz IV.4.3.B (Normalengleichungen)**.**
Jede Kleinste-Quadrate-Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, erfüllt die Normalengleichungen (NGL)

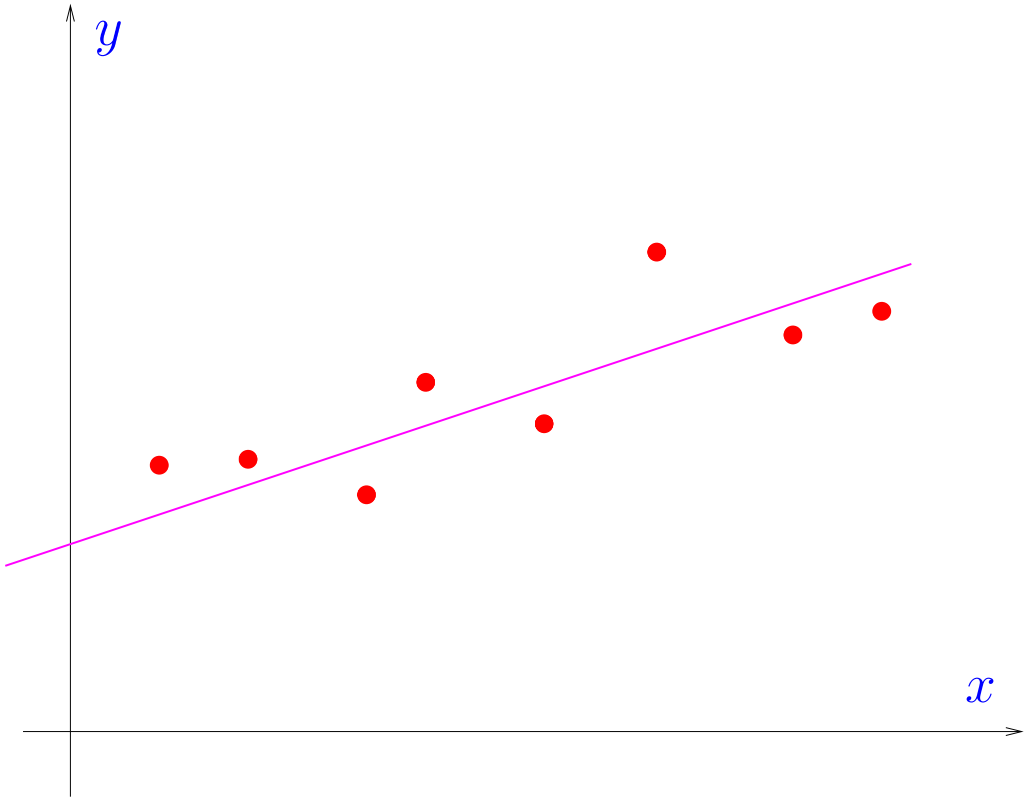
$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \,.$$

Beispiel IV.4.3.D (Lineare Regression)*.*

Gegeben: m Datenpunkte (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, m$

Gesucht: „Möglichst gut passende $(*)$" Gerade durch die Datenpunkte

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Gerade: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$(*)$: α, β so, dass

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha x_j + \beta - y_j)^2 \quad \text{minimal.}$$

Korollar IV.4.3.F (Lösbarkeit der Normalengleichungen, vgl. Lemma IV.2.3.K)**.**
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \ .$$

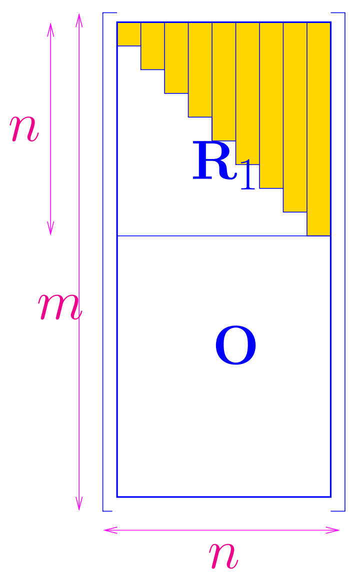
Ist insbesondere $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*, dann ist* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *invertierbar.*

4.4.4 Orthogonalisierungstechniken

QR-Zerlegung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (→ Satz IV.3.4.F): $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$ orthogonal, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($n < m$, $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$)

▶ $$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{Rx} - \mathbf{c}\| \;, \quad \mathbf{c} := \mathbf{Q}^\top \mathbf{b} \;.$$

$\mathbf{Rx} - \mathbf{c} \longleftrightarrow$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \hline c_{n+1} \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \hline -c_{n+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{bmatrix} \;, \quad \mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ invertierbar} \;.$$

▶ Die Wahl von $\mathbf{x}$ kann die letzten $m - n$ Komponenten von $\mathbf{Rx} - \mathbf{c}$ nicht beeinflussen, kann jedoch so getroffen werden, dass die ersten n Komponenten zu Null werden.

Ein solches $\mathbf{x}$ minimiert dann $\|\mathbf{Rx} - \mathbf{c}\|$ und ist gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{R}_1^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$!

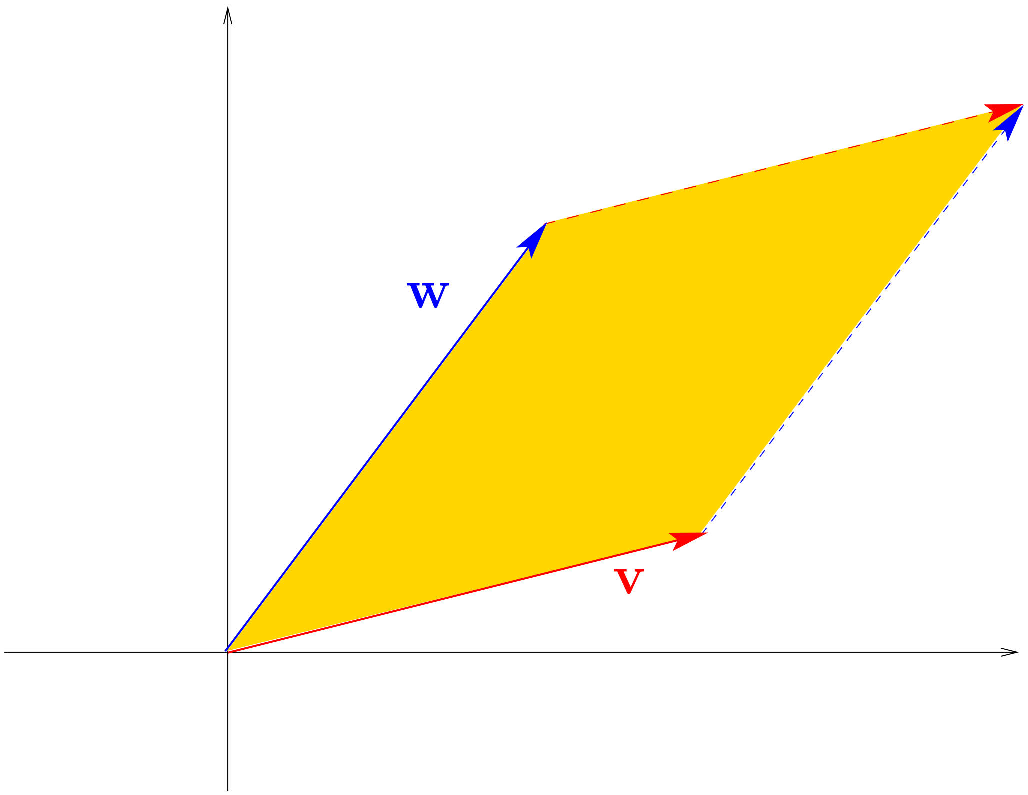
Satz IV.4.4.B (Kleinste-Quadrate-Lösung durch QR-Zerlegung)**.**

Sei $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *die (volle) QR-Zerlegung von* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Satz IV.3.4.F, mit* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*, wobei* $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \hline \mathbf{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *mit* $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ *und* $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \; \mathbf{Q}_2]$*,* $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$*.*

Dann ist die kleinste-Quadrate-Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*, gegeben durch* $\mathbf{x}^* = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^\top\mathbf{b}$*.*

4.5 Volumenformen und Determinanten

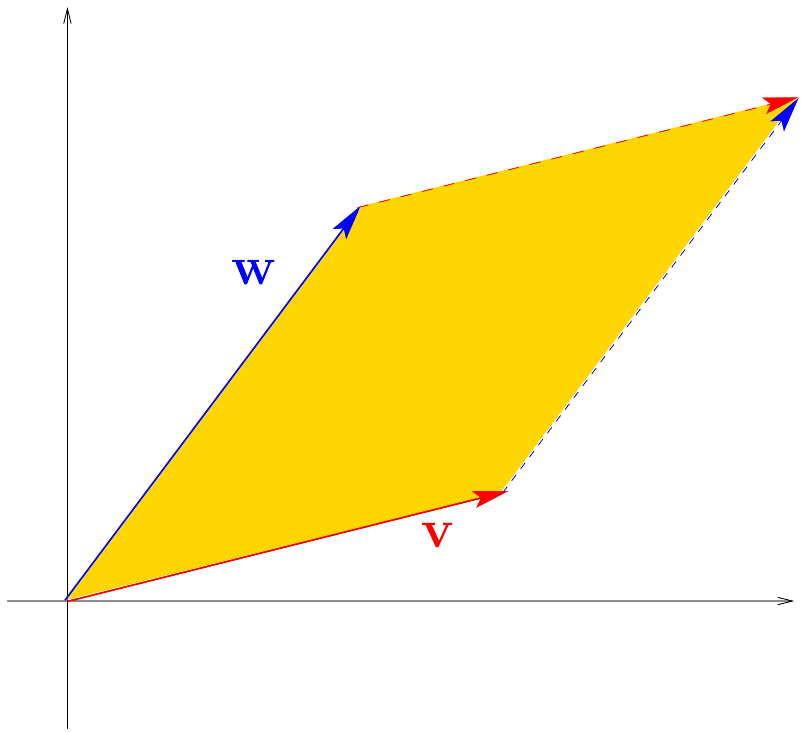
4.5.1 Volumen

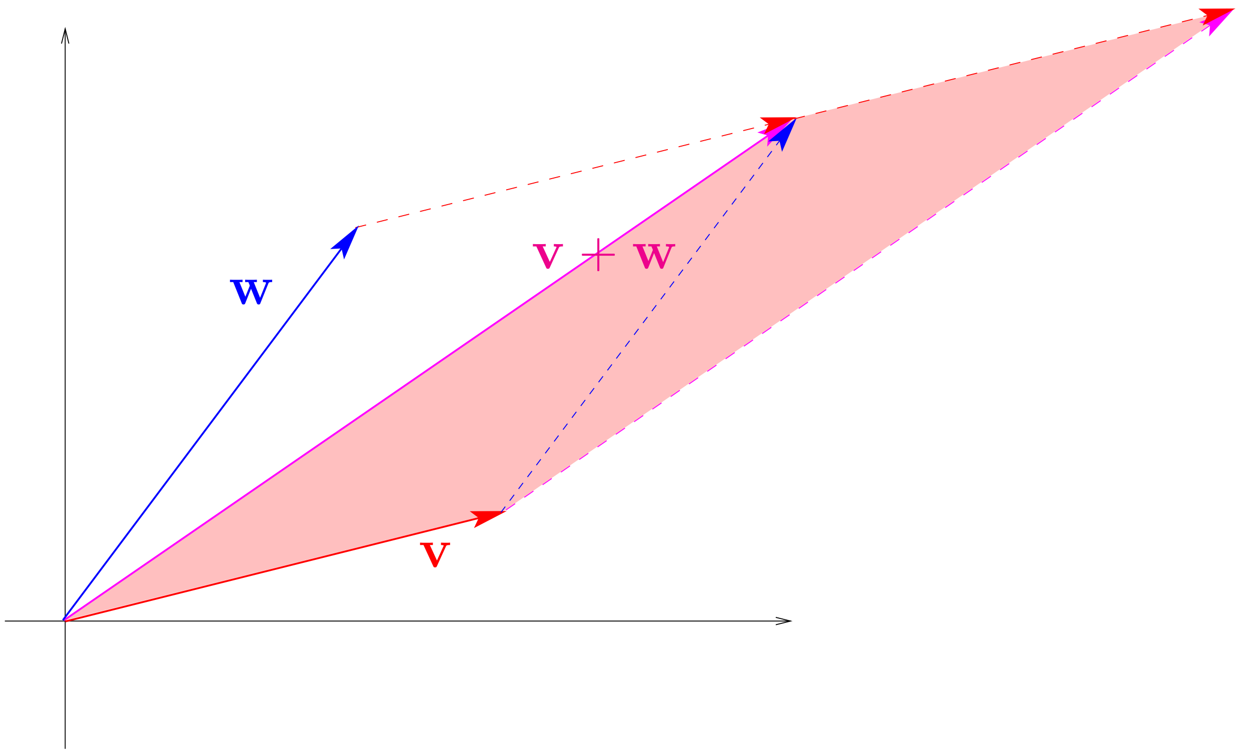


$\triangleleft$ Von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ aufgespanntes Parallelogramm.

$$⫽(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

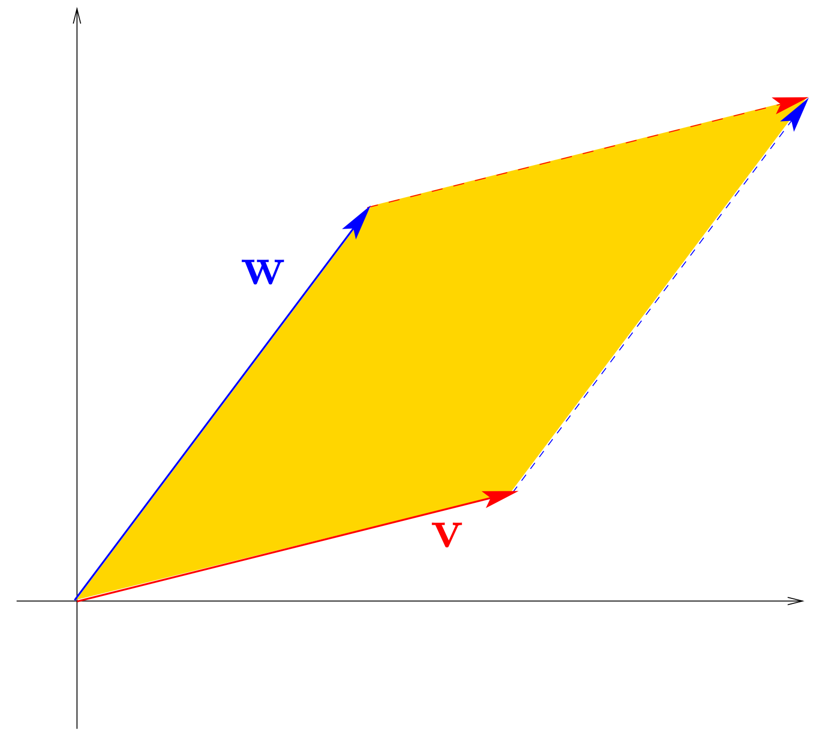
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

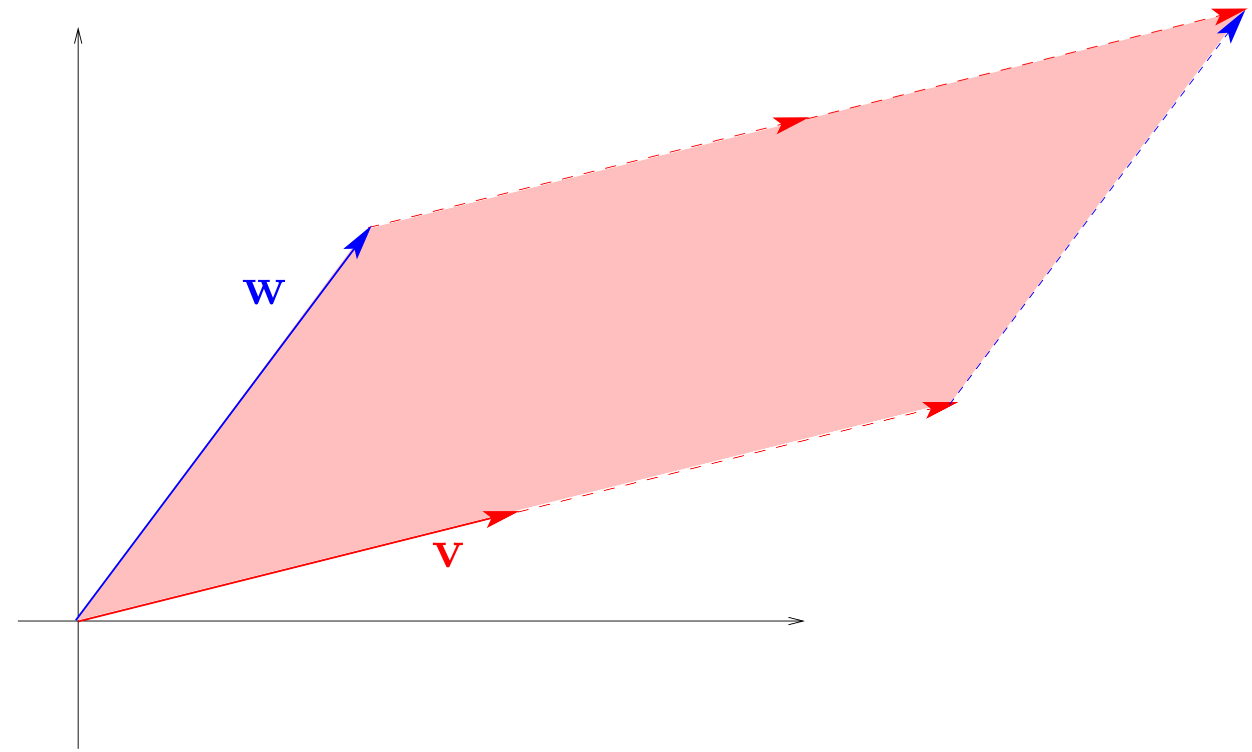




Gleiche Flächen!

R. Hiptmair
SAM, ETHZ





Doppelte Fläche!

Eigenschaften des Flächenmasses (= 2-dimensionales Volumen)

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right) &= 1\ , \\ \mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \mathrm{vol}(\mathbf{w},\mathbf{v})\ , \\ \mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \mathrm{vol}(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w})\ , \\ \mathrm{vol}(\alpha\mathbf{v},\mathbf{w}) &= |\alpha|\,\mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \end{aligned} \qquad \forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}\ . \tag{IV.5.1.V}$$

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$$ linear unabhängig

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Allgemein in $\mathbb{R}^n$:

Begriff IV.5.1.A (Volumen)**.**
Ein sinnvolles Volumen (eines Parallelepipeds) in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung (Funktion),

$$\mathrm{vol} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Vektoren}} \to \mathbb{R}_0^+ \,,$$

die erfüllen muss

(i) $\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$ *($\mathbf{e}_\ell \,\hat{=}\, l$. Einheitsvektor)*

(ii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j + \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq j$,

(iii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \alpha \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n) = |\alpha| \,\mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

4.5.2 Determinanten

Definition IV.5.2.A (Determinantenform)**.**
Eine Determinantenform auf $\mathbb{R}^n$ *ist eine (multilineare) Abbildung*

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Mal}} \to \mathbb{R} \ ,$$

(d.h. $\det$ *nimmt* n *verschiedene Spaltenvektoren als Argumente) für die gilt*

(i) $\det \neq 0$, *das heisst es gibt Vektoren* $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ *so, dass* $\det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n) \neq 0$.

(ii) $\det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^n) = \det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^n) + \det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$

(iii) $\det(\mathbf{v}^1, \dots, \alpha \cdot \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^n) = \alpha \cdot \det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$,

(iv) $\det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^k, \dots, \mathbf{v}^n) = \det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j + \mathbf{v}^k, \dots, \mathbf{v}^k, \dots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$,

Zu (i) sagt man „$\det$ ist nichttrivial"

Zu (ii), (iii) sagt man „$\det$ ist linear in jedem Argument" oder „multilinear"

Korollar IV.5.2.X (Linearität der Determinante in jedem Argument).

Eine Determinante auf $\mathbb{R}^n$ *erfüllt für jedes* $k \in \{1,\dots,n\}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\sum_{\ell=1}^{m}\gamma_\ell\mathbf{v}^\ell,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n) = \sum_{\ell=1}^{m}\gamma_\ell \det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{v}^\ell,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)\;,$$

für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^n,\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$ *und* $\gamma_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$

Satz IV.5.2.B (Invarianzeigenschaft von Determinanten).

Eine Determinante auf $\mathbb{R}^n$ *erfüllt für jedes* $k,i \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq k$,

$$\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k+\alpha\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n) = \det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)$$

für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^n \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar IV.5.2.C.

Beim Vertauschen zweier *Argumente einer Determinante wechselt deren Vorzeichen.*

Für uns das wichtigste Resultat: Determinanten als “Sonden für lineare Abhängigkeit”

Satz IV.5.2.D (Determinante linear abhängiger Vektoren)**.**
Für beliebige Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\} \quad \textit{linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n) \neq 0 \; .$$

4.5.3 Determinantenformeln

Satz IV.5.3.E (Eindeutigkeit der Determinante)**.**
Ist $\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^n$*, so ist eine Determinante* $\det$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *bereits* eindeutig *durch den Wert* $\det(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n)$ *festgelegt.*

Definition IV.5.3.F ((Standard)determinante im $\mathbb{R}^n$)**.**
Die *(Standard-)Determinante auf* $\mathbb{R}^n$ *ist die Determinante mit*

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \\ \\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)=1\ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

▶ Volumen des von $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n\in\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{vol}(\,/\!\!/(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n)) := \left|\det(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n)\right|\ .$$

Definition IV.5.3.G (Determinante einer quadratischen Matrix)**.**
Die *Determinante einer Matrix* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$*, in Zeichen* $\det(\mathbf{A})$*, ist die Determinante ihrer Spalten, aufgefasst als Vektoren im* $\mathbb{R}^n$*.*

Formel für $\mathbf{A} = [\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n] \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\mathbf{a}^j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathbf{e}_i \;, \quad a_{i,j} := (\mathbf{A})_{i,j} \;, \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \;.$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{a}^1,\dots,\mathbf{a}^n) \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\mathbf{e}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\mathbf{e}_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \det(a_{i_1,1}\mathbf{e}_{i_1},\dots,a_{i_n,n}\mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1}\cdot\cdots\cdot a_{i_n,n}\; \det(\mathbf{e}_{i_1},\dots,\mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1}\cdot\cdots\cdot a_{i_n,n}\; \underbrace{\sigma(i_1,\dots,i_n)}_{\in\{-1,0,+1\}}\; \underbrace{\det(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)}_{=1} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \underbrace{a_{i_1,1}\cdot\cdots\cdot a_{i_n,n}}_{n\text{-faches Produkt}}\; \sigma(i_1,\dots,i_n)
\end{aligned}$$

- $n = 2$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}\right) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2} \;.$$

- $n = 3$ (Regel vom Sarrus)

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}\right)$$
$$= a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} \;.$$

Determinante von Blockstufenmatrizen:

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right]\right) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{C}) \;, \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k,k},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,m}, \\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,m},\ \mathbf{O} \mathrel{\hat{=}} \text{Nullmatrix} \;. \end{array} \tag{IV.5.3.L}$$

Lemma IV.5.3.H (Determinante der transponierten Matrix)**.**
Für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt:*

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.5.3.I (Determinante als Sonde für Invertierbarkeit)**.**

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ist* genau dann invertierbar*, wenn* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$*.*

4.5.4 Determinante und Matrixprodukt

Satz IV.5.4.J (Determinantenmultiplikationssatz)**.**

Für beliebige Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Bemerkung IV.5.4.K (Algorithmus zur Berechnung von Determinanten).

Determinantenberechnung mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$,
siehe Unterabschnitt 4.3.4

❶ Falls Abbruch $\Rightarrow$ Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = 0$

❷ Sonst QR-Zerlegung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (→ Satz IV.3.4.F)

$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal , $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ obere Dreiecksmatrix.

$$\blacktriangleright \quad \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{R}) = \pm(\mathbf{R})_{1,1} \cdot \cdots \cdot (\mathbf{R})_{n,n} \; .$$

$\triangle$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Clickerfragen

Clickerfrage 4.5.1 (Orthogonalität).

Für die folgenden Aussagen ist jeweils zu entscheiden, ob Sie wahr oder falsch sind:

(i) Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) + \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$

(ii) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

(iii) Für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) + \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

(iv) Für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{O} \; .$$

(v) Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\left(\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) \; .$$

(vi) Für jede Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist das orthogonale Komplement

$$\mathcal{M}^{\perp} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle = 0 \; \forall \mathbf{m} \in \mathcal{M}\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Clickerfrage 4.5.2 (Eigenschaften der Flächenfunktion).

Es bezeichne $\mathrm{vol} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{R}_0^+ := \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \geqslant 0\}$) die Funktion, die zwei Vektoren die *Fläche* des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet.

Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$?

(i) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{vol}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(ii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2$

(iii) $\mathrm{vol}(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha\,\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(iv) $\mathrm{vol}(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(v) $\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ ($\mathbf{e}_i \,\hat{=}\, i$. Einheitsvektor)

(vi) $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

Clickerfrage 4.5.3 (Determinante von Einheitsvektoren).

Es bezeichnet $\det$ die Standardeterminante in $\mathbb{R}^n$, und $\mathbf{e}_i$ den i. Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$.

Welchen Wert hat

$$\det(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \ ?$$

(i) 1, wenn n gerade, sonst -1

(ii) 1 in jedem Fall

(iii)

$$\begin{cases} 1 & \text{, wenn } n \text{ durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ gerade, aber nicht durch } 4 \text{ teilbar,} \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ gerade,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ und } (n-1)/2 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

(iv)

$$\begin{cases} 1 & \text{, wenn } n \text{ durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ gerade, aber nicht durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ gerade,} \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Clickerfrage 4.5.4 (Determinante der zweifachen Matrix).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Welche Aussage ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig?

(i) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

(ii) $\det(2\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$

(iii) $\det(2\mathbf{A}) = 2^n \det(\mathbf{A})$

(iv) $\det(2\mathbf{A}) = (-1)^n 2^n \det(\mathbf{A})$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5 Numerische lineare Algebra mit MATLAB

LINK zu MATLAB-Codes, die für die Vorlesung verwendet wurden.

5.1 MATLAB: Grundlagen

MATLAB-Kenntnisse werden aus der Informatikvorlesung von M. Hirt bekannt *vorausgesetzt*, siehe Vorlesungsunterlagen Informatik I. Bei Unklarheiten bieten die MATLAB-Hilfe-Funktionen

- `help` <Funktionsname>
- `doc` <Funktionsname>

detaillierte und umfassende Informationen.

5.1.1 Operationen mit Vektoren und Matrizen in MATLAB

In MATLAB (wie in der Vorlesung): Alles is Matrix !

Listing 5.1: (buildmat.m) Erzeugen von Matrizen in MATLAB

```
% Demonstration: Initialization and creation of matrices (and vectors) in MATLAB
u = [1,2,3], % row vector; comma is optional and may be replaced with a blank
v = [4;5;6], % column vector: ';' starts a new row
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9], % Initializing a matrix rowwise
B = [[0;1;2],[2;1;0],[0;2;1]], % Initializing a matrix columnwise
alpha = -1; C = [A,v;u,alpha], % Matrix assembly kit, Matrixbaukasten"

% Special initialization functions
Z = zeros(2,3), % Zero matrix O
I = eye(3), % Identity matrix I_3
E = ones(3,2), % Matrix all filled with 1
R = rand(2,2), % Matrix with random entries, uniformly distributed in [0,1]
```


Listing 5.2: (accessmatcomp.m) Zugriff auf Matrixdaten in MATLAB

```
% Demonstration: Access of matrix components in MATLAB
% Initialization of a real matrix. There are many special commands in MATLAB for creating special matrices. Please refer to the MATLAB documentation for details.
A = magic(5), % comma at the end of line: output result of assignment
```

```
% size: requesting number of rows and columns of a matrix
[m,n] = size(A);
% Access to individual entries of a matrix, end references maximal possible
  value of index
A(2,1), A(floor(m/2),n-1), A(1,end),
% Access to submatrices through index ranges
A(2:4,1:3)
% Most general access through index (row or column) vectors; submatrix
  selection is a special case!
A([1,3,4],[2,5]),

% All these ways to access matrix entries can also be used for assignments!
A(2,1) = -1; disp(A); % Setting a single matrix entry to a new value
A(2:2:end,[2,5]) = [-1,-2;-3,-4]; disp(A); % Replacing a submatrix
A([2,3],:) = A([3,2],:); disp(A); % Swap two rows

% Special acess functions; cannot be used for assignments!
D = diag(A), % extract (generalized) diagonal of matrix as a column vector
L = tril(A), % obtain (generalized) lower triangular part
U = triu(A), % acess (generalized) upper triangular part
```

Listing 5.3: (vecop.m) Vektoroperationen in MATLAB

```
% MATLAB script: vector operations in MATLAB
v = [1;2;3;4;5], % Initialize a column vector with five components
alpha = 0.5; alpha*v, % Scalar multiplication
w = [v(1:2:end);-v(2:2:end)], % Build another vector from v.
```

```
u = v + w; % Addition of vectors
z = alpha*v + (1-alpha)*w, % Scalar multiplication and vector addition

% Many MALAB functions can be applied to a vector and the result is the
% vector, whose components give the function evaluated for the components
% of the input vector
s = arrayfun(@(x) sin(x),v), % Compute [sin(1);sin(2);...;sin(5)]
s = sin(v), % the same for elementary mathematical functions
m = abs(w), % take the modulus of each component

sp = dot(v,w), % Scalar product
cp = cross([1;2;3],[4;5;6]); % vector product = cross product
dot(cp,[1;2;3]), dot(cp,[4;5;6]),

% Componentwise operations, preceded by a dot:
p = v.*w, % p(k) = v(k)*w(k)
p = v./w, % p(k) = v(k)/w(k)
p = v.^w, % p(k) = v(k)^w(k): taking the power (ger.: Potenz)

% Special functions that operate on vectors
mx = max(w) % Maximum of components
mn = min(w) % Minimum of components
```

Kenntnisse über die Definition und den Aufruf von Funktionen in MATLAB sind in der Vorlesung „Informatik I” von M. Hirt vermittelt worden, siehe Vorlesungsunterlagen Informatik I.

Listing 5.4: (gramschmidt.m) Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, siehe Unterabschnitt 4.3.4

```
function Q = gramschmidt(A)
% Gram-Schmidt orthogonalization of column vectors
% Arguments: Matrix A passes vectors in its columns
% Return values: Matrix Q contains the orthornormal basis in its columns
[n,k] = size(A); % Get number k of vectors and dimension n of space
Q = A(:,1)/norm(A(:,1)); % First basis vector
for j=2:k
  q = A(:,j) - Q*(Q'*A(:,j)); % Orthogonal projection; loop-free
    implementation
  nq = norm(q);                   % Check premature termination
  if (nq < (1E-9)*norm(A(:,j))), break; end % Safe check for == 0
  Q = [Q,q/nq]; % Add new basis vector as another column of Q
end
```


5.1.2 Visualisierung in MATLAB

MATLAB bietet eine grosse Palette von Visualisierungsfunktionen, mit denen man ansprechende 2D und 3D Grafiken und Plots erzeugen kann:

plot, loglog, plot3, surf, mesh, ...

Die Verwendung dieser Routinen wird in der MATLAB-Hilfe erklärt.

Listing 5.5: (visvecs.m) Plots/Liniengrafik in MATLAB

```
% MATLAB script: demonstration plot() functions

% Plots in 2D
figure;
% Plot a point in 2D, marker is a red plus sign
x = 0.5; y = 0.7; plot(x,y,'r+');
axis([-1 1 -1 1]); % Set axis
hold on; % Use the same coordinate system for following plot commands
% Plot a number of points
vx = [1;2;3;4;5]/10; wy = vx.^2; plot(vx,wy,'m*');
% Plot a blue closed polygon
N = 10;
x = []; y = []; z = []; % Initialize empty vectors
for i=1:N
  x = [x;cos((i-1)/N*2*pi)]; y = [y;sin((i-1)/N*2*pi)]; z = [z;i/N];
end
X = 0.5*[x;x(1)]; Y = 0.5*[y;y(1)]; % Ensure that polygon is closed
plot(X,Y,'b-');
```

```
pause; % Wait for a key being pressed

% Plot vector arrows
quiver(vx(1:end-1),wy(1:end-1),...
         vx(2:end)-vx(1:end-1),wy(2:end)-wy(1:end-1),'r');

pause; % Wait for a key being pressed

% Plots in 3D: a red spiral
figure; plot3(x,y,z,'r-*');
```


5.2 Rundungsfehler

Bemerkung V.2.0.A (QR-Zerlegung/Gram-Schmidt in MATLAB).

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung ↔ Berechnung der QR-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (→ Satz IV.3.4.F) in MATLAB

`[Q,R] = qr(A)` (volle QR-Zerlegung, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$)

`[Q,R] = qr(A,0)` („sparsame" QR-Zerlegung, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geqslant n$)

Listing 5.6: (gsroundoff.m) Verlust an Orthgonalität bei Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, siehe Listing 5.4

```
% MATLAB script demonstrating the effect of roundoff on the result of
  Gram-Schmidt orthogonalization
format short; % Print only a few digits in outputs
% Create special matrix the so-called Hilbert matrix: (A)_{i,j} = (i+j-1)^{-1}
A = hilb(10), pause;          % 10x10 Hilbert matrix
Q = gramschmidt(A); % Gram-Schmidt orthogonalization of columns of A
% Test orthonormality of column of Q, which should be an orthogonal matrix
  according to theory
I = Q'*Q, pause; % Should be the unit matrix, but isn't !

% MATLAB's internal Gram-Schmidt orthogonalization
[Q1,R1] = qr(A), pause;
D = A - Q1*R1,  pause; % Check whether we get the expected result
I1 = Q1'*Q1, pause;    % Test orthonormality
```

Listing 5.7: Eingabefehler und Rundungsfehler

```
>> format long;
>> a = 4/3; b = a-1; c = 3*b; e = 1-c
e = 2.220446049250313e-16
>> a = 1012/113; b = a-9; c = 113*b; e = 5+c
e = 6.750155989720952e-14
>> a = 83810206/6789; b = a-12345; c = 6789*b; e = c-1
e = -1.607986632734537e-09
>> s = sin(10^16*pi)
s = -0.375212890012334
```

Computer rechnen intern nicht in $\mathbb{R}$, sondern mit endlich vielen Maschinenzahlen

Unvermeidlich: Rundungsfehler bei '+', '-', '*', '/' und Funktionen

Gefahr: Verstärkung der kleinen relativen Fehler (Grössenordnung 10^{-16}) bei '+', '-', '*', '/' !

Beispiel V.2.0.R (Rundungsfehler bei Schnittpunktberechnung).

Listing 5.8: (intersection.m) Fehlerhafte Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden im Raum

```
function x = intersection(p1,d1,p2,d2)
% MATLAB function purporting to compute the intersection of two lines in 3D
% p1,d1 (p2,d2) pass a point and the direction vector of first (second) line
% returns the empty matrix in case the lines do not have a common point
% BEWARE: this is a FLAWED implementation
b = p2-p1; A = [d1,-d2]; xi = A\b; % Solve least squares problem
if (norm(b-A*xi) ~= 0), % A numerical crime !
  x = [];
  disp('No intersection!');
else
  x = p1+xi(1)*d1; % compute intersection point
end
```


R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Listing 5.9: (interstbisectors.m) Berechnung des Inkreismittelpunktes eines Raumdreiecks

```
% MATLAB script for computing the intersection of the angular bisectors of
% a triangle in space
T = [1 2 3;1 0 1;4 5 6]; % vertex coordinates in columns of 3x3 matrix
% Compute angular bisectors (directions in d1 and d2)
p1 = T(:,1); e12 = T(:,2)-T(:,1); e13 = T(:,3)-T(:,1);
d1 = e12/norm(e12)+e13/norm(e13);
p2 = T(:,2); e21 = T(:,1)-T(:,2); e23 = T(:,3)-T(:,2);
d2 = e21/norm(e21)+e23/norm(e23);
% Computer intersection (center of incircle of triangle)
x = intersection(p1,d1,p2,d2),
```

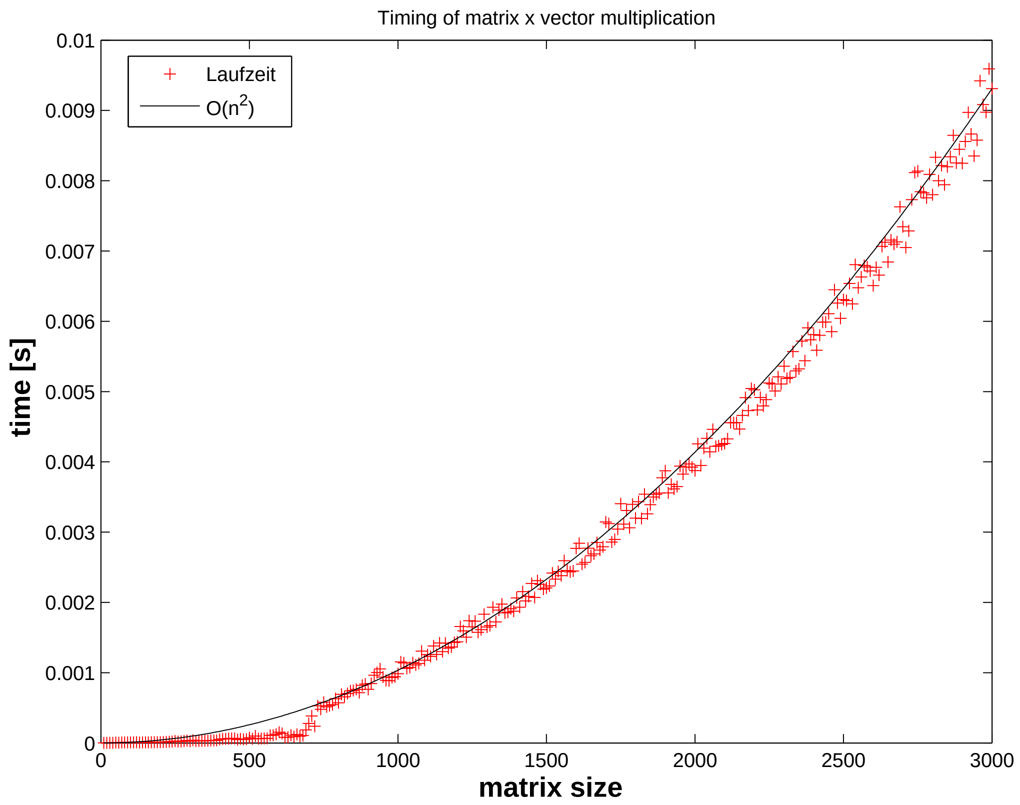
◇

5.3 Rechenaufwand

Listing 5.10: (matvectiming.m) Rechenzeitmessung für Matrix×Vektor

```
% Timing of matrix×vector operation for dense matrices
N = 3000; % maximum size of matrix
B = rand(N,N); % initialize random matrix
v = rand(N,1); % initialize random column vector

res = []; % matrix for collecting the results
for n=10:10:N
    A = B(1:n,1:n); % extract submatrix
    x = v(1:n);
    t = realmax;
    for j=1:3, tic; z = A*x; t = min(toc,t); end
    res = [res; n, t];
end

figure; plot(res(:,1),res(:,2),'r+',...
    res(:,1),res(:,1).^2/(res(end,1)^2)*res(end,2),'k-');
xlabel('{\bf matrix size}','fontsize',14);
ylabel('{\bf time [s]}','fontsize',14);
title('Timing of matrix x vector multiplication');
legend('Laufzeit','O(n^2)','location','best');

```

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



◁ Rechenzeit für Matrix×Vektor-Multiplikation, Listing 5.10

Mac OS X 10.6, MATLAB R2012a, Intel Core i7, 2.66 GHz,

Listing 5.11: (matmul.m) Matrix×Vektor-Multiplikation: Demoimplementierung mit Schleifen

```
function z = matmul(A,x)
% loop based matrix-vector multiplication, equivalent to *
[m,n] = size(A);
z = zeros(m,1);
for i=1:m
  for j=1:n, z(i) = z(i) + A(i,j)*x(j); end
end
```

Definition V.3.0.B (Rechenaufwand/Kosten einer Funktion).
Der Rechenaufwand für die Ausführung einer numerischen Funktion ist die Anzahl der elementaren Rechenoperationen '+', '-', '', '/' zuzüglich der Anzahl der Auswertungen von Grundfunktionen wie* **sqrt**, **exp**, **cos**, **sin**, *etc., die während der Auswertung der Funktion ausgeführt werden.*

Definition V.3.0.D ((Polynomialer) asymptotischer Rechenaufwand).
Eine numerische Funktion hat asymptotischen Rechenaufwand oder Komplexität $O(n^q)$, $q > 0$, *im Problemgrösenparameter* $n \to \infty$ ($n \in \mathbb{N}$), *falls es zwei Konstanten* $0 < \underline{C} \leqslant \overline{C} < \infty$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *so gibt, dass*

$$\underline{C} n^q \leqslant W(n) \leqslant \overline{C} n^q \quad \forall n \geqslant n_0 ,$$

wobei $W(n)$ *der Rechenaufwand der Funktion für ein Problem der Grösse* n *ist.*

Terminologie: Asymptotischer Rechenaufwand $O(n)$ lineare Komplexität
$O(n^2)$ quadratische Komplexität
$O(n^3)$ kubische Komplexität

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

▶ Asymptotischer Rechenaufwand für Matrix$\times$Vektor $= O(n^2)$

(Hier: Problemgrössenparameter n = Vektorlänge)

Listing 5.12: (mlmatprod.m) Matrixprodukt mit MATLABs $*$

```
function C = mlmatprod(A,B)
% Standard matrix product in MATLAB
    C = A*B;
end
```

Listing 5.13: (loopmatprod.m) Direkte Implementierung des Matrixprodukts mit Schleifen

```
function C = loopmatprod(A,B)
% Nested loop implementation of matrix multiplication
  [n,k] = size(A); % A is an n×k-matrix
  [kb,m] = size(B); % B is an k×m-matrix
  if (k ~= kb), error('Mismatch of matrix dimensions'); end
  C = zeros(n,m);
  for i=1:n
     for j=1:m
         C(i,j) = 0;
         for l=1:k
             C(i,j) = C(i,j)+ A(i,l)*B(l,j);
         end
     end
  end
end
```

Listing 5.14: (dotmatprod.m) Matrixprodukt mit Schleifen und Innenprodukt

```
function C = dotmatprod(A,B)
% Direct computation of entries of C by forming scalar products of columns
% of B and rows of A.
  [n,k] = size(A); % A is an n × k-matrix
  [kb,m] = size(B); % B is an k × m-matrix
  if (k ~= kb), error('Mismatch of matrix dimensions'); end
  C = zeros(n,m);
  for i=1:n
    for j=1:m
        C(i,j) = dot(A(i,:),B(:,j)); % Note: access to rows and columns through
                                      % range operator :
    end
  end
end
```


$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,k} \quad \blacktriangleright \quad \text{Rechenaufwand}(\texttt{A*B}) = O(mnk)$$

Speziell: $$\mathbf{A}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \blacktriangleright \quad \text{Rechenaufwand}(\texttt{A*B}) = O(n^3)$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

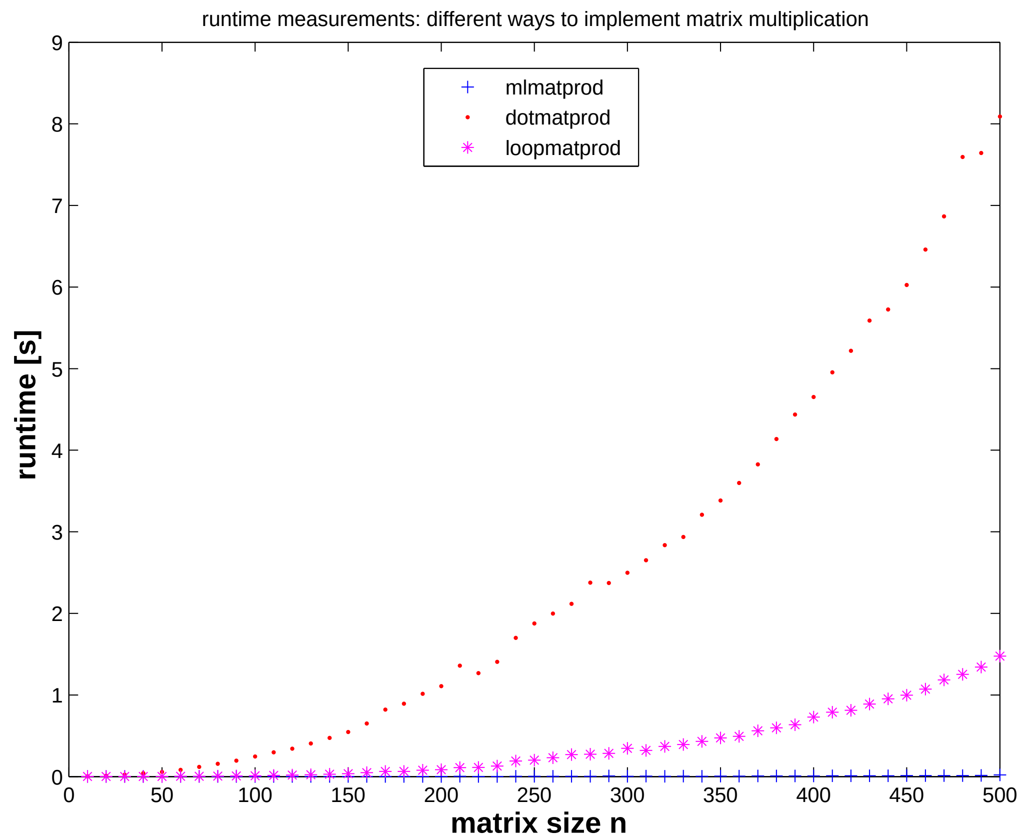
Listing 5.15: (matprodtiming.m) Verschieden effiziente Implementierungen des Matrixprodukts

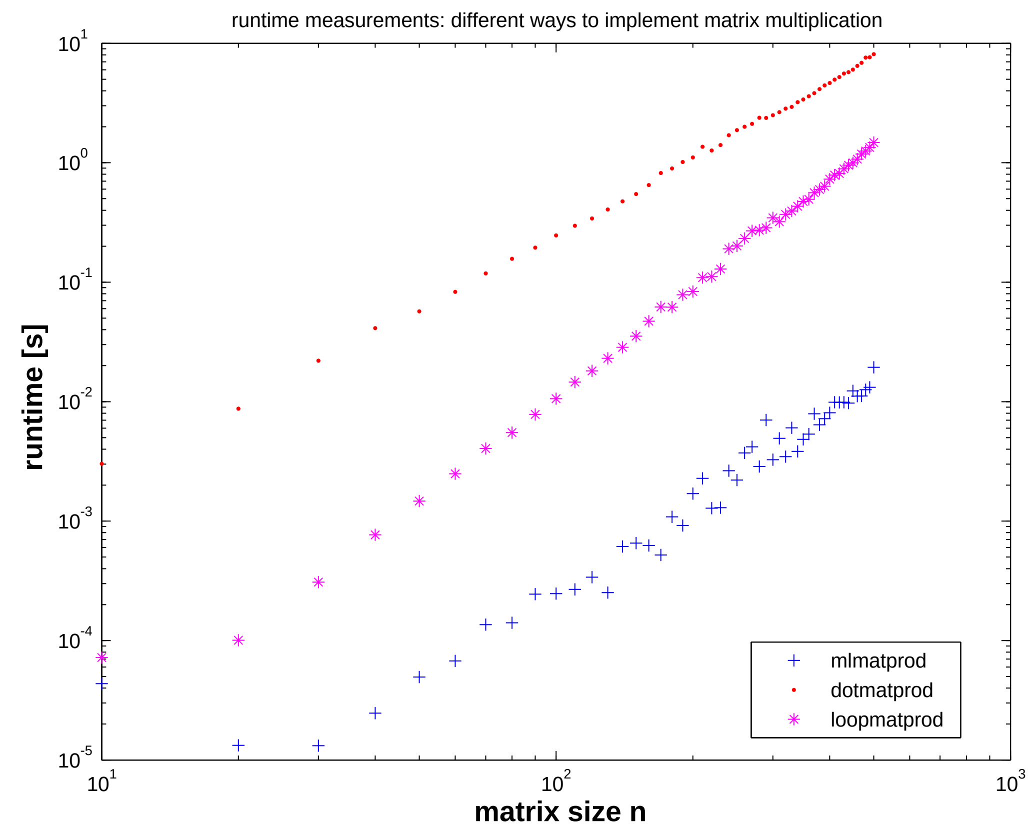
```
% Measurement of runtimes for different implementations of matrix products
```

```
N = 500;
A = rand(N,N); B = rand(N,N); % Initialize random matrices

res = [];
% When measuring runtimes, take the minimum over several runs, because other
  jobs running at the same time may delay execution
for n=10:10:N
    An = A(1:n,1:n); Bn = B(1:n,1:n);
    t1 = realmax; for j=1:3, tic; C1 = mlmatprod(An,Bn); t1 =
      min(toc,t1); end
    t2 = realmax; for j=1:3, tic; C2 = dotmatprod(An,Bn); t2 =
      min(toc,t2); end
    t3 = realmax; for j=1:3, tic; C3 = loopmatprod(An,Bn); t3 =
      min(toc,t3); end
    fprintf('%d: %f, %f\n',n,norm(C1-C2), norm(C1-C3));
    res = [res; n, t1, t2, t3];
end

figure;
plot(res(:,1),res(:,2),'b+',res(:,1),res(:,3),'r.',res(:,1),res(:,4),
xlabel('{\bf matrix size n}','fontsize',14);
ylabel('{\bf runtime [s]}','fontsize',14);
title('runtime measurements: different ways to implement matrix
  multiplication');
legend('mlmatprod','dotmatprod','loopmatprod','location','best');
```

```

print -depsc2 '../../LANMFigures/matprodtiming.eps';

figure;
loglog(res(:,1),res(:,2),'b+',res(:,1),res(:,3),'r.',res(:,1),res(:,4
xlabel('{\bf matrix size n}','fontsize',14);
ylabel('{\bf runtime [s]}','fontsize',14);
title('runtime measurements: different ways to implement matrix
  multiplication');
legend('mlmatprod','dotmatprod','loopmatprod','location','best');

print -depsc2 '../../LANMFigures/matprodtiminglog.eps';
```


Rechenzeiten: Verschieden effiziente Implementierungen des Matrixprodukts (Code 5.15, Mac OS X 10.6, MATLAB R2012a, Intel Core i7, 2.66 GHz)



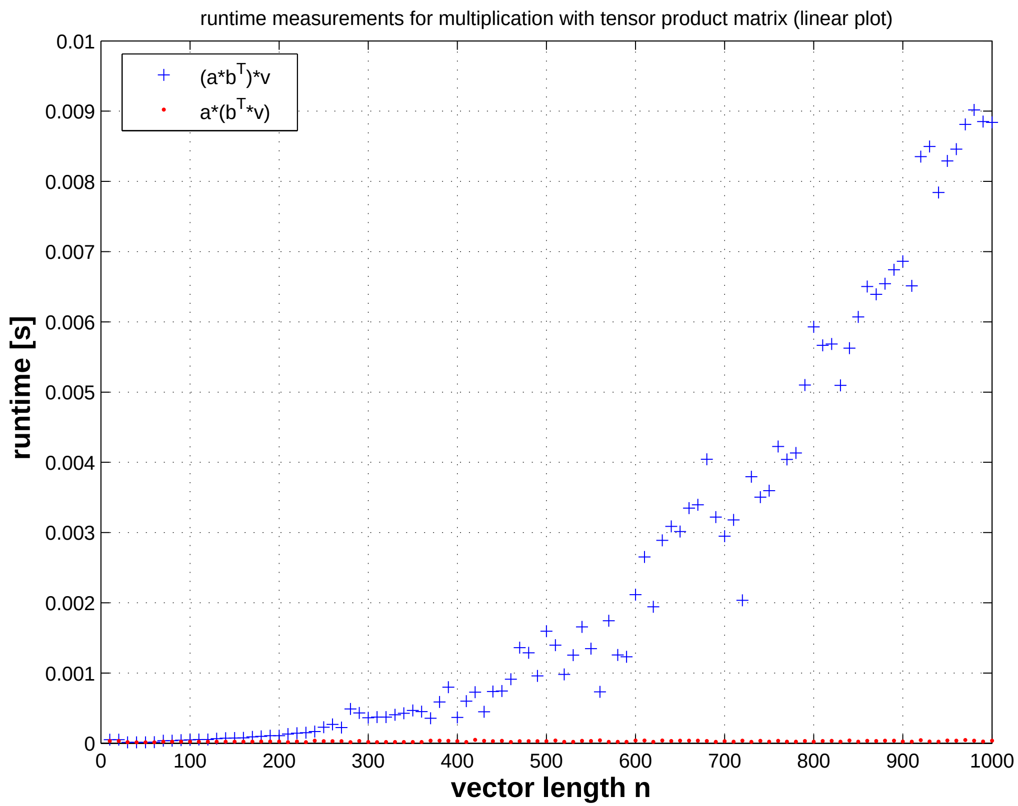


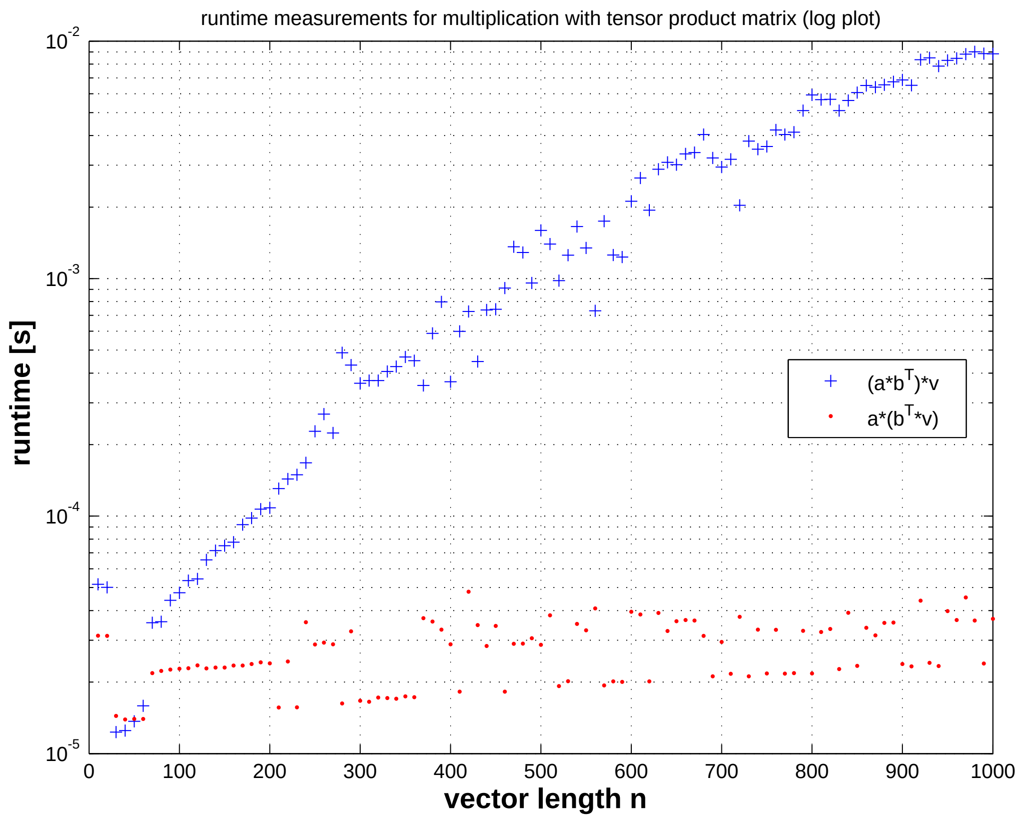
Beispiel V.3.0.F (Effiziente Multiplikation mit Rang-1-Matrizen).

Listing 5.16: Verschieden effiziente Implementierungen des Matrix-Vektor-Produkts für Rang-1-Matrizen

```
function  w = rankonemultslow(a,b,v), w = a*b'*v; end
function  w = rankonemultfast(a,b,v), w = a*(b'*v); end
```

Laufzeitmessung für Multiplikation mit Tensorproduktmatrix (Mac OS X 10.6, MATLAB R2012a, Intel Core i7, 2.66 GHz)





Wenn `a,b,v` $\leftrightarrow$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

`w = a*b'*v`

`w = a*(b'*v);`

Asymptotische Komplexität $O(n^2)$

Asymptotische Komplexität $O(n)$

$\diamond$

5.4 Dünnbesetzte Matrizen

Begriff V.4.0.A (Dünnbesetzte Matrix)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *heisst dünnbesetzt, wenn*

$$\operatorname{nnz}(\mathbf{A}) := \sharp\left\{(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}\colon (\mathbf{A})_{i,j} \neq 0\right\} \ll m \cdot n \,.$$

Beispiel V.4.0.B (Typische dünnbesetzte Matrizen)*.*

- Diagonalmatrizen, siehe Definition I.2.2.J
- Bandmatrizen mit Bandbreite $p \in \mathbb{N}$: $(\mathbf{A})_{i,j} = 0$, falls $|i-j| \geq p$
(Nur Diagonale und wenige Nebendiagonalen sind besetzt),
- Pfeilmatrizen, siehe Beispiel II.7.0.D,
- Blockmatrizen mit dünnbesetzten Blöcken, siehe Unterabschnitt 1.3.3.

▶ Dünnbesetzte Matrizen haben meist eine spezielle Struktur

(d.h. Einträge $\neq 0$ befinden sich an ganz speziellen Positionen).

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

MATLAB bietet spezielle Datenstrukturen für dünnbesetzte Matrizen, die verwendet werden *müssen*, damit MATLAB-Funktionen die spezielle Struktur von Matrizen ausnutzen können.

Initialisierung einer dünnbesetzten $m \times n$-Matrix in MATLAB

```
A = sparse(I,J,a,m,n)
```

`I`	$\hat{=}$	Array von Zeilenindices potentieller Nicht-Null-Einträge
`J`	$\hat{=}$	Array von Spaltenindices potentieller Nicht-Null-Einträge
`a`	$\hat{=}$	Array von Werten potentieller Nicht-Null-Einträge
`m,n`	$\hat{=}$	Anzahl von Zeilen und Spalten

Notwendig:

- gleiche Anzahl von Elementen in `I`, `J` und `a` **!**
- Einträge von `I`, `J` sind positive ganze Zahlen
- `I(l) <= m` und `J(l) <=n` für alle möglichen `l`
  (sonst „Index exceeds matrix dimension")

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

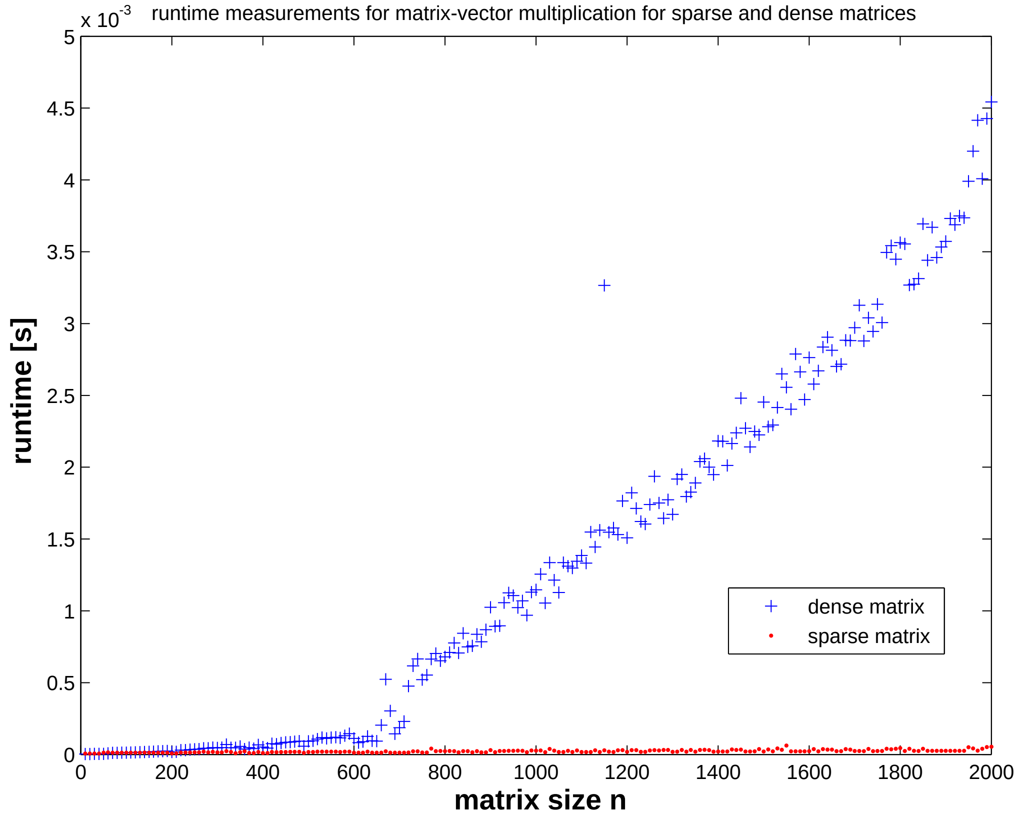
Listing 5.17: (mysparse.m) Zu MATLAB-`sparse` *algebraisch äquivalente* Funktion (liefert aber A in der Datenstruktur einer standard vollbesetzten Matrix zurück!)

```
function A = mysparse(I,J,a,m,n)
  k = numel(I);
  if ((numel(J) ~= k) || (numel(a) ~= k))
    error('Length mismatch'); end
  if ((min(I) < 1) || (max(I) > m) || (min(J) < 1) || (max(J) > n))
    error('Index out of range'); end
  A = zeros(m,n);
  for l=1:k, A(I(l),J(l)) = A(I(l),J(l)) + a(l); end
```


Listing 5.18: MATLAB-Skript: Matrix×Vektor-Multiplikation mit dünnbesetzten Matrizen

```
function sparsemvtiming
% Measurement of runtimes for matrix×vector multiplication with
% a sparse matrix.
N = 2000;                    % Maximal size of matrix
% Initialize random column vectors of length N and N-1, respectively.
d = rand(N,1); dl = rand(N-1,1); du = rand(N-1,1); v = rand(N,1);
% Initialize dense triadiagonal matrix, see the documntation of the MATLAB
  command
% diag for details.
T_dense = diag(d)+diag(dl,-1)+diag(du,1);
% Initialize sparse triadiagonal matrix
T_sparse = sparse([1:N,1:N-1,2:N],[1:N,2:N,1:N-1],[d;du;dl],N,N);

```

```
res = []; % matrix for recording times
% conduct timings for vectors of different size n
for n=10:10:N
  % Extract sub-matrices, which will be sparse and dense matrices again
  Td = T_dense(1:n,1:n); Ts = T_sparse(1:n,1:n);
  t1 = realmax; for j=1:3, tic; w1 = Td*v(1:n); t1 = min(toc,t1); end
  t2 = realmax; for j=1:3, tic; w2 = Ts*v(1:n); t2 = min(toc,t2); end
  norm(w1-w2), % Check for agreement of results
  res = [res; n, t1, t2];
end

% Create plots of runtimes.
figure;
plot(res(:,1),res(:,2),'b+',res(:,1),res(:,3),'r.');
xlabel('{\bf matrix size n}','fontsize',14);
ylabel('{\bf runtime [s]}','fontsize',14);
title(['runtime measurements for matrix-vector multiplication for sparse and '
  ...
      'dense matrices']);
legend('dense matrix','sparse matrix','location','best');

print -depsc2 '../../LANMFigures/sparsemvtiming.eps';
end
```



◁ Rechenzeiten gemessen mit Code 5.18

Mac OS X 10.6, MATLAB R2012a,
Intel Core i7, 2.66 GHz,

Initialisierung spezieller dünnbesetzter Matrizen in MATLAB:

speye: Einheitsmatrix als dünnbesetzte Matrix

sparse(m,n): $m \times n$-Nullmatrix als dünnbesetzte Matrix

$$\boxed{\text{MATLAB-Matrixbaukasten:} \qquad \text{Matrixblock sparse} \Longrightarrow \text{Resultat sparse}}$$

5.5 Lösen linearer Gleichungssysteme und linearer Ausgleichsprobleme

$\backslash$-Operator:

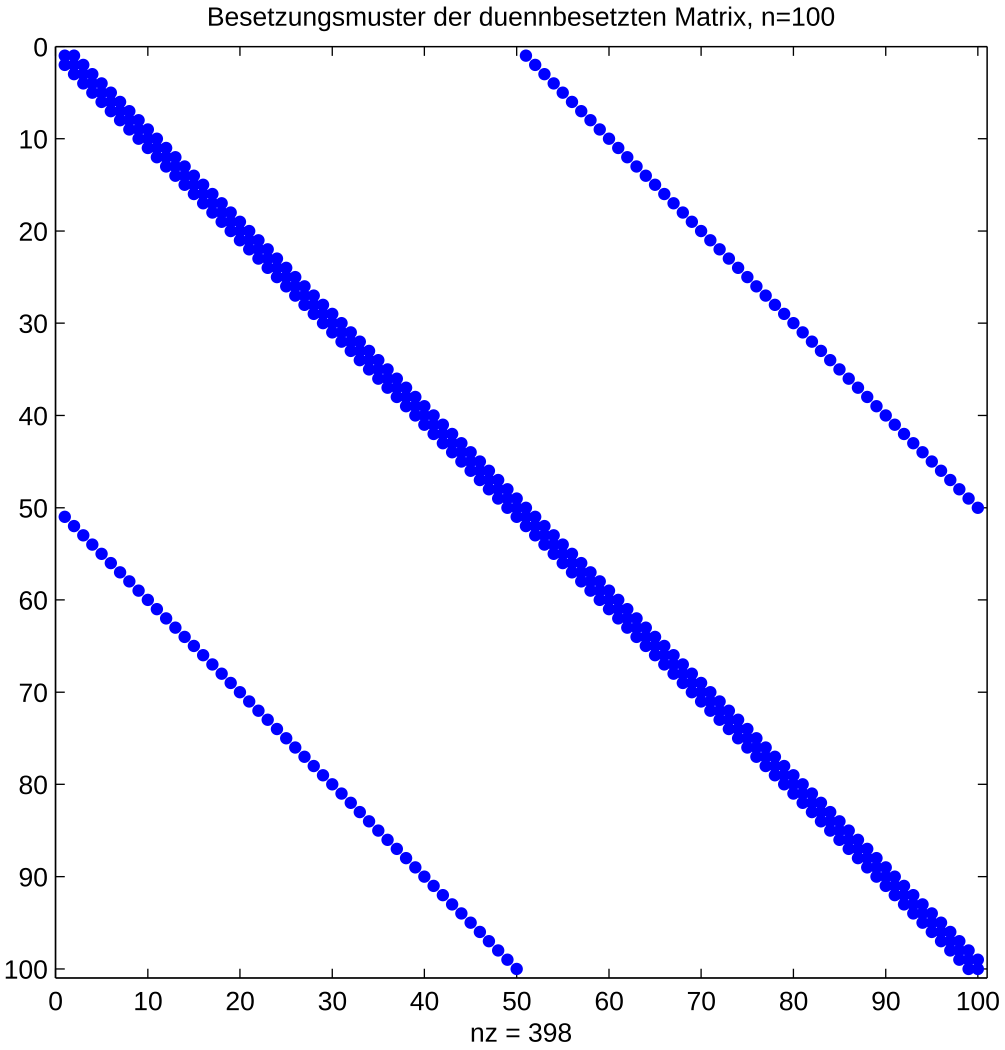
❶ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar: $\boxed{\texttt{x = A\textbackslash b}}$ berechnet $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

Rechenaufwand für `x = A\b`: i.a. $O(n^3)$

❷ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m > n$: $\boxed{\texttt{x = A\textbackslash b}}$ berechnet Kleinste-Quadrate-Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Rechenaufwand für `x = A\b` : i.a. $O(mn^2)$

Beispiel V.5.0.B (Rechenaufwand zur Lösung dünnbesetzter LGS).



$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, n gerade mit

$$(\mathbf{A})_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{, falls } i = j \, , \\ 1 & \text{, falls } i = j \pm 1 \, , \\ 1 & \text{, falls } i = j \pm \frac{n}{2} \, , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

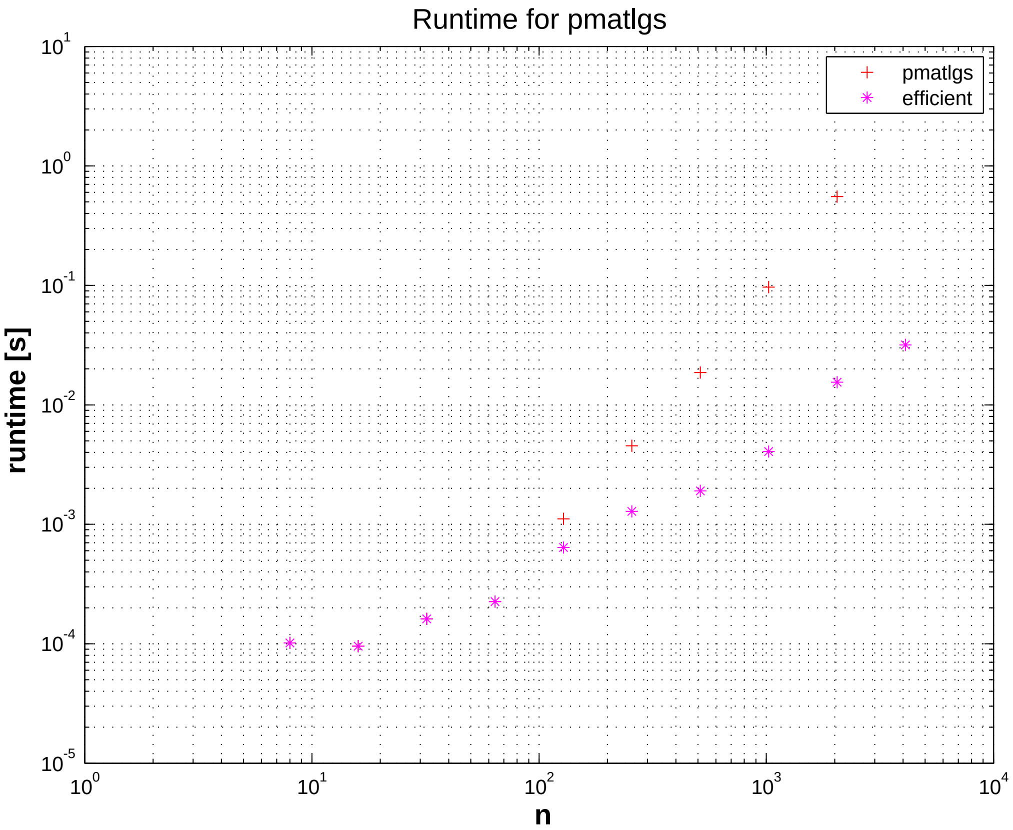
◁ "spy-plot" der Matrix für $n = 100$.

(erzeugt mit MATLAB-Funktion `spy`)

Listing 5.19: MATLAB-Skript: Messung der Laufzeit für das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dünnbesetzter Koeffizientenmatrix

```
% MATLAB script for timing the solution of a sparse linear system

```

```
% Outer timing loop: measure runtime of backslash solve for sparse coefficient
  matrices of increasing size
res = []; % Matrix for storing runtimes along with matrix sizes
for n = 10:10:3000
  % I: Build sparse diagonal dominant tridiagonal matrix of size n×n, n even.
  I = [1:n,1:n-1,2:n,1:(n/2),(n/2+1):n];
  J = [1:n,2:n,1:n-1,(n/2+1):n,1:(n/2)];
  A = sparse(I,J,[4*ones(n,1);ones(3*n-2,1)],n,n);
  b = rand(n,1); % Initialize random right hand side vector
  % Runtime measurement using MATLAB's tic-toc functions
  t = realmax; for j=1:3, tic; x = A\b; t = min(toc,t); end
  % record measured times
  res = [res; n t];
end
% Doubly logarithmic plot of runtimes
figure; plot(res(:,1),res(:,2),'r+');
xlabel('{\bf n}','fontsize',14);
ylabel('{\bf runtime [s]}','fontsize',14);
title('Runtime for solution of sparse linear
  system','fontsize',14);
print -depsc2 '../../LANMFigures/sparselinsolvetiming.eps';
```



◁ Rechenzeiten gemessen mit Code 5.19

Mac OS X 10.6, MATLAB R2012a,
Intel Core i7, 2.66 GHz,

Beobachtung: empirischer Rechenaufwand $O(n)$ **!**

◇

5.6 MATLAB-Projekte

LINK zu einführender Präsentation.

Genaue Projektbeschreibungen und für die Bearbeitung der Projekte erforderliche Dateien finden Sie hier.

5.6.1 Projekt: Ideale statische Fachwerke

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Siehe Vorlesungspräsentation für Hintergrundinformation und Projektverzeichnis "‘Fachwerksimulator” für die Projektbeschreibung und Dateien.

5.6.2 Projekt: Entrauschen eines Bildes

LINK zu Projektbeschreibung und Dateien.

5.6.3 Projekt: Netzglättung

LINK auf Projektbeschreibung und MATLAB-Dateien.

5.6.4 Projekt: Rekonstruktion eines Dreiecksnetzes

LINK zu Projektbeschreibung (PDF-Datei) und Dateien.

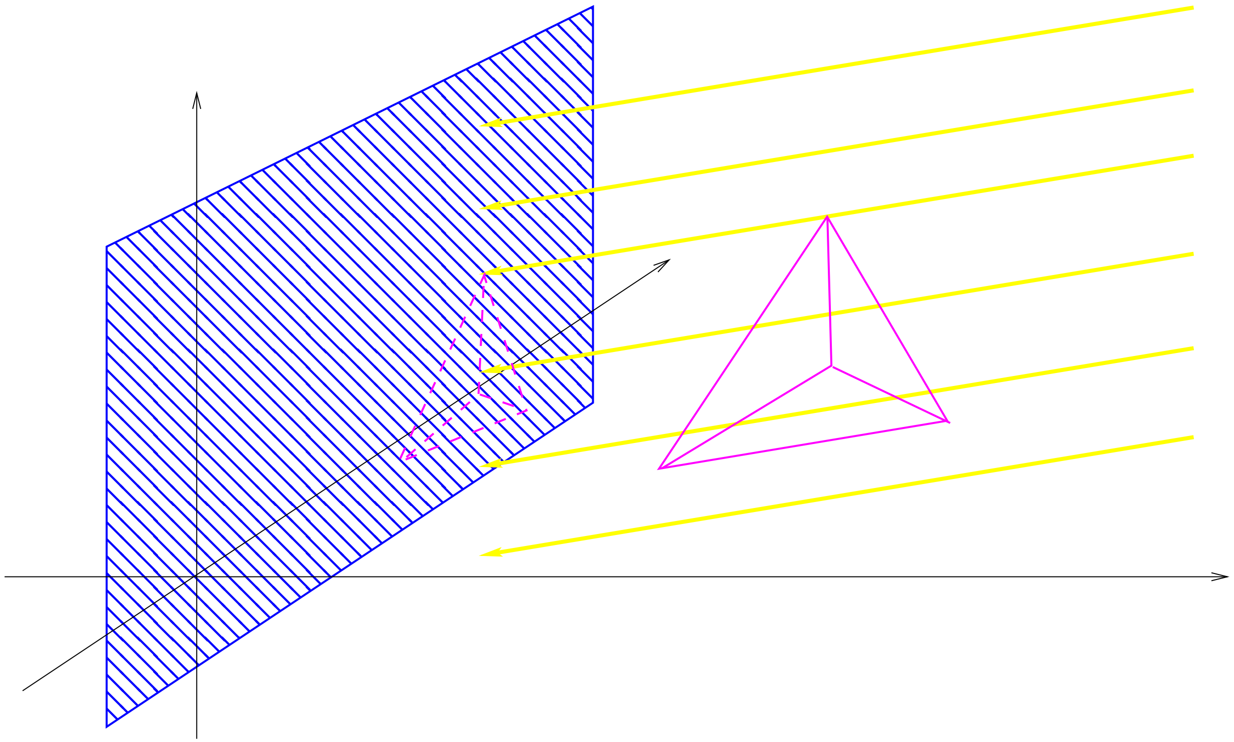
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Clickerfrage 5.6.1 (Dünnbesetzte Matrizen in MATLAB).

Listing 5.20: Diese Funktion lässt sich auch durch ein **einziges** MATLAB-Statement ersetzen. Welches?

```
function y = sparseact(ridx,cidx,val,n,x)
  y = zeros(n,1);
  for k=1:numel(I), y(ridx(k)) = y(ridx(k)) + val(k)*x(cidx(k));
    end
```

6 Lineare Abbildungen



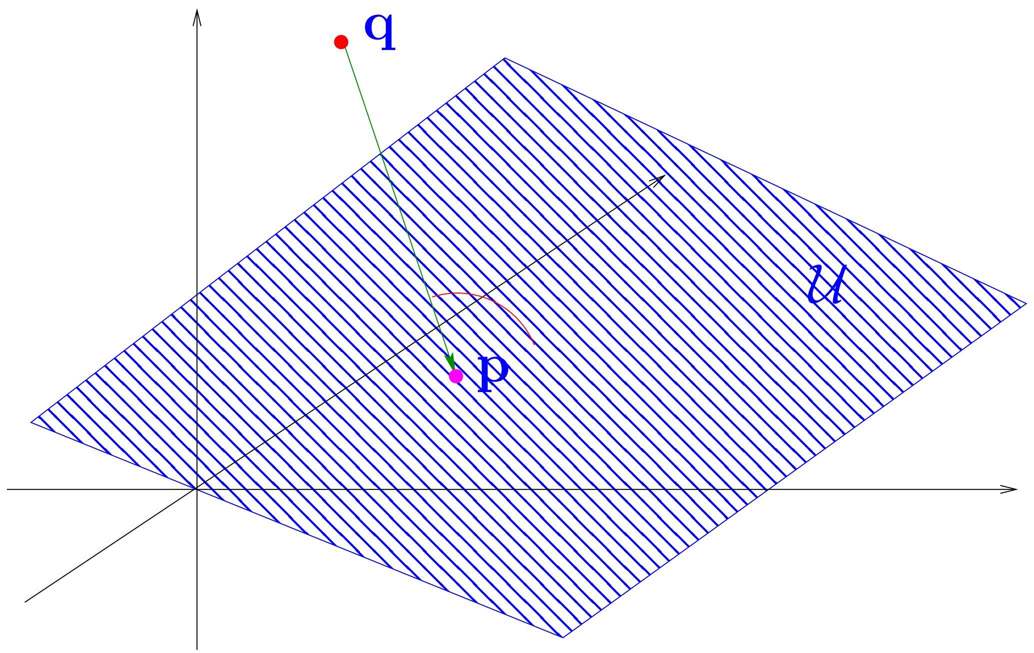
Computergraphik:

Projektion auf Bildebene

Punkte im Raum $\mapsto$ Punkte in der Ebene

Orthogonale Projektion auf Unterraum $\mathcal{U}$:
(→ Abschnitt 4.2.3)

Abbildung $\mathbf{q} \in \mathcal{V} \mapsto \mathbf{p} \in \mathcal{U}$



R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Listing 6.1: Animation eines rotierenden Tetraeders

```
% MATLAB visualization of the projection of a rotating tetrahedron
% axis of rotation
a = [1;1;2];
% Planar rotation matrix parameterized by rotation angle and implemented as
% a MATLAB function handle
D = @(phi) [ cos(phi), -sin(phi); sin(phi) , cos(phi)];
% Corner points of tetrahedron
T = [0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
% Compute parameterized transformation matrix for rotation, see rotmatrix.m for
    dertails
[Q,R] = qr(a); M = @(phi) Q*[[1 0 0];[0;0] D(phi)]*Q';

figure('name','rotating tetrahedron');
% Main loop for rotating the tetrahedron
for phi=0:pi/180:(2*pi)
  Tmap = M(phi)*T;
  cla; axis([-1 1.5 -1 1.5]); hold on;
```

```
  for j=2:4
    for k=1:j-1
      plot([Tmap(1,j),Tmap(1,k)],[Tmap(2,j),Tmap(2,k)],'m-');
    end
  end
  drawnow; hold off;
end
```

Wie in Kapitel 3:

✎ Notation: $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U} \hat{=}$ Menge („Räume”) aller Matrizen einer bestimmten Grösse, (Grösse fest, aber oft nicht eigens spezifiziert)

Spezialfälle: Räume von Spaltenvektoren/Zeilenvektoren ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$)

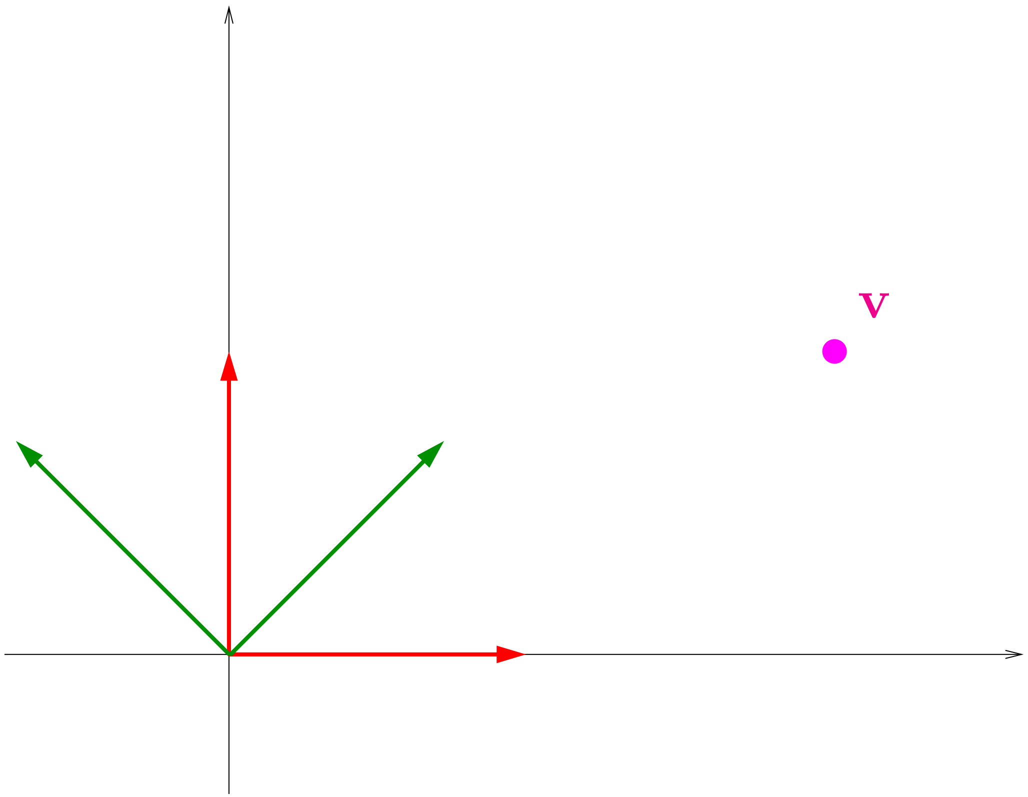
Sprachgebrauch: Elemente von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ werden als “Vektoren” bezeichnet, auch wenn es sich vielleicht um Matrizen handelt.

6.1 Wiederholung: Vektoren und Koordinaten

Erinnerung an Abschnitt 3.4:

Nach Wahl einer Basis: Vektor $\in \mathcal{V}$ $\longleftrightarrow$ Koordinatenvektor $\in \mathbb{R}^n$, $n := \dim \mathcal{V}$
(ein Spaltenvektor, basisabhängig!)

Unterscheide: Vektor (Punkt, Kraftvektor, etc.) $\neq$ Koordinatenvektor



„rote Basis": $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

„güne Basis": $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

Koordinatenvektoren des Punktes/Vektors $\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.1.0.A (Koordinatenabbildung)**.**
Sei $\dim \mathcal{V} = n$ *und* $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \ldots \mathbf{b}^n\}$ *eine Basis von* $\mathcal{V}$*. Dann heisst die Abbildung*

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V} : \begin{cases} \mathcal{V} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} & \mapsto \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{so, dass} \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{b}^j$$

die Koordinatenabbildung/Koeffizientenabbildung zur Basis $\mathfrak{B}_V$*.*

Korollar III.4.0.B $\Rightarrow$ Koordinatenabbildungen sind umkehrbar (bijektiv)

Erinnerung an Satz III.4.0.H ➡ Transformation von Koordinatenvektoren bei Basiswechsel

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.2 Konzept der linearen Abbildung

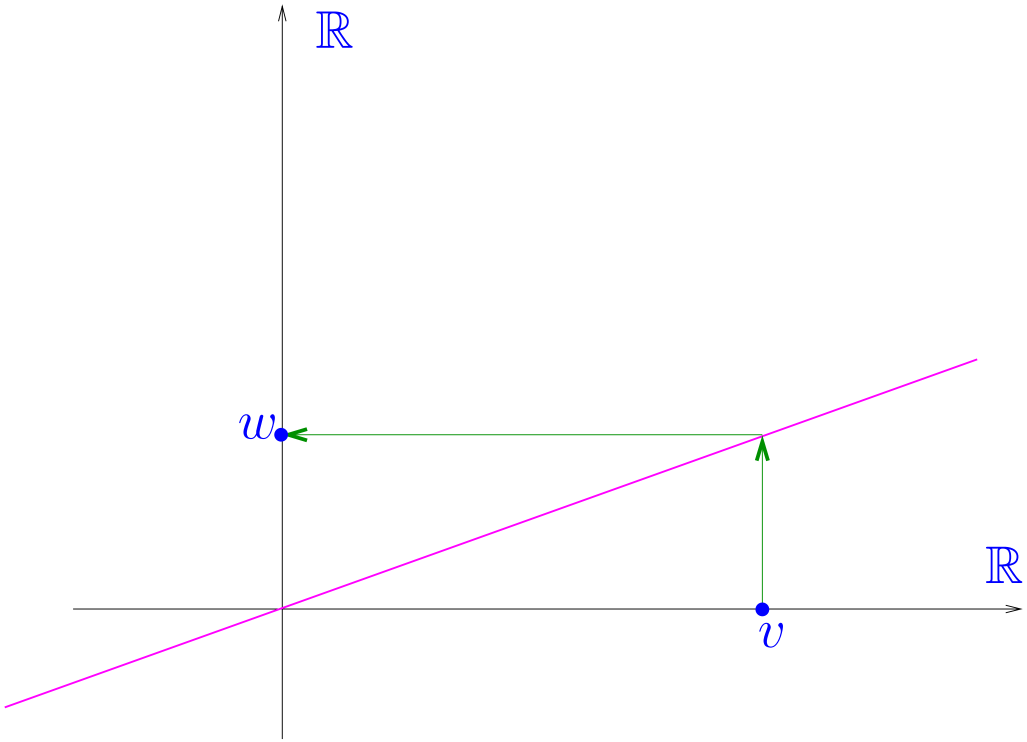
Definition VI.2.0.A (Lineare Abbildung)**.**
Eine Abbildung (Funktion, siehe [1, Abschnitt 2.1]) $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist linear, falls*

$$\mathsf{L}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathsf{L}(\mathbf{x}) + \mathsf{L}(\mathbf{y}) \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \,, \tag{L1}$$

$$\mathsf{L}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathsf{L}(\mathbf{v}) \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \ \alpha \in \mathbb{R} \,. \tag{L2}$$

Notation: $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \mathrel{\hat{=}}$ Menge der linearen Abbildungen $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$.

Beispiel VI.2.0.B (Lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).



$$\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R},\ \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = 1$$

◁ Funktionsgraph einer linearen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Gerade durch 0 („lineare Funktion")

$$w = \gamma v\ , \quad \gamma \in \mathbb{R}\ .$$

◇

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel VI.2.0.C („Standardbeispiel" für lineare Abbildung).

Für

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n \quad , \quad \mathcal{W} = \mathbb{R}^m\ ,$$

und eine *gegebene* Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert

$$\mathsf{L}_{\mathbf{A}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{A}\mathbf{x} \end{cases}$$

eine lineare Abbildung.

◇

Beispiel VI.2.0.D (Koordinatenabbildung als lineare Abbildung).

Ist $\dim \mathcal{V} = n$ und $\mathfrak{B}_V$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so ist die zugeordnete Koordinatenabbildung $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}$ eine bijektive (eineindeutige, umkehrbare) lineare Abbildung zwischen $\mathcal{V}$ und $\mathbb{R}^n$!

Klar:
$$\begin{aligned} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) + \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{w}) \qquad && \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathcal{V}\ , \\ \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\alpha\mathbf{v}) &= \alpha\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) && \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

linke Seite („Vektorseite”): rechte Seite („Koordinatenseite”):

Rechenoperationen in $\mathcal{V}$ Vektorkalkül in $\mathbb{R}^n$ ◇

▶ Lineare Abbildungen vertauschen mit der Bildung von Linearkombinationen:

$$\mathsf{L}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{v}^j\Big) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathsf{L}(\mathbf{v}^j) \quad \text{für } \mathbf{v}^j \in \mathcal{V}, c_j \in \mathbb{R}\ . \tag{VI.2.0.E}$$

Abbildungseigenschaften

Aus (VI.2.0.E) ergeben sich spezielle Abbildungseigenschaften:

Notation: Bildmenge: für $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ setze

$$\mathsf{L}(\mathcal{M}) := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} \colon \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ so, dass } \mathsf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \subset \mathcal{W} \,.$$

Satz VI.2.0.L (Abbildungseigenschaften linearer Abbildungen)**.**
Sei $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *eine lineare Abbildung zwischen* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{W}$*. Dann gilt*

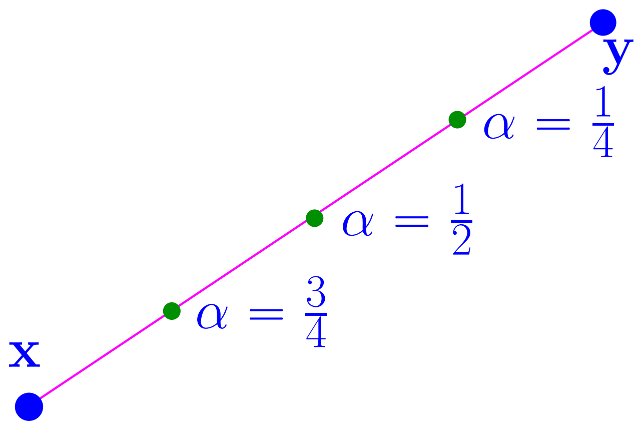
(i) *Ist* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *ein* Unterraum *(→ Definition III.1.0.C) von* $\mathcal{V}$*, so ist* $\mathsf{L}(\mathcal{U})$ *ein* Unterraum *von* $\mathcal{W}$*.*

(ii) *Ist* $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ *ein* affiner Teilraum *(→ Definition III.1.0.J) von* $\mathcal{V}$*, so ist* $\mathsf{L}(\mathcal{A})$ *ein* affiner Teilraum *von* $\mathcal{W}$*.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Anschauung: Lineare Abbildungen bilden Geraden/Ebenen auf Punktre/Geraden/Ebenen ab.

Eine spezielle Abbildungseigenschaft:



Definition VI.2.0.M (Verbindungsstrecke)**.**
Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *heisst die Menge*

$$[\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!] := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \colon \exists \alpha \in [0,1] \colon \mathbf{v} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}\} \subset \mathcal{V}$$

die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$*.*

Korollar VI.2.0.P („Verbindungsstrecke auf Verbindungsstrecke”)**.**
Jede lineare Abbildung $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *bildet die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Vektoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *auf die Verbindungsstrecke ihrer Bildvektoren ab:*

$$\mathsf{L}([\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!]) = [\![\mathsf{L}(\mathbf{x}), \mathsf{L}(\mathbf{y})]\!] \ .$$

► Visualisierung linearer Abbildungen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$, in 2D:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

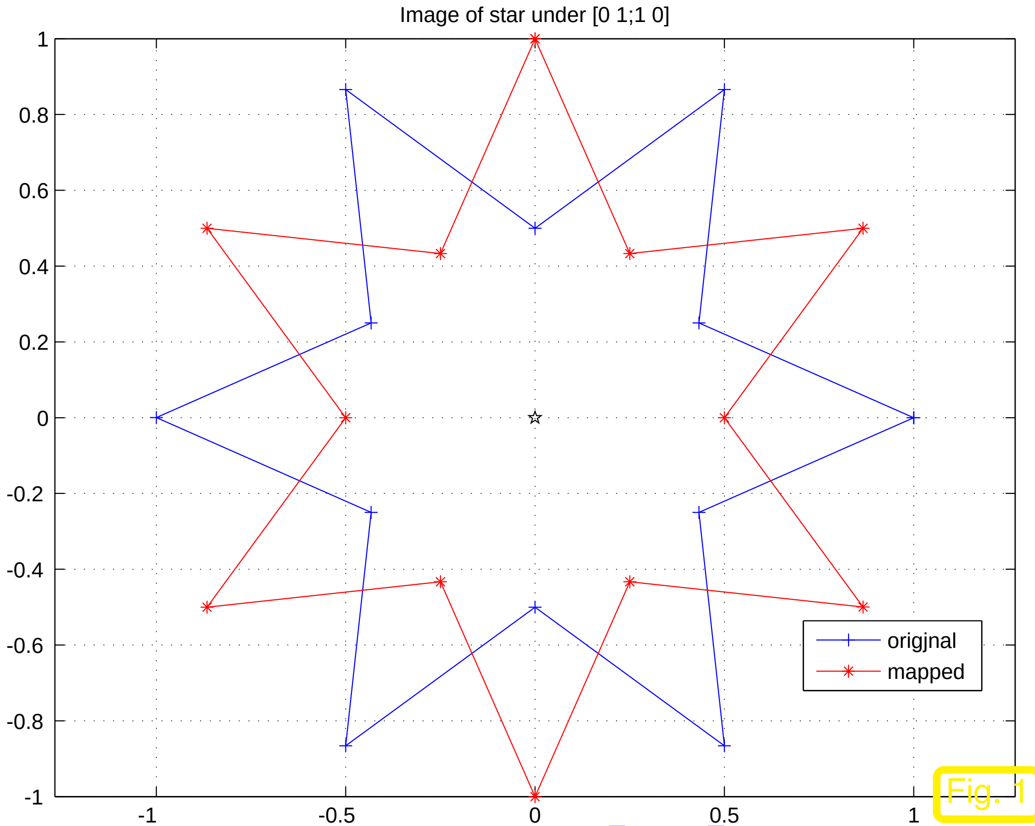


Abb. 5: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

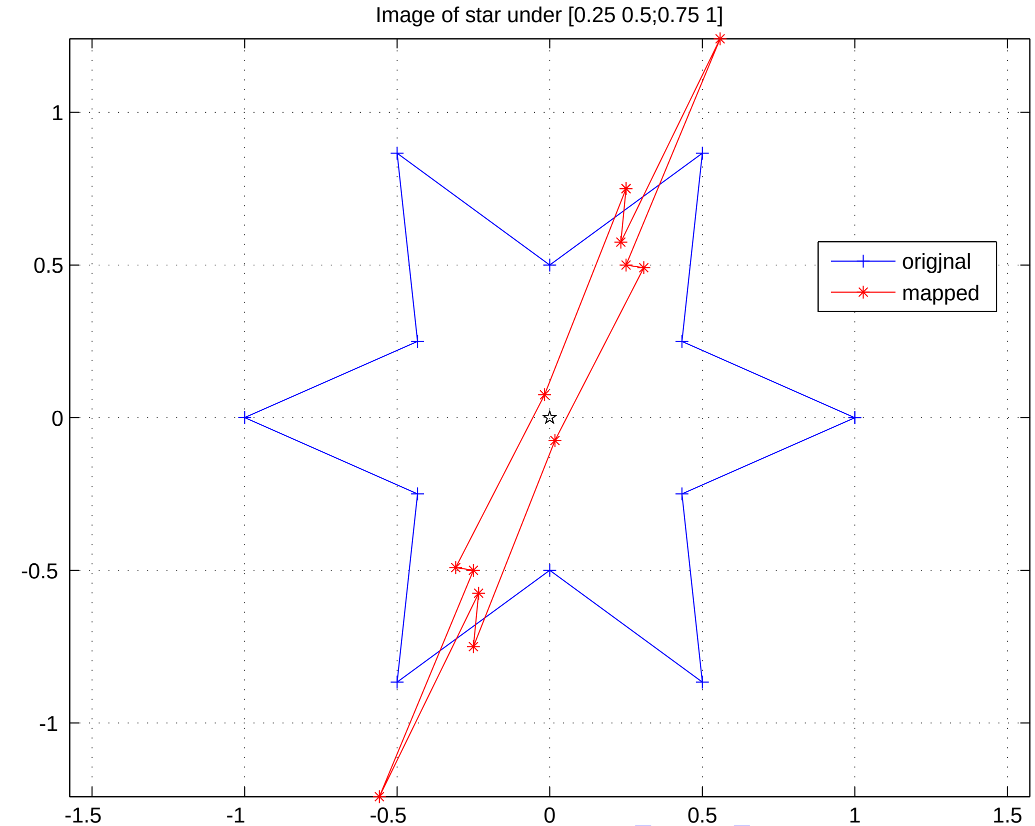


Abb. 6: $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

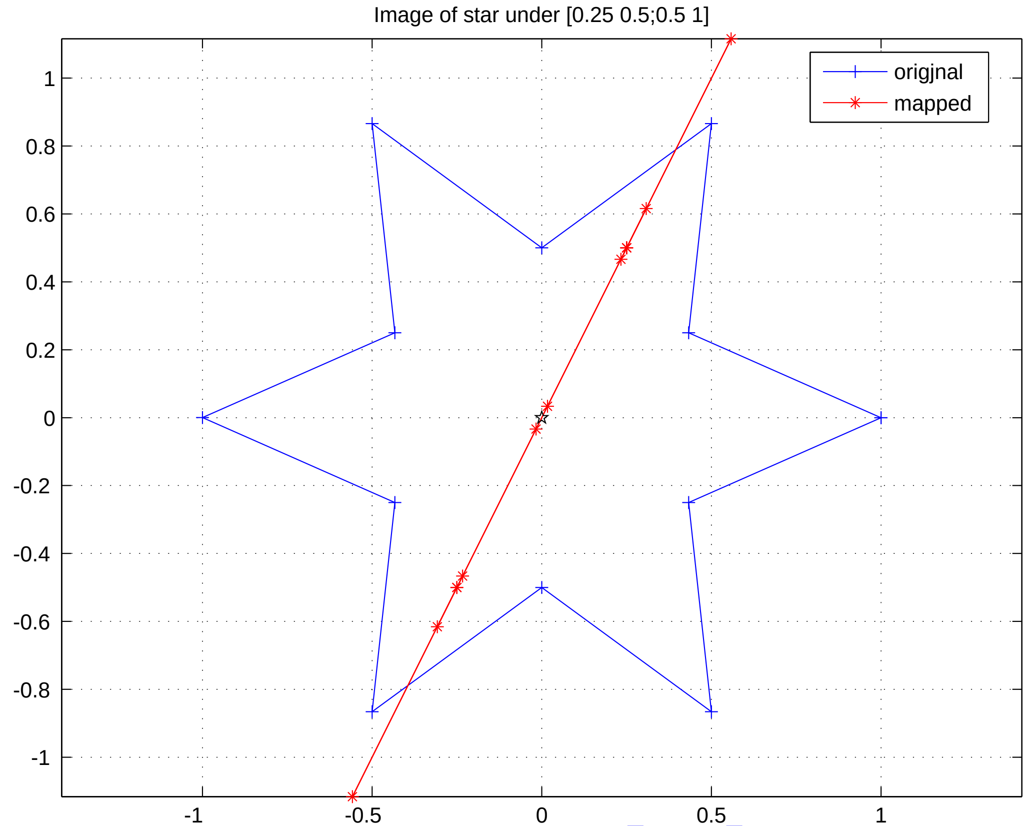


Abb. 7: $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

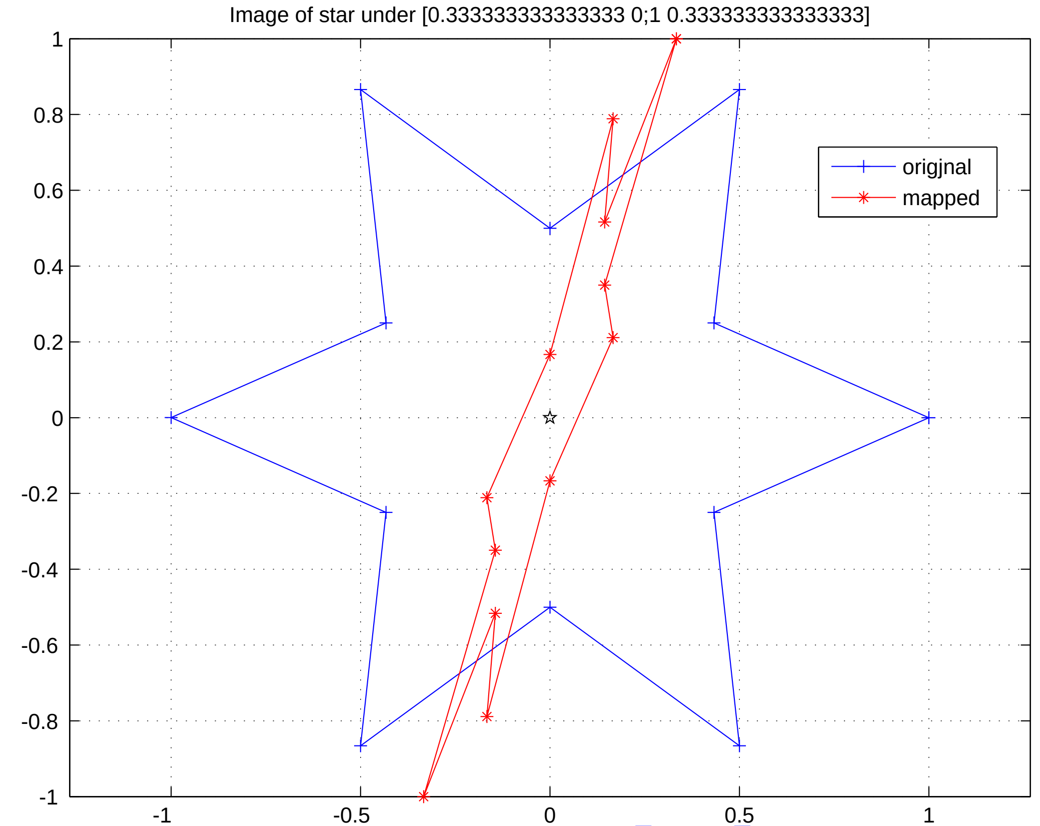


Abb. 8: $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Listing 6.2: Visualisierung linearer Abbildungen in 2D

```
function linmapvis(A)
% Visualizes the action of the linear mapping described by matrix A by applyung
% it to a star.

% Create a 2 × 13-matrix x whose columns contain the coordinates of the
% vertices of the star
x_outer = [cos(2*pi*(0:6)/6);sin(2*pi*(0:6)/6)];
x_inner = 0.5*[cos(2*pi*(0:5)/6+pi/6);sin(2*pi*(0:5)/6+pi/6)];
x = zeros(2,13); x(:,1:2:13) = x_outer; x(:,2:2:12) = x_inner;

```

```
% Map the star
y = A*x;

% Plot the original star and its image under A
figure('name','image of star');
plot(x(1,:),x(2,:),'b-+',y(1,:),y(2,:),'r-*',[0],[0],'kp'); hold on;
legend('origjnal','mapped','location','best'); grid on;
axis equal; title(['Image of star under ' mat2str(A)]);
```


Komposition

Erinnerung: Hintereinanderausführung/Verkettung/Komposition von Abbildungen:

$$\begin{array}{l} \mathsf{F}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}\,, \\ \mathsf{G}:\mathcal{W}\to\mathcal{U} \end{array} \quad : \quad \mathsf{G}\circ\mathsf{F}:\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{V} & \to & \mathcal{U} \\ \mathbf{v} & \mapsto & (\mathsf{G}\circ\mathsf{F})(\mathbf{v}) := \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathbf{v})) \end{array}\right. .$$

Satz VI.2.0.F (Komposition linearer Abbildungen)**.**
Die Hintereinanderausführung (Komposition) zweier linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung:

$$\mathsf{L}\in\mathcal{L}(V,W),\, \mathsf{S}\in\mathcal{L}(W,U) \quad\Rightarrow\quad \mathsf{S}\circ\mathsf{L}\in\mathcal{L}(V,U)\,.$$

Bild und Kern

Definition VI.2.0.G (Nullraum/Kern und Bild einer linearen Abbildung)**.**
Für eine lineare Abbildung $\mathsf{L}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ ist ihr Nullraum/Kern definiert durch

$$\mathrm{Kern}(\mathsf{L}) := \{\mathbf{v}\in V:\ \mathsf{L}(\mathbf{v})=0\}\ ,$$

und ihr Bild

$$\mathrm{Bild}(\mathsf{L}) := \{\mathsf{L}(\mathbf{v}),\ \mathbf{v}\in V\}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VI.2.0.J (Unterräume zu linearen Abbildungen)**.**
Für eine lineare Abbildung $\mathsf{L}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ ist $\mathrm{Kern}(\mathsf{L})$ ein Unterraum (→ Definition III.1.0.C) von $\mathcal{V}$ und $\mathrm{Bild}(\mathsf{L})$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$.

Definition VI.2.0.K (Rang einer linearen Abbildung)**.**
$\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *ist ihr Rang die Dimension des Bildes:*

$$\mathrm{Rang}\,\mathsf{L} := \dim \mathrm{Bild}(\mathsf{L}) \; .$$

Affine Abbildungen

Verallgemeinerung linearer Abbildungen:

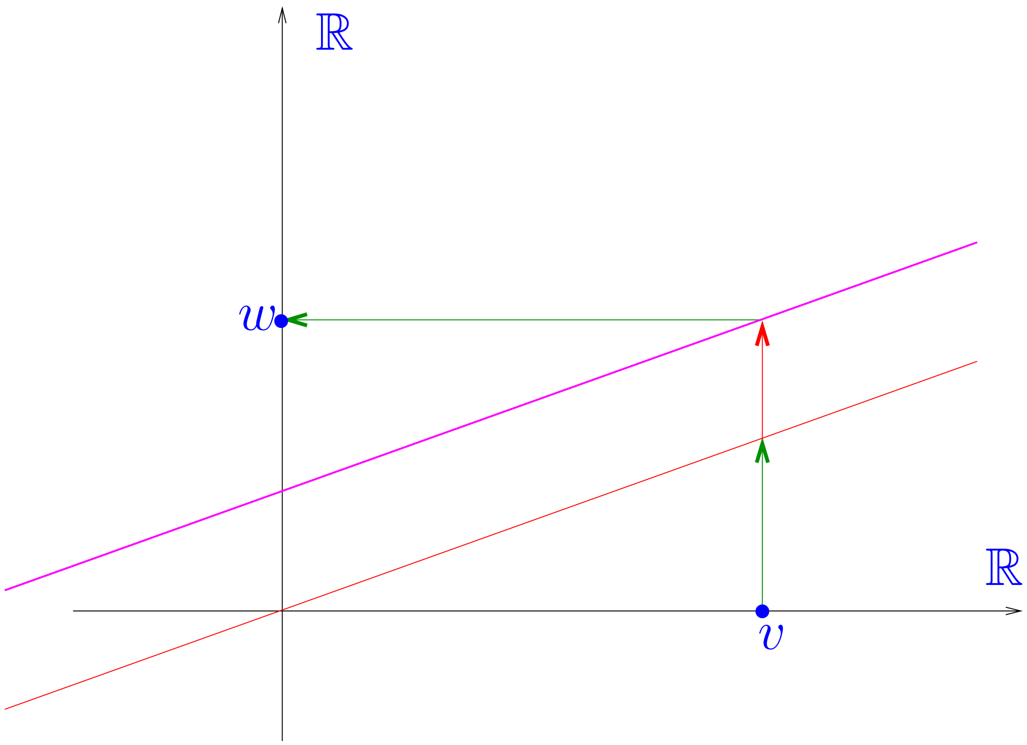
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.2.0.Q (Affine Abbildung)**.**
Eine Abbildung $\mathsf{M} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist eine affine Abbildung, wenn es eine* lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *und einen Verschiebungsvektor* $\mathbf{t} \in \mathcal{W}$ *so gibt, dass*

$$\mathsf{M}(\mathbf{v}) = \mathsf{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \; .$$

Affine Abbildung = Verschiebung $\circ$ lineare Abbildung

Beispiel VI.2.0.T (Affine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).



$\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = 1$

$\triangleleft$ Funktionsgraph einer affinen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: beliebige Gerade

$$w = \gamma v + \tau \,, \quad \gamma, \tau \in \mathbb{R} \,.$$

$\diamond$

Beachte: Eine affine Abbildung bildet immer noch affine Teilräume von $\mathcal{V}$ wieder auf solche von $\mathcal{W}$ ab, Verbindungsstrecken auf Verbindungsstrecken, jedoch nicht mehr Unterräume auf Unterräume!

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.3 Matrixdarstellung

6.3.1 Definition

Satz VI.3.1.B (Festlegung einer linearen Abbildung)**.**
Eine lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *ist* eindeutig *durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer Basis von* $\mathcal{V}$ *bestimmt.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Ist $\mathcal{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$, $n := \dim \mathcal{V}$, eine Basis von $\mathcal{V}$
und $\mathcal{B}_W := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^m\}$, $m := \dim \mathcal{W}$, eine Basis von $\mathcal{W}$, so ist die

Matrixdarstellung ("Koordinatendarstellung") $\mathbf{A} := \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ von $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$

bzüglich der Basen $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$ definiert durch

$$(\mathbf{A})_{\ell,j} := a_{\ell,j}\,, \quad \ell \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{wobei} \quad \boxed{\mathsf{L}(\mathbf{b}^j) = \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell,j}\, \mathbf{q}^\ell}\,, \qquad \text{(VI.3.1.C)}$$

d.h. in der j. Spalte der Darstellungsmatrix $\mathbf{A}$ stehen die Koordination des Bildes des j. Basisvektors von $\mathcal{V}$.

Satz VI.3.1.D (Vektorseite und Koordinatenseite)**.**
Sind $\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{W}$ *und* $\mathbf{A}$ *die Matrixdarstellung von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *bzgl.* $\mathfrak{B}_V$ $\mathfrak{B}_W$*, dann gilt*

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}(\mathbf{v})) = \mathbf{A} \cdot \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \, .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\blacktriangleright \qquad \boxed{\mathsf{L} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}^{-1} \circ \mathsf{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}} \, . \tag{VI.3.1.E}$$

Graphisch dargestellt: Wenn $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$:

$$\text{Vektorseite} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\text{Lineare Abbildung } \mathsf{L}} & \mathcal{W} \\ {\scriptstyle \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{Multiplikation mit Matrix } \mathbf{A}]{} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \text{Koordinatenseite} \, .$$

Da $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}$ bijektiv:

Satz VI.3.1.G (Injektivität und Surjektivität linearer Abbildungen)**.**
Sei $\mathbf{A}$ *eine Matrixdarstellung von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *(bzgl.* beliebiger *Basen). Dann gilt*

(i) L *surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{L}_{\mathbf{A}}$ *surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^{\dim \mathcal{W}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{W}$,

(ii) L *injektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{L}_{\mathbf{A}}$ *injektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{V}$.

Erinnerung: Begriffe aus der Analysis-Vorlesung [1, Abschnitt 2.1]:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

- Eine Abbildung $\mathsf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ is surjektiv, wenn $\mathsf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$.
- Eine Abbildung $\mathsf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ is injektiv, wenn

$$\mathsf{F}(\mathbf{v}) = \mathsf{F}(\mathbf{v}') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' \, .$$

Eine lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ kann *nur dann* bijektiv sein, wenn $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$!

Satz VI.3.1.H (Matrixdarstellung und spezielle Unterräume)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{W}$ *und* $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$. *Dann gilt für eine lineare Abbildung* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *mit* Matrixdarstellung $\mathbf{A} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}(\mathrm{Bild}(\mathsf{L})) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m \;,$$
$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathrm{Kern}(\mathsf{L})) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n \;.$$

"Dimensionssatz" Korollar III.3.0.H ▶ $$\dim \mathrm{Kern}(\mathsf{L}) = \dim \mathcal{V} - \dim \mathrm{Bild}(\mathsf{L}) \;. \qquad \text{(4.2.J)}$$

Satz VI.3.1.J (Matrixdarstellung der Komposition linearer Abbildungen).
Es bezeichnen $l, n, m \in \mathbb{N}_0$ *die Dimensionen von* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$*. Ferner seien* $\mathfrak{B}_U$, $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$ *Basen von* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$*.*
Ferner sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *die Matrixdarstellung von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *bzgl. der Basen* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$ *(*$\mathbf{A} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$*), und* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l,m}$ *die Matrixdarstellung von* $\mathsf{S} \in \mathcal{L}(W, U)$ *bzgl. der Basen* $\mathfrak{B}_W$ *und* $\mathfrak{B}_U$ *(*$\mathbf{B} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S}) \in \mathbb{R}^{l,m}$*).*
Dann hat $\mathsf{S} \circ \mathsf{L}$ *die Matrixdarstellung* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l,n}$ *bzgl.* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_U$*:*

$$\mathsf{K}_{\mathcal{B}_V}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S} \circ \mathsf{L}) = \mathsf{K}_{\mathcal{B}_W}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S}) \cdot \mathsf{K}_{\mathcal{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.3.2 Matrixdarstellung bei Basiswechsel

Betrachte $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Klar: Matrixdarstellung gemäss (VI.3.1.C) ist abhängig von der Wahl der Basen.

Fragestellung wie in Abschnitt 3.4: Wie ändert sich die Matrixdarstellung bei Wechsel zu anderen Basen?

Für $\mathcal{V}$ mit $\dim\mathcal{V} = n$: „alte Basis” $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$
„neue Basis” $\widetilde{\mathfrak{B}}_V := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$

Für $\mathcal{W}$ mit $\dim\mathcal{V} = m$: „alte Basis” $\mathfrak{B}_W := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^m\}$
„neue Basis” $\widetilde{\mathfrak{B}}_W := \{\widetilde{\mathbf{q}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{q}}^m\}$

(Inverse) Basiswechselmatrizen, vgl. Satz III.4.0.H:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}: \qquad & \widetilde{\mathbf{b}}^k = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{S})_{j,k} \mathbf{b}^j \;, \quad k \in \{1, \dots, n\} \;, \\
\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,m}: \qquad & \mathbf{q}^\ell = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{R})_{i,\ell} \widetilde{\mathbf{q}}^i \;, \quad \ell \in \{1, \dots, n\} \;.
\end{aligned} \tag{VI.3.2.A}$$

Beachte: $\mathbf{R}$ ist die Basiswechselmatrix neue Basis $\rightarrow$ alte Basis.

Satz VI.3.2.B (Transformation von Matrixdarstellungen)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V, \widetilde{\mathfrak{B}}_V$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathfrak{B}_W, \widetilde{\mathfrak{B}}_W$ *solche von* $\mathcal{W}$*. Ferner, bezeichne* $\mathbf{S}$ *die Basiswechselmatrix* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V \to \mathfrak{B}_V$ *und* $\mathbf{R}$ *die Basiswechselmatrix* $\mathfrak{B}_W \to \widetilde{\mathfrak{B}}_W$*, siehe* (VI.3.2.A)*.*
Ist $\mathbf{A}$ *die* Matrixdarstellung *von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *bzgl.* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$*, und* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *jene bzgl.* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V$ *und* $\widetilde{\mathfrak{B}}_W$*, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,.$$

Satz III.4.0.F „Basiswechselmatrix" ➢ $\mathbf{S}, \mathbf{R}$ sind invertierbar ▶ $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rang}\,\widetilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Rang}\,(\mathsf{L}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.4 Lineare Selbstabbildungen

Nun $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ und $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$

Für $\mathcal{V}$ mit $\dim \mathcal{V} = n$: „alte Basis" $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$
„neue Basis" $\widetilde{\mathfrak{B}}_V := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$

Im Kontext von Unterabschnitt 6.3.2: $\mathfrak{B}_W = \mathfrak{B}_V, \widetilde{\mathfrak{B}}_W = \widetilde{\mathfrak{B}}_V$ ▶ $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}$

Satz VI.4.0.B (Transformation der Matrixdarstellung einer Selbstabbildung)**.**
Sind $\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *die Matrixdarstellungen* einer *linearen Selbstabbildung* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *von* $\mathcal{V}$ *bzgl. der beiden Basen* $\mathfrak{B}_V$ *bzw.* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V$*, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,.$$

Definition VI.4.0.D (Ähnlichkeit von Matrizen)**.**
Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heissen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.5 Projektionen

Definition VI.5.0.A (Projektion)**.** *Eine lineare Selbstabbildung* $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(V,V)$ *heisst Projektion, wenn*

$$\mathsf{P}^2 := \mathsf{P} \circ \mathsf{P} = \mathsf{P} \;.$$

Satz VI.5.0.B (Invarianz des Bildes einer Projektion)**.**
Projektionen lassen jeden Vektor in ihrem Bild unverändert:

$$\textit{für jede Projektion} \quad \mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V}) : \qquad \mathbf{v} \in \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \;.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.5.0.C (Direkte Summe und Komplemente)**.**
Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Unterräume von $\mathcal{V}$. Dann ist $\mathcal{V}$ die direkte Summe von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$, in Zeichen $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, wenn es zu jedem $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ eindeutig *bestimmte Vektoren $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ und $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ so gibt, dass $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.*
$\mathcal{Y}$ heisst dann ein Komplement von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{V}$, und $\mathcal{X}$ ein Komplement von $\mathcal{Y}$ in V.

Korollar VI.5.0.D (Eigenschaften der direkten Summe)**.**
Wenn (mit den Notationen von Definition VI.5.0.C) $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, dann gilt

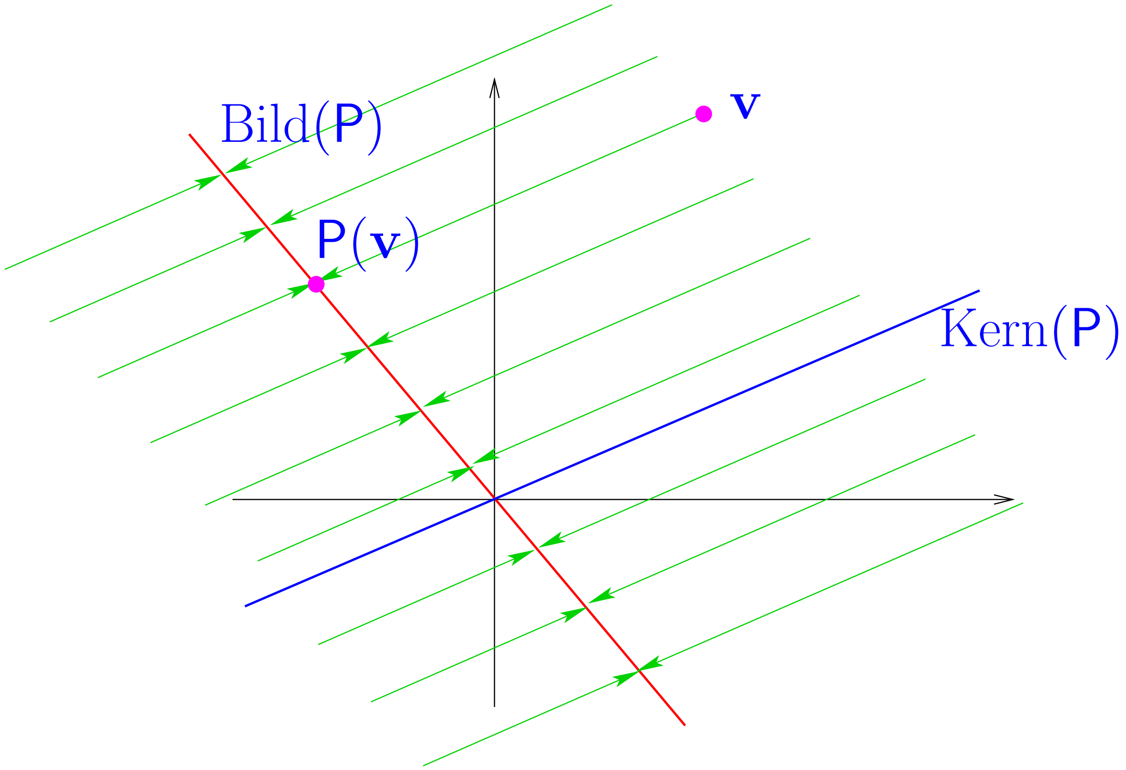
- $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}$,
- $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{\mathbf{0}\}$.

Satz VI.5.0.D (Raumzerlegung durch Projektionen)**.**
Für eine Projektion $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *gilt*

$$\begin{array}{c} \mathcal{V} = \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) + \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \;, \\ \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \cap \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) = \{\mathbf{0}\} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V} = \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \oplus \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \;.$$

Man bezeichnet P dann als Projektion auf $\mathrm{Bild}(\mathsf{P})$ in Richtung von $\mathrm{Kern}(\mathsf{P})$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



◁ Veranschaulichung in 2D

Komplementäre Unterräume zu einer Projektion P

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VI.5.0.G (Spezielle Matrixdarstellung von Projektionen)**.**
Zu jeder Projektion $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ *gibt es eine Basis* $\mathfrak{B}_V$ *von* V*, so dass* P *die Matrixdarstellung*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

besitzt, wobei $n = \dim \mathcal{V}$, $r = \operatorname{Rang} \mathsf{P}$, *und* $\mathbf{O}$ *für Nullmatrizen geeigneter Grösse steht.*

Konkrete Wahl von $\mathfrak{B}_V$ in Satz VI.5.0.G

$$\mathfrak{B}_V = \{ \underbrace{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^r}_{\text{Basis von } \mathrm{Bild}(\mathsf{P})} , \underbrace{\mathbf{b}^{r+1}, \dots, \mathbf{b}^n}_{\text{Basis von } \mathrm{Kern}(\mathsf{P})} \} . \qquad \text{(VI.5.0.H)}$$

Orhtogonalprojektionen

Nun $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (→ Definition IV.1.1.A)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Verallgemeinerung eines Konzepts aus Unterabschnitt 4.2.3:

Definition VI.5.0.I (Orthogonalprojektion).
Eine Projektion $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *heisst Orthogonalprojektion, falls* $\mathbf{v} - \mathsf{Q}(\mathbf{v})$ *für jedes* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *orthogonal zu* $\mathrm{Bild}(\mathsf{Q})$ *ist, d.h., falls*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} - \mathsf{Q}(\mathbf{v}) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \text{und alle} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\mathsf{Q}) .$$

Satz VI.5.0.J (Orthogonalität von Bild und Kern bei Orthogonalprojektionen)**.**
Eine Projektion $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ *ist* genau dann *eine* Orthogonalprojektion*, wenn*

$$\mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \perp \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \ .$$

P Orthogonalprojektion ➢ $\mathrm{Kern}(\mathsf{P}) = \mathrm{Bild}(\mathsf{P})^{\perp}$
(vgl. Definition IV.3.2.B „Orthogonales Komplement”)

Unterabschnitt 4.2.3: Darstellungsformel für Orthogonalprojektionen ($\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $\mathrm{Rang}\,\mathbf{B} = k$)

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{q} \quad = \text{Orthogonalprojektion auf} \quad \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) \ .$$

Korollar VI.5.0.K (Spezielle Matrixdarstellung von Orthogonalprojektionen)**.**
Ist P *eine Orthogonalprojektion, so können die speziellen Basen aus Satz VI.5.0.G orthonormal (→ Definition IV.3.1.A) gewählt werden.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.6 Isometrien im Euklidischen Raum

Hier $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ mit Euklidischem Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (→ Definition IV.1.1.A) und induzierten Normen $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ (→ Definition IV.1.2.A)

6.6.1 Lägenerhaltung

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.6.1.A (Isometrie)**.**
Eine lineare Selbstabbildung $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *heisst Isometrie oder längenerhaltend, wenn*

$$\|\mathsf{Q}(\mathbf{v})\|_W = \|\mathbf{v}\|_V \quad \textit{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{V} .$$

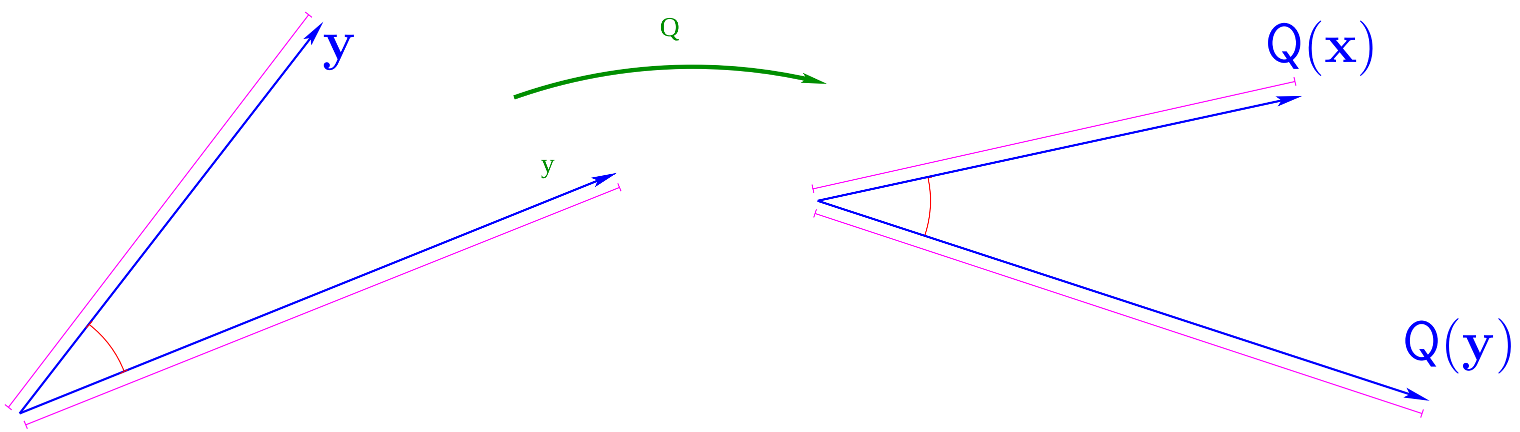
Satz VI.6.1.C (Isometrien sind injektiv)**.**
Für jede Isometrie $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *gilt, dass* $\mathrm{Kern}(\mathsf{Q}) = \{\mathbf{0}\}$.

❶ ▶ Notwendig $\dim \mathcal{W} \geq \dim \mathcal{V}$

❷ ▶ Längenerhaltende lineare Selbstabbildungen sind bijektiv

Satz VI.6.1.D (Längenerhaltung impliziert Winkelerhaltung)**.**
Genau die längenerhaltenden linearen Abbildungen erhalten das Skalarprodukt, d.h. für jede Isometrie $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *gilt*

$$\langle \mathsf{Q}\mathbf{x}, \mathsf{Q}\mathbf{y} \rangle_W = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \, .$$



Isometrien sind winkeltreu

Gleiche Längen, gleiche Winkel

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VI.6.1.F (Darstellung von Isometrien durch orthogonale Matrizen)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$ *Orthonormalbasen (ONB) von* $\mathcal{V}$ *bzw.* $\mathcal{W}$ *und* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *(*$n = \dim \mathcal{V}$*,* $m = \dim \mathcal{W}$*) die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$*.*
Dann ist L genau dann *eine* Isometrie*, wenn* $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$*, also wenn die Spalten von* $\mathbf{A}$ *orthonormal sind.*

► Längenerhaltende lineare *Selbstabbildungen* werden bzgl. jeder ONB durch eine orthogonale Matrix dargestellt.

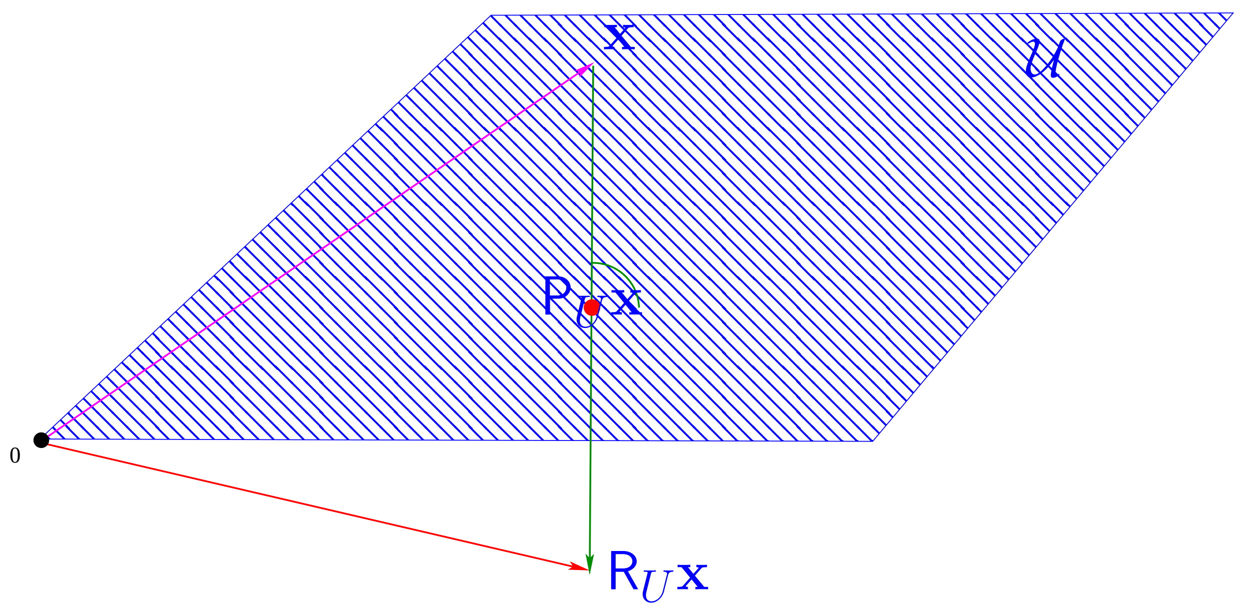
6.6.2 Spiegelungen

Hier $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition VI.6.2.G (Spiegelung)**.**
Sei $n := \dim \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ *ein Unterraum von* $\mathcal{V}$ *und* P_U *die orthogonale Projektion auf* $\mathcal{U}$*. Die lineare Abbildung*

$$\mathsf{R}_U := 2\mathsf{P}_U - \mathsf{Id} \in \mathcal{L}(V, V)$$

ist die Spiegelung an $\mathcal{U}$*.*



◁ Veranschaulichung in 3D

Spiegelung an $\mathcal{U}$

$$\mathsf{R}_U(\mathbf{x}) = \mathsf{P}_U(\mathbf{x}) + (\mathsf{P}_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x})$$

Satz VI.6.2.J (Spiegelungen sind längenerhaltend)**.**
Jede Spiegelung ist eine Isometrie.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.6.3 Drehungen

6.6.3.1 Drehungen im $\mathbb{R}^2$

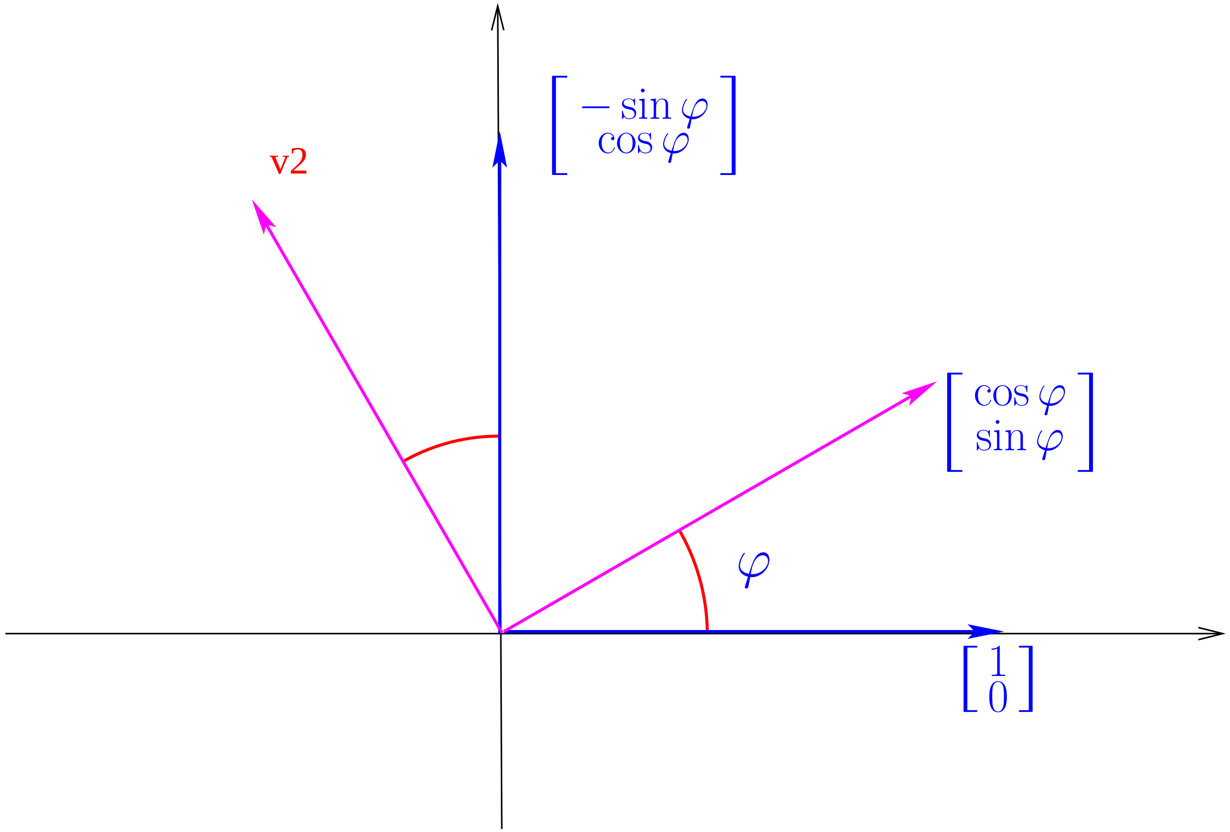
Definition VI.6.3.K (Drehung in der Ebene)**.**
Eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ ist jede lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$ durch eine Matrix der Form

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \;, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\;.$$

beschrieben wird. Dabei heisst φ der Winkel der Drehung.

Satz VI.6.3.K (Matrixdarstellung von Drehungen in der Ebene)**.**

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



$\triangleleft$ Drehung um $\mathbf{0}$ um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigensinn)

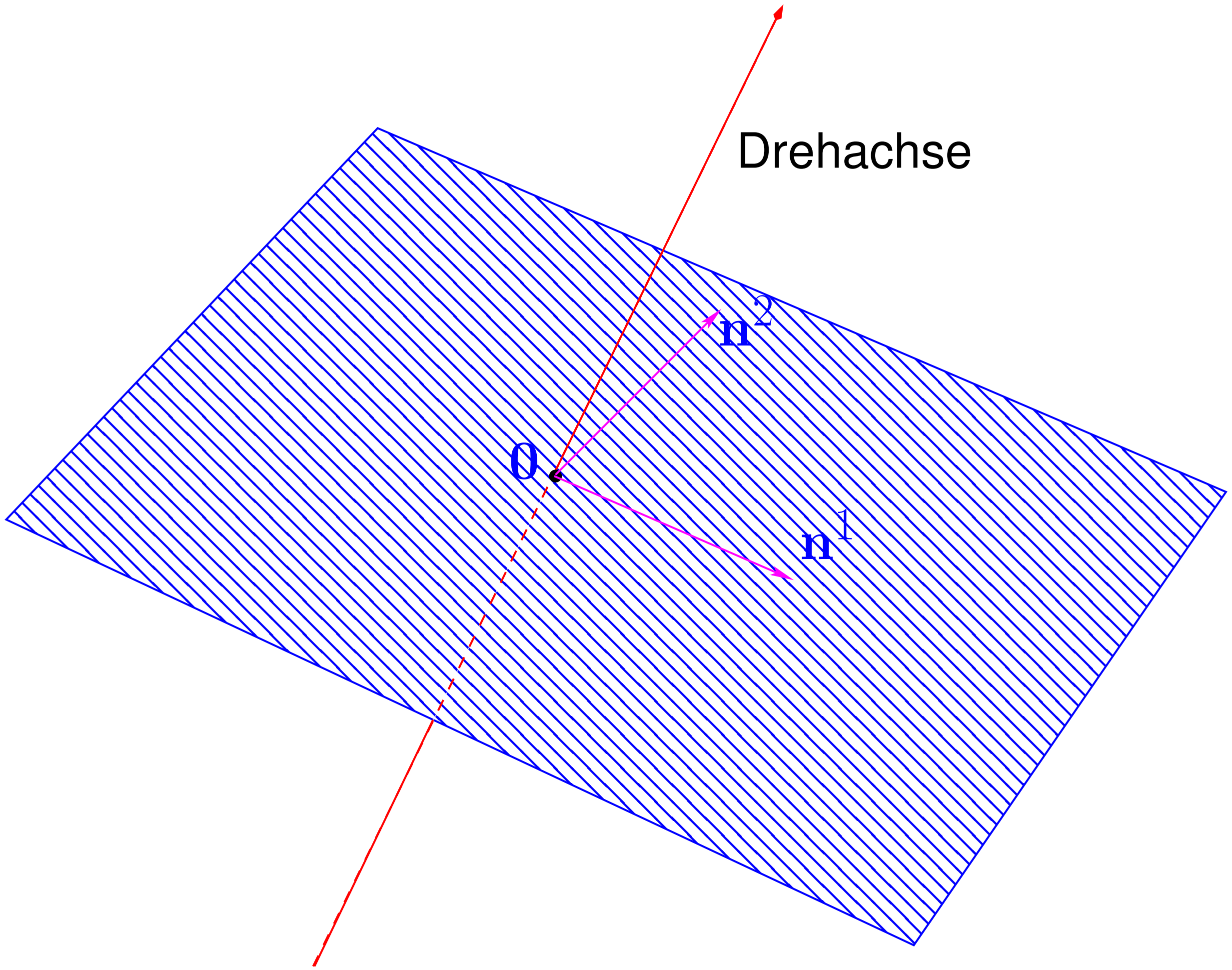
6.6.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$

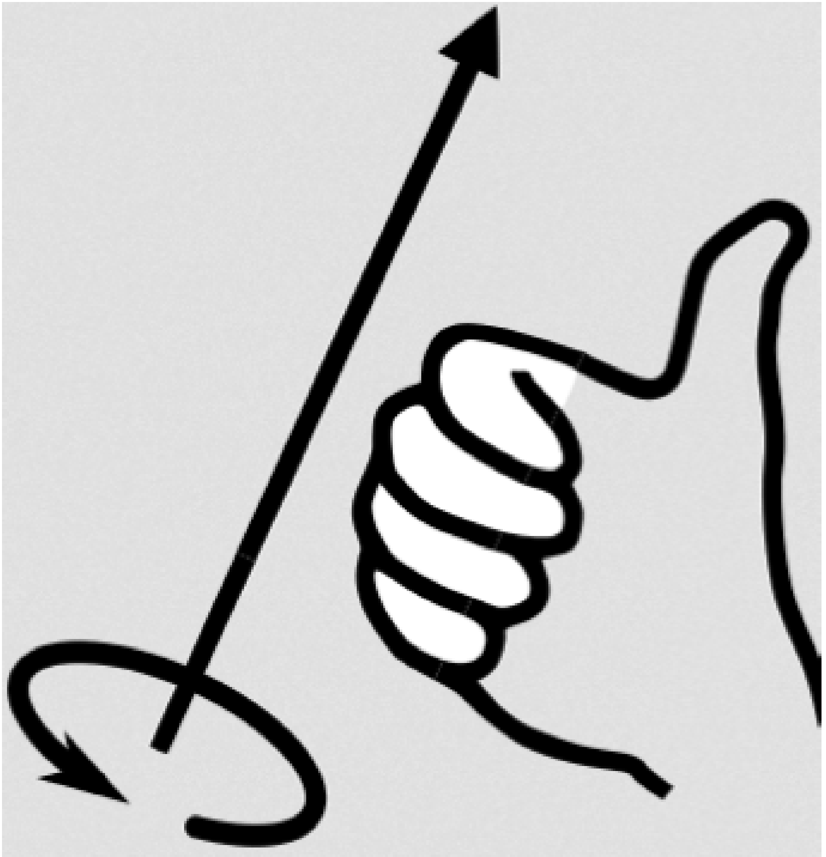
Definition VI.6.3.L (Drehung in 3D)**.**
Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zur der es eine Basis $\{\mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ mit orthonormalen Vektoren $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2$ so gibt, dass ihre Matrixdarstellung bzgl. dieser Basis die Gestalt

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} , \quad \textit{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi[\; ,$$

hat. Dann heisst φ der Drehwinkel und die Gerade $\mathrm{Span}\{\mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2\}$ ist die Drehachse.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ





Rechte-Hand-Regel

Berechnung der Matrixdarstellung einer Rotation:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Listing 6.3: Berechnung der Matrixdarstellung einer Rotation in der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$

```
function M = rotmatrix(a,phi)
% MATLAB function computing the matrix representation of a rotation about the
% axis in direction of the vector a ∈ ℝ³ with angle φ.
% Note: Right hand rule should be applied to fix the sense of the rotation,
% but, for the sake of simplicity, this is not done in this code.

% First compute a special orthonormal basis with the normalized vector
% a as first element. This can be done by means of the full QR-decomposition
% of the 3 × 1-"matrix" a.
[Q,R] = qr(a);
% This is the matrix representation of the rotation with respect to the
% specical orhtoonormal basis
c = cos(phi); s = sin(phi);
D = [1 , 0 , 0 ;...
     0 , c , -s ;...
     0 , s , c ];
% Finally compute the transformation of the matrix representation.
% Note that a prime in MATLAB denotes transposition.
M = Q*D*Q';
```

7 Diagonalisierung

LINK zur Vorlesungsniederschrift für Kapitel 7

7.1 Motivation: Lineare Rekursionen

Beispiel VII.1.0.P (Altersstruktur einer Population).

Zustandsraum $\mathcal{V} := \mathbb{R}^n$: $n \in \mathbb{N}$ $\hat{=}$ maximales Alter
$\mathbf{x} \in \mathcal{V} \succ (\mathbf{x})_i$ $\hat{=}$ Anzahl Weibchen im i. Lebensjahr, $i \in \{1, \ldots, n\}$

Modellparameter: $f_i \in \mathbb{R}^+$: Durchschnittliche Anzahl von weiblichen Nachkommen eines Weibchens im i. Lebensjahr (fecundicity)
$m_i \in [0, 1]$: Todeswahrscheinlichkeit für ein Weibchen im i. Lebensjahr (mortality)

Listing 7.1: (agestructpop.m) Simulation der Entwicklung der Altersstruktur einer Population in MATLAB

```
function agestructpop(x0,m,f,maxsteps)
% Simulation of evolution of age structured population, the vector x0
% pasess the number of individuals in each age group in the beginning, the
% vectors m and f specify mortality and fecundicity. All vectors must be of
% the same length.
n = numel(x0); % Maximum age

% set up propagation matrix for linear evolution
A = [f';[diag(1-m(1:n-1)),zeros(n-1,1)]];
% Figure for visualization
figure('name','evolution of age structured population');
% Evolution loop
if (nargin < 4), maxsteps = 100; end
totnr = [0, sum(x0)];
x = x0;
for k=1:maxsteps
  bar(x,'r'); xlabel('age'); ylabel('no of females x 1000');
  title(sprintf('Year %i',k-1));
  reply = input('Continue? Y/N [Y]: ','s');
  if (~isempty(reply)), break; end
  x = A*x; % Update population; advance one year
  totnr = [totnr; k, sum(x)];
end
% Plot total number of individuals
figure('name','total no');
plot(totnr(:,1),totnr(:,2),'m-*');
xlabel('{\bf age}'); ylabel('{\bf no of females x 1000}');
title('{\bf Total number of females in different years}');
```

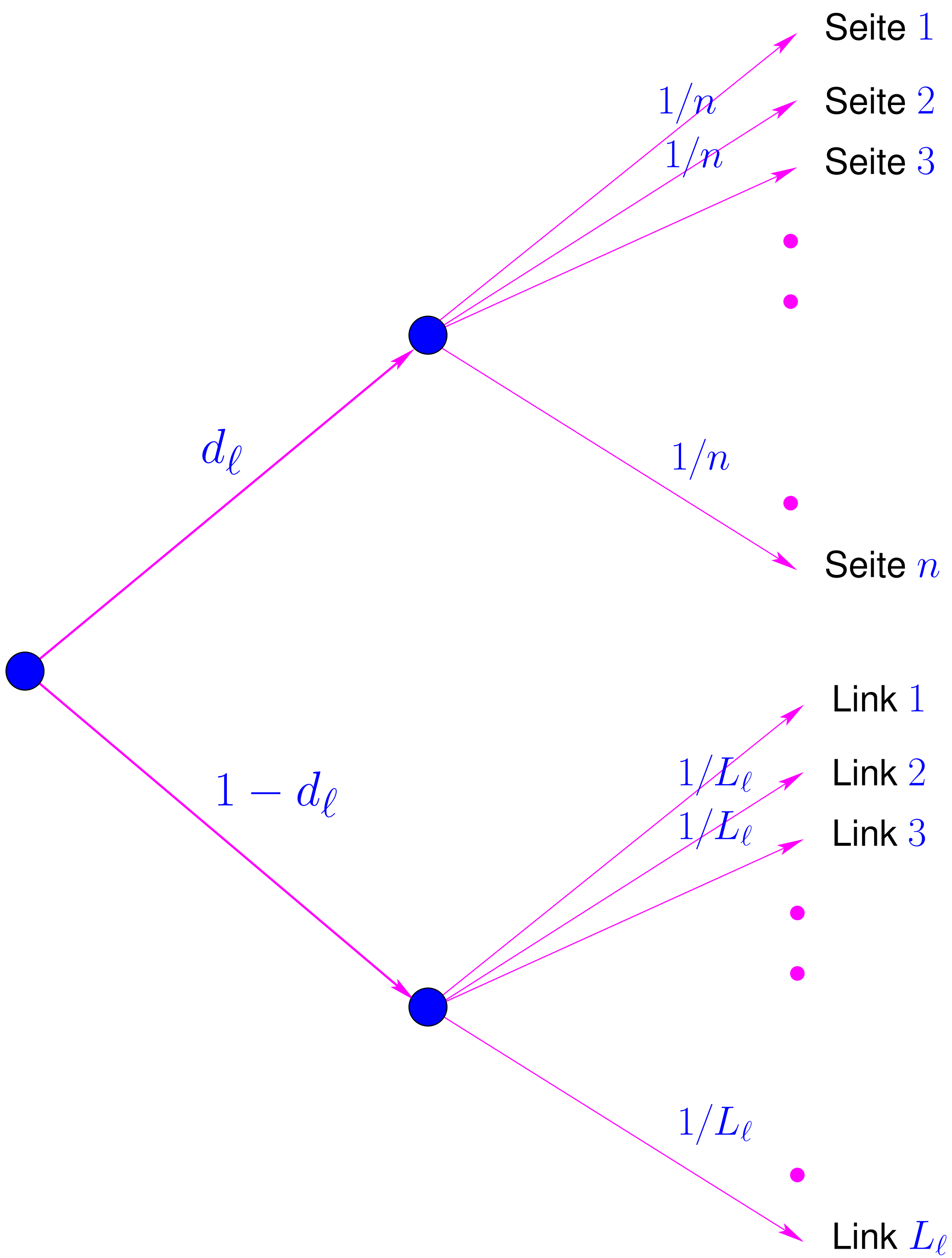
Beispiel VII.1.0.Q ((Vereinfachter) Page-Rank Algorithmus). → [2]

- „Modellinternet” mit n Seiten, nummeriert $1, \dots, n$.
- $L_\ell \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Links auf Seite ℓ, $\ell \in \{1, \dots, n\}$
- Clickverhalten eines Zufallssurfers, der sich aktuell auf Seite ℓ befindet:
  - Mit der Wahrscheinlichkeit ($d^* \in \,]0, 1[$ gegeben)

$$d_\ell := \begin{cases} 1 & \text{, wenn} \quad L_\ell = 0 \,, \\ d^* \in \,]0,1[& \text{, wenn} \quad L_\ell > 0 \,, \end{cases}$$

    springt der Surfer gleichwahrscheinlich zu einer beliebigen der n Webseiten.
  - Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - d_\ell$ folgt er gleichwahrscheinlich einem beliebigen der L_ℓ Links auf Seite ℓ.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Verhalten des Zufallssurfers auf Seite ℓ:
◁ Bedingte Wahrscheinlichkeiten

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Listing 7.2: (prpowitsim.m) Simulation der Entwicklung der Altersstruktur einer Population in MATLAB

```
function prpowitsim(d,Nsteps)
% MATLAB way of specifying Default arguments
if (nargin < 2), Nsteps = 100; end
if (nargin < 1), d = 0.15; end
% load connectivity matrix and build transition (recursion) matrix
load harvard500.mat; A = prbuildA(G,d);
N = size(A,1); x = ones(N,1)/N;

figure('position',[0 0 1200 1000]);
bh = bar(1:N,x,'hist'); set(bh,'facecolor','r'); axis([0 N+1 0
  0.1]);
% Linear evolution for stochastic recursion matrix A
for l=1:Nsteps
  pause; x = A*x; bh = bar(1:N,x,'hist');
    set(bh,'facecolor','r'); axis([0 N+1 0 0.1]);
  title(sprintf('{\\bf click number %d}',l),'fontsize',32);
  xlabel('{\bf harvard500 data set: no. of page}','fontsize',14);
  ylabel('{\bf probability for surfer on page}','fontsize',14);
    drawnow;
end
```

Definition VII.1.0.A (Lineare Rekursion)**.**
Für eine gegebene quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst eine der Vorschrift*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} \;, \quad k \in \mathbb{N}_0 \;,$$

genügende Folge $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots) \subset \mathbb{R}^n$ *von Spaltenvektoren eine (homogene) lineare Rekursion mit Startvektor* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *und Rekursionsmatrix (Propagationsmatrix)* $\mathbf{A}$.

Definition VII.1.0.C (Stochastische Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst stochastisch, wenn*

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P})_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \;.$$

(Alle Spaltensummen $= 1$*)*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VII.1.0.E (Stationäre Markov-Kette)**.**

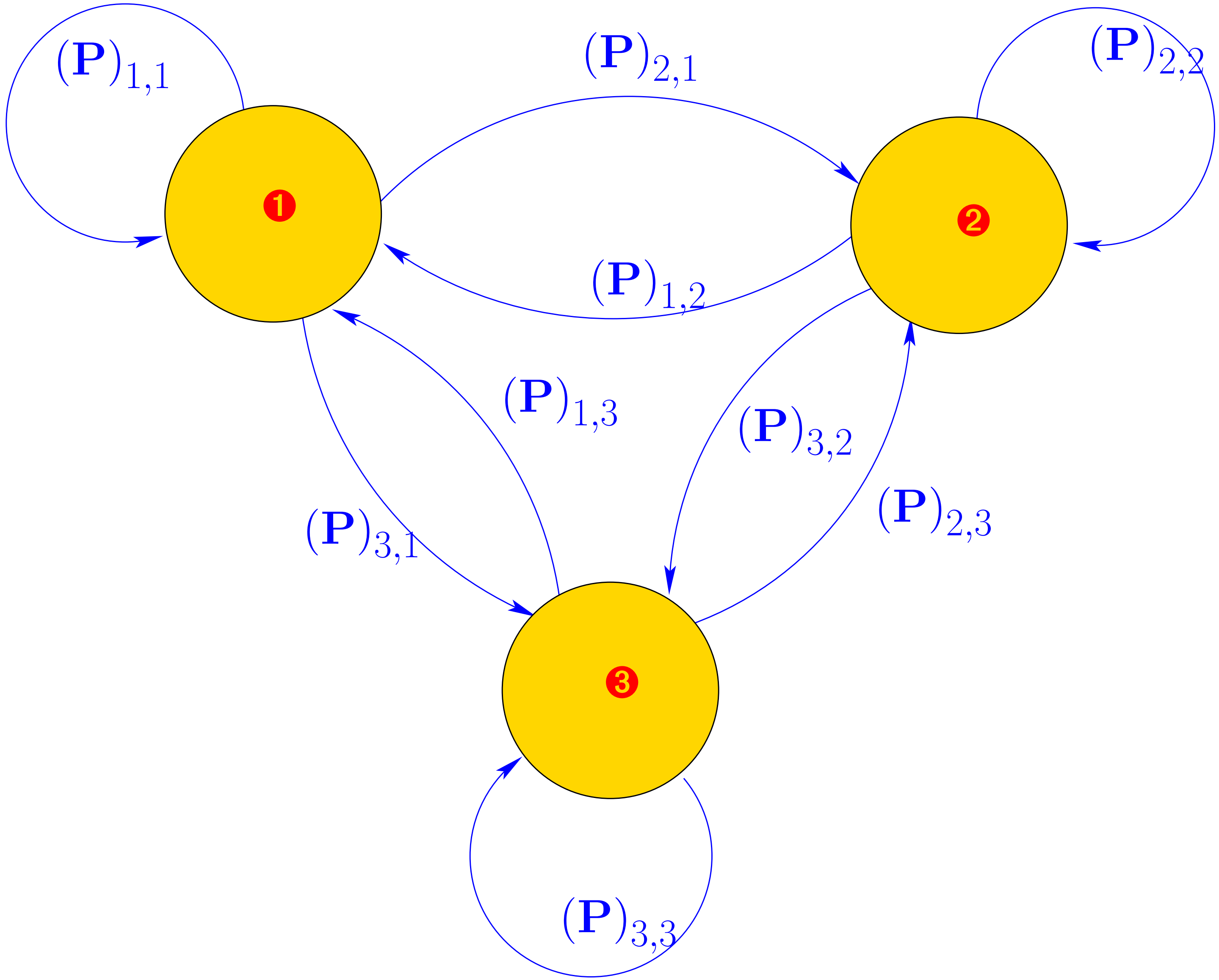
Eine Stationäre Markov-Kette ist eine homogene lineare Rekursion mit

(i) einer stochastischen *Propagationsmatrix,*

(ii) einem Startvektor für den $\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}^{(0)})_j = 1$.

Interpretation einer stationären Markov-Kette im $\mathbb{R}^n$ mit Propagationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$:

- Modell für System mit n Zuständen
- $(\mathbf{x}^{(k)})_j \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im $k.$ Schritt in Zustand j befindet.
- $(\mathbf{P})_{i,j} \hat{=}$ Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand j in Zustand i

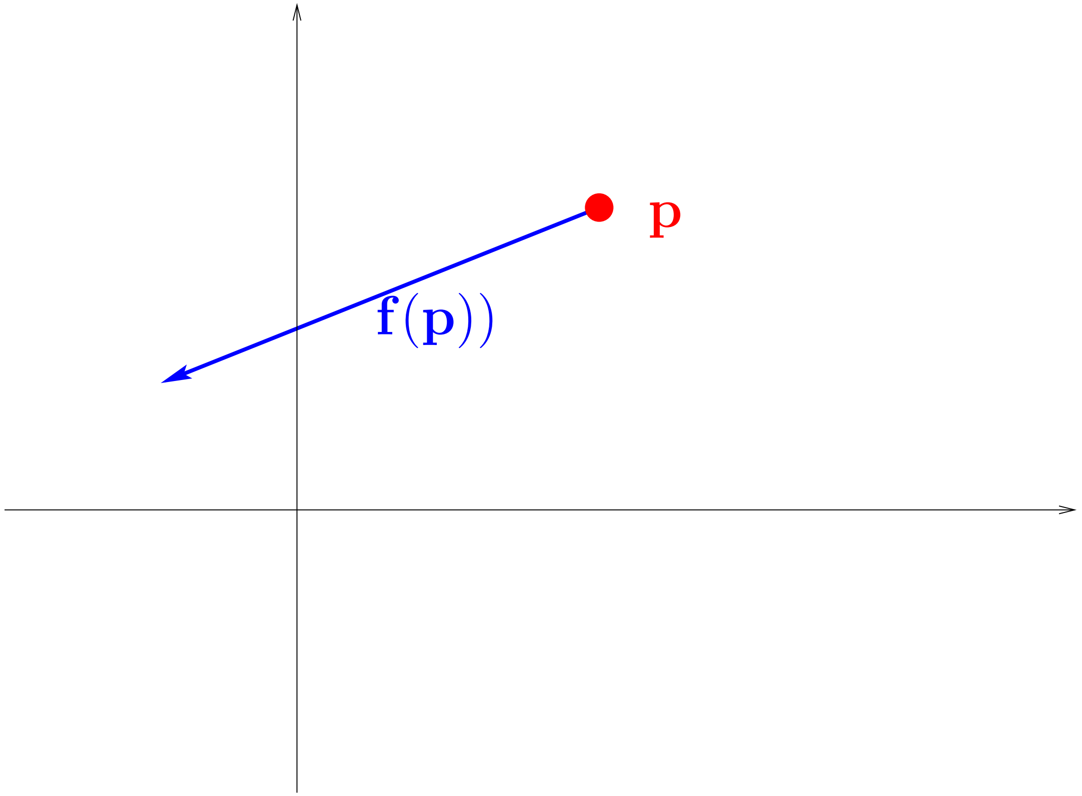


◁ Schema einer stationären Markov-Kette mit $n = 3$ Zuständen, und Übergangswahrscheinlichkeiten $(\mathbf{P})_{i,j}$

Beispiel VII.1.0.R (Diskretes dynamisches System).

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \hat{=}$ Kraftfeld: $\quad \mathbf{f} : \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{Position} & \mapsto \text{wirkende Kraft} \end{cases}$,
- $\mathbf{p}^{(k)} \hat{=}$ Position des Teilchens im k. Zeitschritt,

- $\mathbf{v}^{(k)} \hat{=}$ Geschwindigkeit des Teilchens im k. Zeitschritt,
- Zeitschrittlänge $\tau > 0$.



◁ In der Ebene (mit Kartesischem Koordinatensystem)

Kraft $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ auf Punktmasse an Position $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)} &= \tau \cdot \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k+1)}) + \mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k)})\big)\ ,\\ \mathbf{p}^{(k+1)} - \mathbf{p}^{(k)} &= \tau \cdot \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{v}^{(k+1)} + \mathbf{v}^{(k)}\big)\ .\end{aligned} \quad \text{(VII.1.0.S)}$$

Lineare Rückstellkraft: $\mathbf{f}(\mathbf{p}) := -\mathbf{A}\mathbf{p}$ mit symmetrischer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

Listing 7.3: (movingparticle.m) Simulation der Bewegung eines Teilchens im linearen Kraftfeld

```
function trajectory = movingparticle(A,p0,v0,tau,Nsteps)
% Simulation and visualization of the movement of a particle in a linear
% force field (defined by matrix A, harmonic oscillator) with implicit
% midpoint rule and uniform timestep tau. Initial conditions passed in
% p0, q0.
x = [v0;p0]; % Initial state
M = 0.5*tau*[zeros(2,2), -A;eye(2), zeros(2,2)];
% Evolution loop
for k=1:Nsteps
  title(sprintf('Moving  particle in linear force field: timestep %i',k));
  plot(x(3,end),x(4,end),'r.'); drawnow;
  % Update of velocity and position
  x = (eye(4)-M)\(eye(4)+M)*x;
end
```

◇

Lineare skalare Mehrtermrekursionen

Definition VII.1.0.T (Lineare skalare Mehrtermrekursion)**.**
Für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *heisst eine der Gleichung*

$$\xi^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi^{(k-j+1)} , \quad k \geqslant m-1 ,$$

genügende Zahlenfolge $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots)$ *eine* m*-Term-Rekursion mit Startwerten* $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(m-1)}$.

7.2 Matrixdiagonalisierung

Definition VII.2.0.A (Diagonalisierbarkeit einer Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst diagonalisierbar, wenn es eine* invertierbare *Matrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *und Zahlen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Diagonalisieren von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ in MATLAB:

(i) `[S,D] = eig(A)` : berechnet $\mathbf{S}$ und $\mathbf{D}$,

(ii) `lambda = eig(A)` : berechnet nur die λ_i.

Kubische asymptotische Komplexität: $O(n^3)$ **!**

(Billiger für *manche* dünnbesetzte, symmetrische Matrizen)

7.2.1 Anwendung: Geschlossene Darstellung linearer Rekursionen

Satz VII.2.1.K (Darstellungsformel für Glieder linearer Rekursionen)**.**
Eine lineare Rekursion $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *(→ Definition VII.1.0.A) mit einer diagonalisierbaren Rekursionsmatrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *für die* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$, *gemäss Definition VII.2.0.A,*

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \;, \quad k \in \mathbb{N} \;.$$

Satz VII.2.1.N (Wachstums- und Abklingverhalten linearer Rekursionen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *diagonalisierbar gemäss Definition VII.2.0.A:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1} \quad \textit{mit} \quad \lambda_\ell \in \mathbb{R}\;, \quad \ell \in \{1, \dots, n\}\;.$$

Wir definieren

$$J^- := \{\ell \in \{1, \dots, n\} \colon |\lambda_\ell| \leq 1\}\;. \tag{7.2.1}$$

und

$$\mathcal{E}^- := \mathrm{Span}\{(\mathbf{S})_{:,\ell},\ \ell \in J^-\} \quad (=\{\mathbf{0}\},\ \textit{falls}\ J^- = \emptyset)\;. \tag{7.2.2}$$

Dann gilt für eine lineare Rekursion $(\mathbf{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$ *mit Rekursionsmatrix* $\mathbf{A}$*:*

$$\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}^- \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\| < \infty\;.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

7.2.2 Anwendung: Matrixfunktionen

Definition VII.2.2.C (Matrixpolynom)**.**
Sei $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$, *ein Polynom vom Grad* $d \in \mathbb{N}_0$ *mit Koeffizienten* α_ℓ*. Dann definiert*

$$p(\mathbf{A}) := \alpha_d \mathbf{A}^d + \alpha_{d-1} \mathbf{A}^{d-1} + \cdots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}_n$$

die Auswertung des Polynoms p *für die Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VII.2.2.E (Matrixpolynom für diagonalisierbare Matrizen)**.**
Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar *gemäss Definition VII.2.0.A:* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*.*
Dann gilt für jedes Polynom p

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{S}p(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & 0 & \ldots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & p(\lambda_n) \end{bmatrix} .$$

(Diagonalisierung vertauscht mit Polynomauswertung!)

Manche Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ganze Funktionen) lassen sich auf $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe („Polynom vom Grad ∞", [1, Abschnitt 2.12]) darstellen:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{(Exponentialreihe)} ,$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} ,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} .$$

Definition VII.2.2.G (Matrixexponentialfunktion und trigonometrische Matrixfunktionen)**.**
Wenn φ *für* $\exp$, $\sin$ *oder* $\cos$ *steht, so wird für eine gemäss Definition VII.2.0.A diagonalisierbare Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *mit* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$ *definiert*

$$\varphi(\mathbf{A}) := \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1} . \tag{VII.2.2.H}$$

Definition VII.2.2.J (Allgemeine Matrixfunktionen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *diagonalisierbar,* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$.
Ist die Funktion $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert auf einer (offenen) Menge* D *mit* $\lambda_\ell \in D$ *für alle* $\ell \in \{1, \dots, n\}$, *dann definiert*

$$\varphi(\mathbf{A}) := \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & 0 & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}\,. \qquad \text{(VII.2.2.H)}$$

die Matrixfunktion $\varphi(\mathbf{A})$.

7.3 Rechnen in $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^{m,n} \hat{=}$ Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}^n \hat{=}$ Menge der Spaltenvektoren Matrizen mit n komplexen Komponenten $\mathbb{C}$

Im $\mathbb{C}^n$ und mit komplexen Matrizen kann man (fast immer) so rechnen wie im $\mathbb{R}^n$, wenn man nur die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ benutzt.

(Fast) alle Konzepte und Resultate über reelle Vektoren/Matrizen übertragen sich auch auf den komplexen Fall.

z.B. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$: $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$.

z.B. auch die Konzepte der Invertierbarkeit, Diagonalisierbarkeit, etc.

Ausnahmen:

- Das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w}_j \ , \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \ . \tag{VII.3.0.A}$$

Dabei bezeichnet $\overline{}$ die komplexe Konjugation.

Konjugation bei Vertauschen der Vektoren! $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ mit $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ heissen weiterhin orthogonal.

Definition der Norm eines Vektors $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$ wie in Definition IV.1.2.A:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2} \qquad \text{(Beachte: } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}_0^+\text{)} \ .$$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\| \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

- Anstelle des Transponierten einer Matrix verwende das konjugiert Transponierte, kenntlich gemacht durch Superskript „H”:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{H}} := \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1m} & \dots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m,n} \ .$$

Diese Definition ist motiviert durch die Formel:

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{w} \rangle \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,m} , \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m \ . \qquad \text{(VII.3.0.B)}$$

- Der Begriff der orthogonalen Matrix ($\rightarrow$ Definition IV.3.3.B) wird ersetzt durch den Begriff der unitären Matrix.

Definition VII.3.0.C (Unitäre Matrix)**.**

Eine Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ heisst unitär, wenn $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}$.

Wegen (VII.3.0.B) beschreiben unitäre Matrizen Isometrien im $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt (VII.3.0.A).

Bemerkung VII.3.0.M (Komplexe Matrixarithmetik in MATLAB)*.*

MATLAB rechnet automatisch mit komplexen Matrizen, wenn Einträge komplexe Werte annehmen können.

$\triangle$

7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition VII.4.0.A (Eigenwerte und Eigenvektoren)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- *Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *heisst Eigenwert (EW) der Matrix* $\mathbf{A}$, *wenn* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$.
- *Ein Spaltenvektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *heisst Eigenvektor (EV) der Matrix* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$, *wenn*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \ .$$

- *Ist* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* $\mathbf{A}$, *so heisst der Unterraum* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ *der Eigenraum (ER) von* MA *zum Eigenwert* λ.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

✎ Notation: $\sigma(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A}\}$ (Spektrum von $\mathbf{A}$)

► Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ diagonalisierbar, $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ gemäss Definition VII.2.0.A, dann sind die Diagonaleinträge von $\mathbf{D}$ *genau* die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

Für eine Funktion $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (diagonalisierbar):

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset D \quad \Rightarrow \quad \sigma(\varphi(\mathbf{A})) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\} \; .$$

Matrixfunktion, Definition VII.2.2.J

Satz VII.4.0.B (Kriterium für Diagonalisierbarkeit)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ *ist genau dann diagonalisierbar im Sinn von Definition VII.2.0.A, wenn es eine* Basis *des* $\mathbb{C}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$ *gibt.*

Definition VII.4.0.C (Charakteristisches Polynom)**.**
Die Funktion

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & a_{2,3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{bmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{C} \, ,$$

heisst das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma VII.4.0.D (Charakteristisches Polynom)**.**
Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *ist ein Polynom vom Grad* $\leqslant n$ *(mit rellen Koeffizienten, falls* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$*).*

Korollar VII.4.0.E (Charakteristisches Polynome ähnlicher Matrizen)**.**
Die charakteristischen Polynome ähnlicher *Matrizen (→ Definition VI.4.0.D) sind gleich: Für beliebige* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *und invertierbare* $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gilt*

$$\chi_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}} = \chi_{\mathbf{A}} \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

- Das “charakteristische Polynom einer linearen Abbildung” ist ein sinnvolles Konzept (, da nicht abhängig von der Basis bzgl. derer die Matrixdarstellung der linearen Abbildung betrachtet wird.)

Satz VII.4.0.F (Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms)**.**
Das Spektrum einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *ist die Nullstellenmenge ihres charakteristischen Polynoms:*

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0\} \, .$$

► $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Satz VII.4.0.G (Spektrum von Matrix und Transponierter)**.**
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gilt*

$$\overline{\sigma(\mathbf{A})} = \sigma(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) \, .$$

Relevant für stationäre Markov-Ketten, siehe Definition VII.1.0.E:

Satz VII.4.0.P (Perron-Frobenius-Theorem)**.**
Für jede stochastische Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *(→ Definition VII.1.0.C) gilt:*

(i) 1 *ist der betragsgrösste Eigenwert von* $\mathbf{P}$*:* $1 \in \sigma(\mathbf{P}), 1 = \max\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma(\mathbf{P})\}$,

(ii) der Eigenraum zum Eigenwert 1 *ist eindimensional:* $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = 1$,

(iii) und es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 *mit ausschliesslich nicht-negativen Komponenten:* $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \quad \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *und* $(\mathbf{v})_\ell \geqslant 0, \ell \in \{1, \ldots, n\}$.

LINK zu Rechenbeispielen für die Diagonalisierung von 3×3-Matrizen.

7.5 Diagonalisierbarkeit

7.5.1 Allgemeine Kriterien

Erinnerung: Kriterium für Diagonalisierbarkeit aus Satz VII.4.0.B.

Satz VII.5.1.A (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)**.**
Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *seien* $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *Eigenvektoren zu* paarweise verschiedenen *Eigenwerten. Dann ist* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

Satz VII.5.1.B (Kriterien für Diagonalisierbarkeit II)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *mit Eigenwerten* $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *ist diagonalisierbar, wenn*

(i) sie n verschiedene *Eigenwerte hat (*$k = n$*), oder*

(ii) $\sum_{l=1}^{k} \dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_l \mathbf{I}) = n$.

Satz VII.5.1.C (Diagonalisierbarkeit und Eigenwerte von Projektionen (→ Definition VI.5.0.A))**.**
Erfüllt $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$, *dass* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, *dann ist* $\mathbf{P}$ *diagonalisierbar und* $\sigma(\mathbf{P}) \subset \{0, 1\}$.

7.5.2 Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen

Eines der wichtigsten Resultate der linearen Algebra:

Satz VII.5.2.D (Lemma von Schur)**.**
Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gibt es eine* unitäre *Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *so, dass* $\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}$ *eine (obere)* Dreiecksmatrix *ist. Deren Diagonaleinträge sind die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$*.*

Hilfsmittel für den Beweis:

Satz VII.5.2.E (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) := \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, *hat* mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z_0) = 0$*.*

Satz VII.5.2.F (Diagonalisierbarkeit von normalen Matrizen)**.**
Gilt für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*, dass* $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$*, dann gibt es eine* unitäre *Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n,n} .$$

Die $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *sind die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$*, die Spalten von* $\mathbf{U}$ *die zugehörige* orthonormale *Menge von Eigenvektoren.*

Spezielle Matrizen, die mit ihrer konjugiert Transponierten vertauschbar sind:

- Symmetrische Matrizen (Hermitesche Matrizen): $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$
- Schiefsymmetrische Matrizen: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{A}$
- Orthogonale Matrizen: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$
- Unitäre Matrizen: $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VII.5.2.G (Relle Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen, Hauptachsentransformation)**.**
Zu jeder symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine* orthogonale *Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n,n} .$$

Die Spalten von $\mathbf{Q}$ *bilden eine* Orthonormalbasis *des* $\mathbb{R}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$*.*

Satz VII.5.2.H (Spektrum unitärer Matrizen)**.**
Für die Eigenwerte einer unitären *Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *(→ Definition VII.3.0.C) gilt*

$$\sigma(\mathbf{Q}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\} .$$

Clickerfragen

Clickerfrage 7.5.1 (Autovermietung).

Eine lokale Autovermietung in Zürich führt Buch über die tägliche Bewegung ihrer Fahrzeuge zwischen den drei Standorten „HB”, „ZRH” und „ETH”:

- 40% der Fahrzeuge, die am HB ausgeliehen werden, werden an ZRH retourniert.
- 10% der Fahrzeuge, die am HB ausgeliehen werden, werden an der ETH zurückgegeben.
- 20% der Autos, die an ZRH gemietet werden, werden am HB zurückgegeben.
- 70% der Fahrzeuge, die an ZRH ausgeliehen werden, werden an der ETH zurückgebracht.
- 40% der Autos, die an der ETH gemietet werden, wandern zum HB.
- 50% der Fahrzeuge, die an der ETH ausgeliehen werden, werden an ZRH zurückgebracht.

Was ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten der zugehörigen stationären Markov-Kette?

(i)

$$\begin{bmatrix} 50 & 20 & 40 \\ 40 & 10 & 50 \\ 10 & 70 & 10 \end{bmatrix} .$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix} .$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 \end{bmatrix} .$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Clickerfrage 7.5.2 (Matrixfunktionen).

Welche der folgenden Aussagen sind für eine quadratische diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ korrekt?

(i) $\exp(\mathbf{A})$ ist invertierbar.

(ii) $\exp(\mathbf{A}) > 0$.

(iii) $\mathbf{x}^T \exp(\mathbf{A})\mathbf{x} \geqslant 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Wenn $\sigma(\mathbf{A}) \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dann sind äquivalent

$$\sin(\mathbf{A}) \quad \text{invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \quad \text{invertierbar.}$$

(v) $\sin(\mathbf{A} + 2\pi) = \sin(\mathbf{A})$.

The End

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Index

Beispiele und Bemerkungen

Definitionen

MATLAB-Programme

Symbole und Notationen

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Literaturverzeichnis

[1] M. Akveld and R. Sperb. Analysis i & ii. Vorlesungsskriptum ETH Zürich, 2010.

[2] A.N. Lengville and C.D. Meyer. *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[3] K. Nipp and D. Stoffer. *Lineare Algebra*. vdf Hochschulverlag, Zürich, 5 edition, 2002.

[4] G. Strang. *Lineare Algebra*. Springer, 2003.