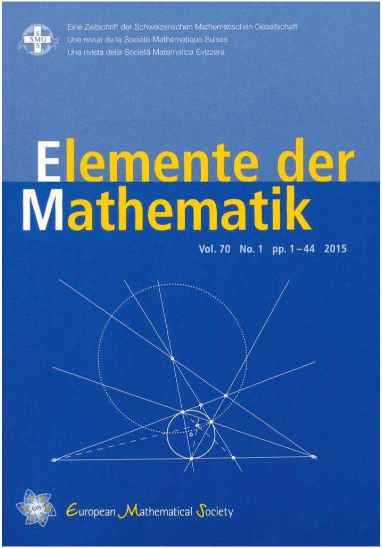
Aufgabenperlen aus Elemente der Mathematik 2010 – 2023

Stefan Grieder

Kantonsschule Hohe Promenade
Zürich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht
7.12.2023

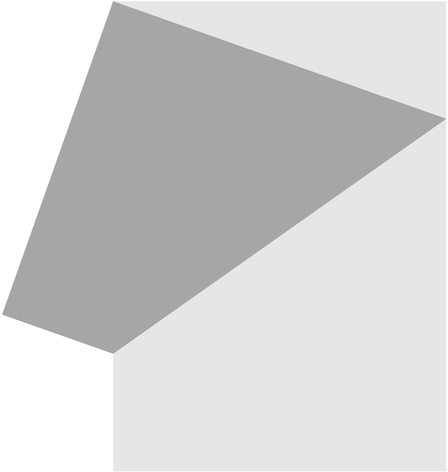
Eigentlich sind es nicht Aufgabenperlen sondern Lösungsperlen.


Eine Zeitschrift der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft
Une revue de la Société Mathématique Suisse
Una rivista della Società Matematica Svizzera
SMG
Elemente der Mathematik
Vol. 70 No. 1 pp. 1–44 2015
European Mathematical Society

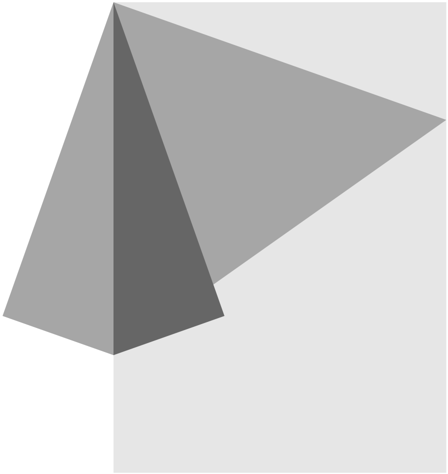
Aufgabe 1409 (Die einfache dritte Aufgabe)
Man falte das Blatt eines DIN A4 Zeichenblockes so, dass eine Ecke auf die gegenüberliegende Ecke zu liegen kommt. Die nun über den Block stehende Ecke des gefalteten Blattes wird entlang der Blockkante zurück ins Innere gefaltet. Zeige, dass die zurückgefaltete Ecke die Länge und Breite des darunter liegenden Blattes je im Verhältnis $2:1$ teilt.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

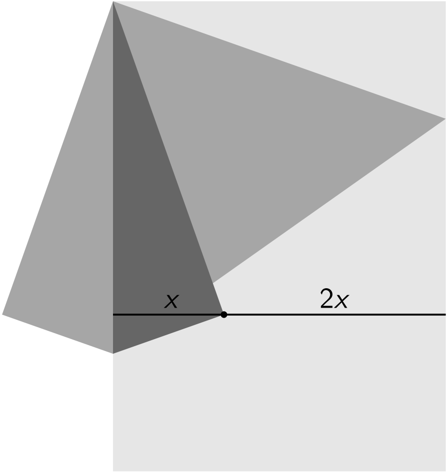
Aufgabe 1409 (2021)



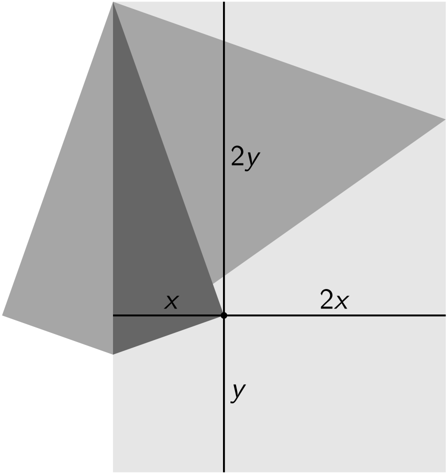
Aufgabe 1409 (2021)



Aufgabe 1409 (2021)

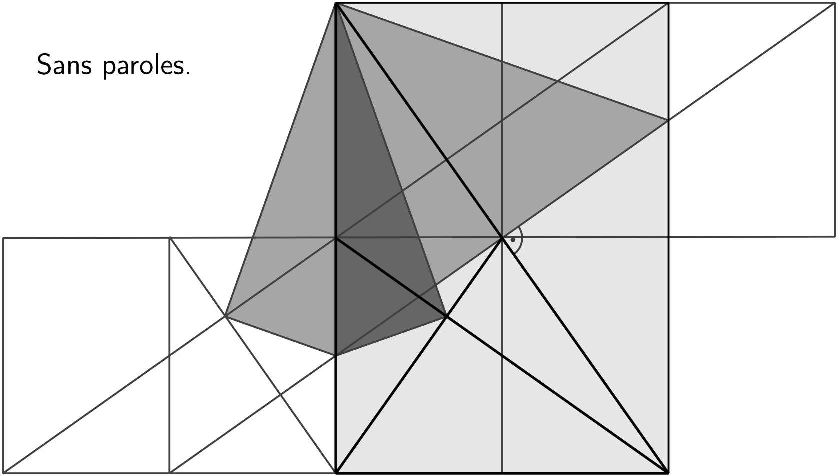


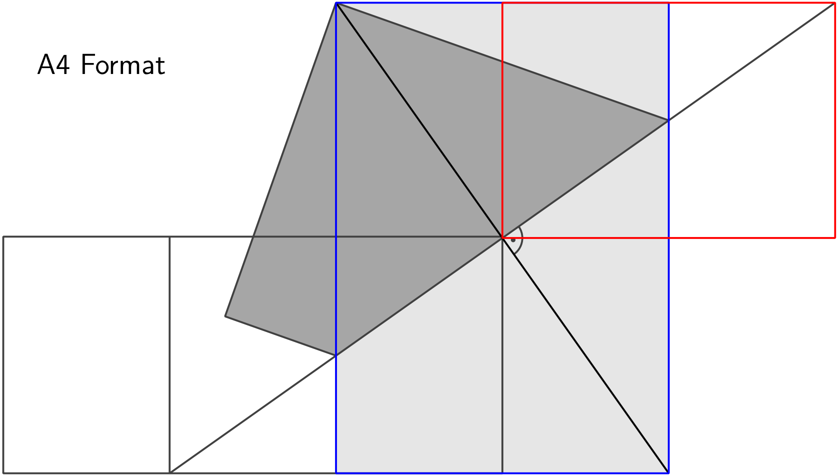
Aufgabe 1409 (2021)



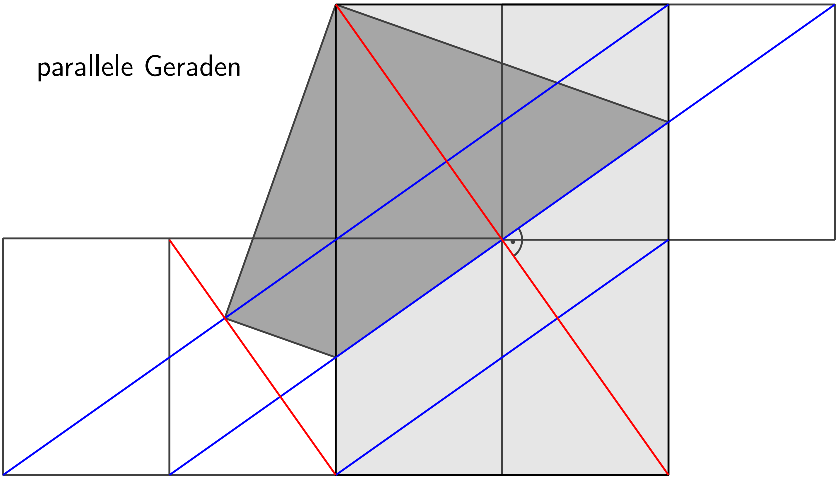
Lösung: François Sigrist Neuchâtel, CH

Sans paroles.

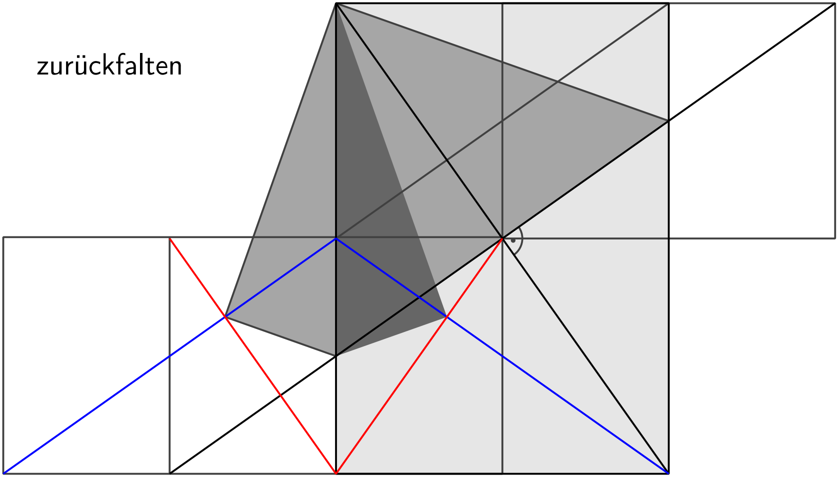



A4 Format

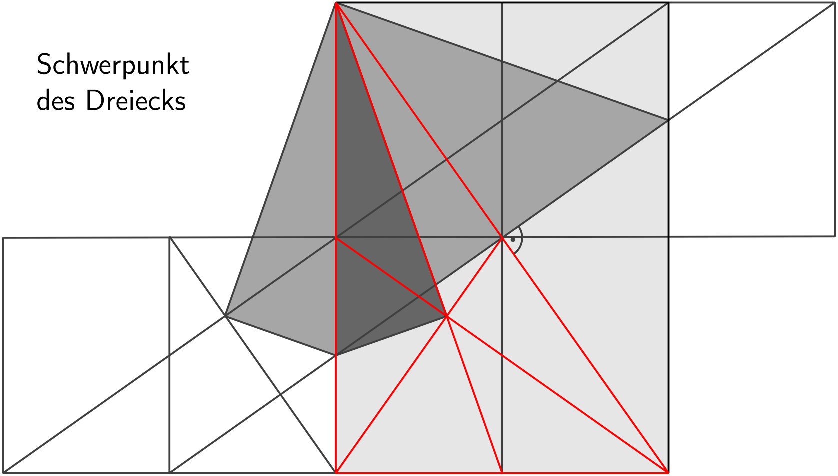
parallele Geraden



zurückfalten

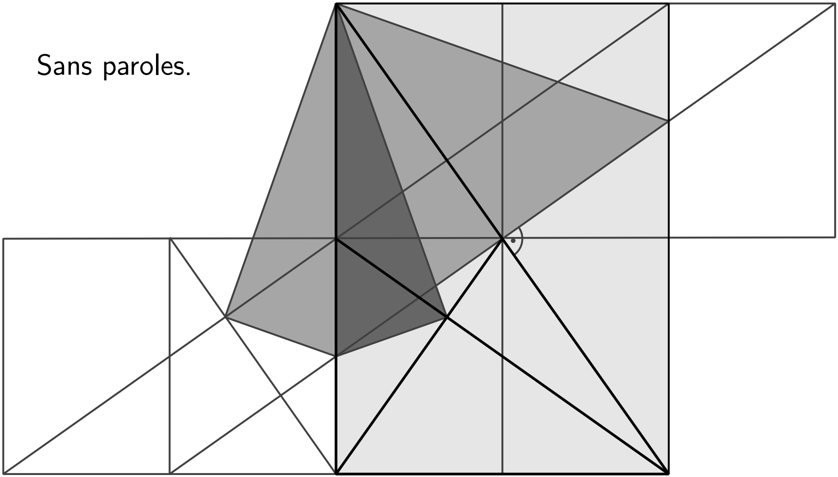


Schwerpunkt
des Dreiecks



Lösung: François Sigrist Neuchâtel, CH

Sans paroles.



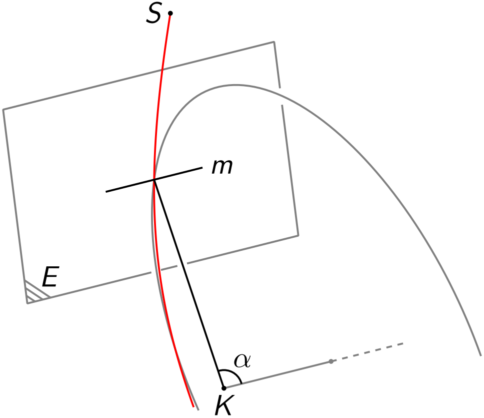
Aufgabe 1376 (Die einfache dritte Aufgabe)

Das folgende Bild entstand auf der Poya-Brücke in Fribourg: Die Sonne scheint durch das Schutzgitter, und ihre Spiegelbilder an den horizontalen Stäben des Gitters bilden eine Kurve, die Teil einer Hyperbel sein könnte.

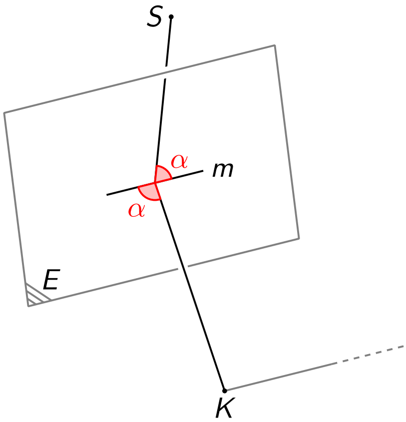
Ist das wirklich eine Hyperbel? Wenn ja, so gebe man die Achse und eine erzeugende Gerade des Kegels an, der diese Hyperbel als Schnitt mit der Ebene des Gitters erzeugt.

Hansklaus Rummler, Fribourg, CH

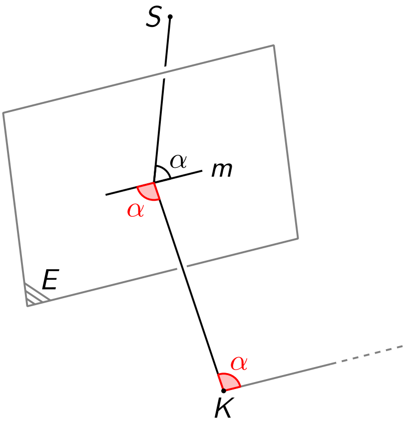
Lösung: Fritz Siegerist, Küsnacht, CH
Ja, es ist ein Ast einer Hyperbel. Die Kegelachse verläuft in Richtung der Gitterstäbe und durch die Kamera. Eine erzeugende Gerade des Kegels ist der direkte Sonnenstrahl in die Kamera.



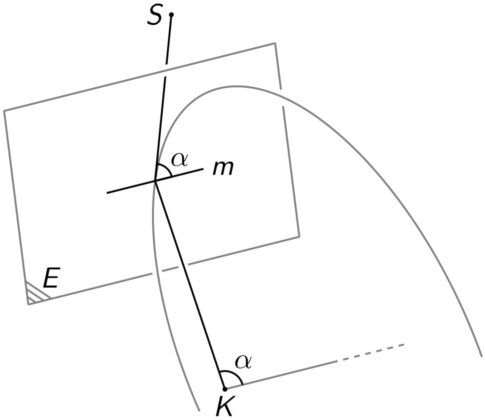
Reflexionsprinzip



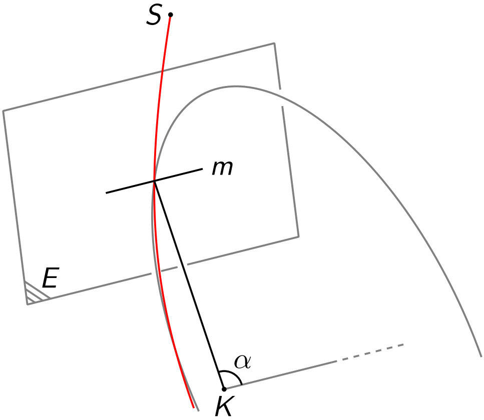
Wechselwinkel an Parallelen



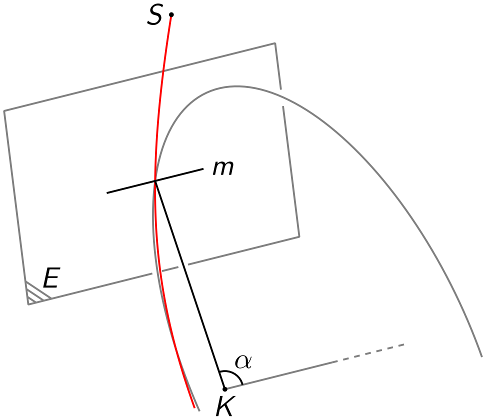
Winkel α für alle Sonnenstrahlen gleich
$\Rightarrow$ Kegel mit halbem Öffnungswinkel α



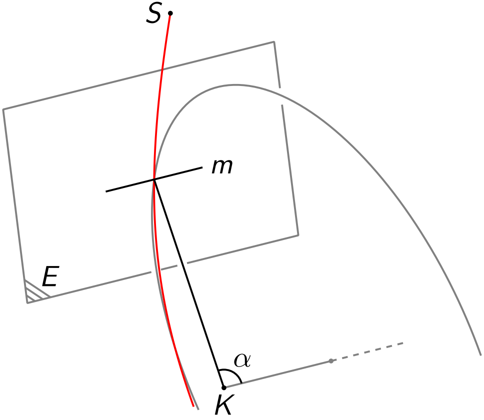
Schnittebene E parallel zur Kegelachse
$\Rightarrow$ Kegelschnitt ist eine Hyperbel



direkter Sonnestrahl tangential zum Gitterstab
$\Rightarrow$ Sonne liegt auf Hyperbel



Lösung: Fritz Siegerist, Küsnacht, CH
Ja, es ist ein Ast einer Hyperbel. Die Kegelachse verläuft in Richtung der Gitterstäbe und durch die Kamera. Eine erzeugende Gerade des Kegels ist der direkte Sonnenstrahl in die Kamera.



Aufgabe 1415 (Die einfache dritte Aufgabe):
Man beweise, dass die geschlossene Kurve

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cos(t) + 2\sin^3(t)\cos(t) \\ -5\sin(t) - 3\sin^2(t) + 2\sin^4(t) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ die konstante Breite 10 hat, also zwei (verschiedene) parallele Kurventangenten haben immer den Abstand 10.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

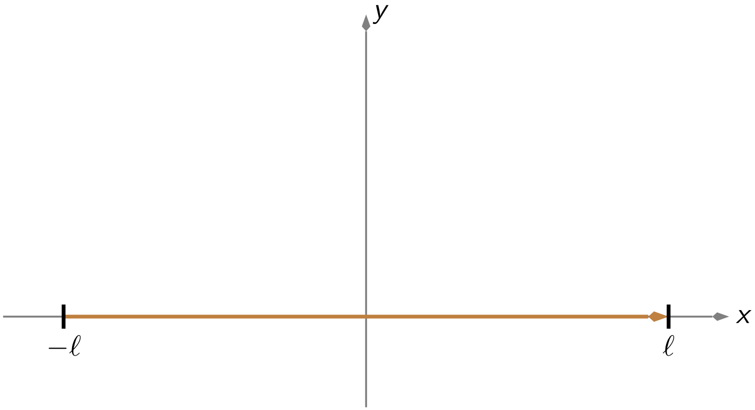
Die Lösung ist nicht schwer, wenn man (zurecht) vermutet, dass die parallelen Tangenten zu den Parameterwerten t und $t + \pi$ gehören.

Lösung: Gerhard Wanner, Genéve, CH

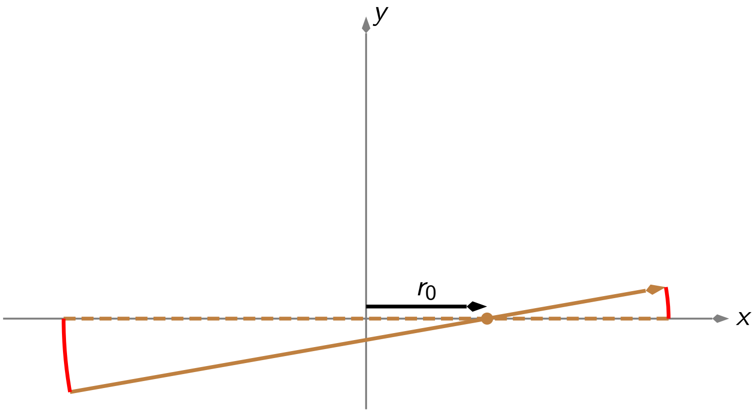
„Wir möchten nicht nur diese leichte Aufgabe nachrechnen, sondern auch verstehen, wie Herr Wyss (eventuell) auf diese Formeln kommen konnte.“

Anfangsposition

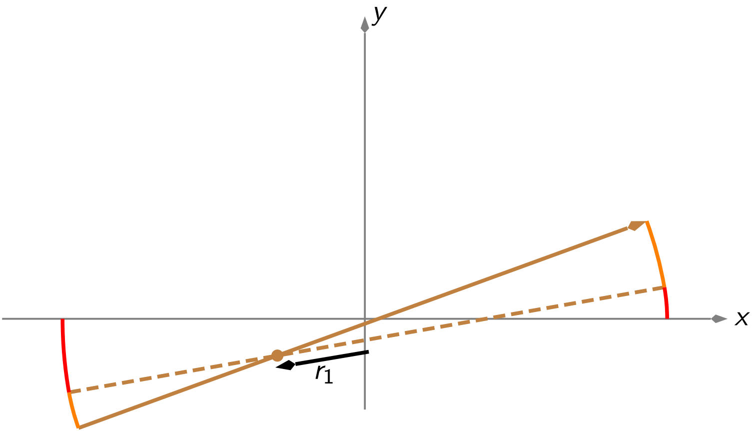
Horizontaler Stab der Länge 2ℓ im Ursprung zentriert.



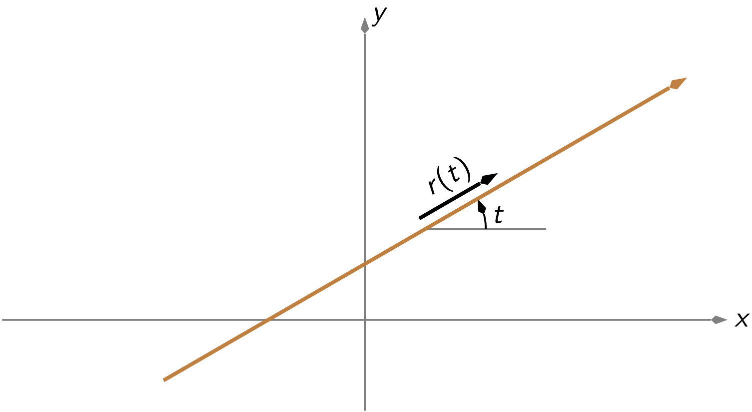
Im Abstand r_0 vom Mittelpunkt fixieren und drehen.
$\Rightarrow$ Kreisbogen mit parallelen Tangenten im Abstand 2ℓ.



Dann im Abstand r_1 vom Mittelpunkt fixieren und drehen, etc.



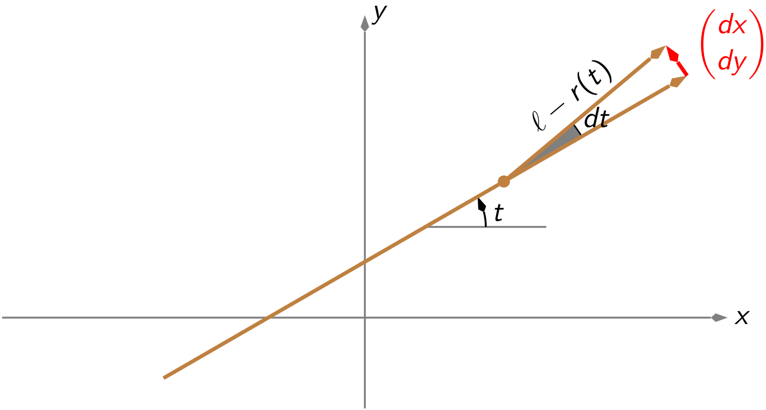
kontinuierlich machen: Funktion $r(t)$ mit $-\ell \leq r(t) \leq \ell$



Aufgabe 1415 (2021), Lösung: Gerhard Wanner

infinitesimal drehen

$\Rightarrow dx = -(\ell - r(t)) \cdot \sin(t)\, dt \qquad dy = (\ell - r(t)) \cdot \cos(t)\, dt$



und integrieren
$\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Endpunkte $(\pm\ell)$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \pm\ell + \int_0^t dx = \pm\ell - \int_0^t (\pm\ell - r(\tau))\sin(\tau)\,d\tau \\
y(t) &= \int_0^t dy = \int_0^t (\pm\ell - r(\tau))\cos(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

$$(0 \le t \le \pi)$$

nach Drehung um 180° muss Stab wieder in Ausgangsposition sein
d.h. Mittelpunkt ($\ell = 0$) wieder im Ursprung
$\Rightarrow$ Bedingung für Funktion $r(t)$

$$0 = \int_0^\pi r(\tau) \sin(\tau) \, d\tau$$

$$0 = \int_0^\pi r(\tau) \cos(\tau) \, d\tau$$

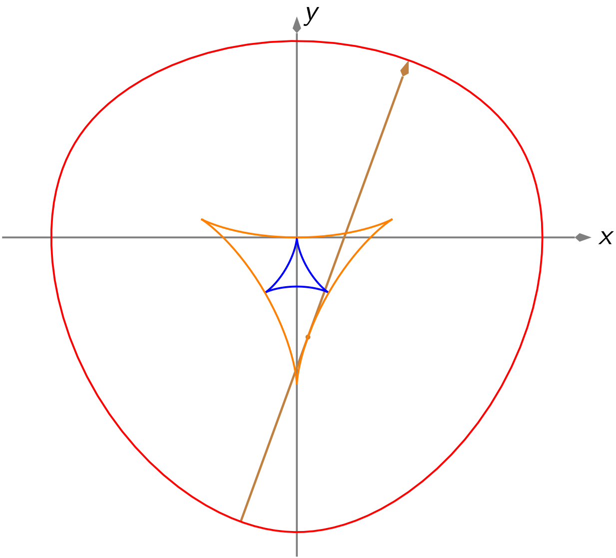
gilt zusätzlich $r(t+\pi) = -r(t)$
$\Rightarrow$ Parameterdarstellung mit $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell - \int_0^t (\ell - r(\tau)) \sin(\tau)\, d\tau \\ y(t) &= \int_0^t (\ell - r(\tau)) \cos(\tau)\, d\tau \qquad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Formeln von Wyss mit $r(t) = 2\sin(3t)$ und $\ell = -5$ (linkes Ende)

$$\begin{aligned} x(t) &= -5 - \int_0^t (-5 - 2\sin(3\tau))\sin(\tau)\,d\tau \\ &= -5\cos(t) + 2\sin^3(t)\cos(t) \end{aligned}$$

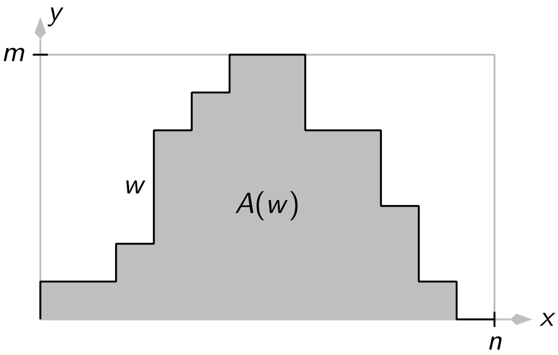
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (-5 - 2\sin(3\tau))\cos(\tau)\,d\tau \\ &= -5\sin(t) - 3\sin^2(t) + 2\sin^4(t) \end{aligned}$$


y
x

Aufgabe 1349 (Die einfache dritte Aufgabe)
G bezeichne die Menge aller minimalen Gitterwege w, die im ebenen Koordinatengitter im Punkt $(0,0)$ starten, zu einem Punkt $P(i,m)$ auf der Geraden $y=m$ aufsteigen und von P aus zum Punkt $(n,0)$ absteigen. (Die Variable i variiert dabei von 0 bis n und die beiden Äste dürfen auf der Geraden $x=i$ gemeinsame Segmente haben.) Jeder solcher Weg w berandet zusammen mit der x-Achse ein polygonales Gebiet mit Flächeninhalt $A(w)$. Man berechne $A(n,m)=\sum A(w)$, wobei sich die Summe über alle Wege aus G erstreckt.

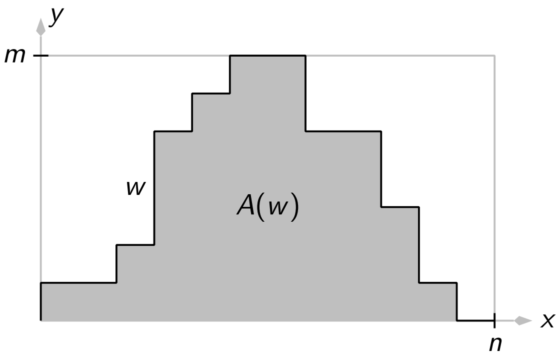
Janny C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1349 (2016)

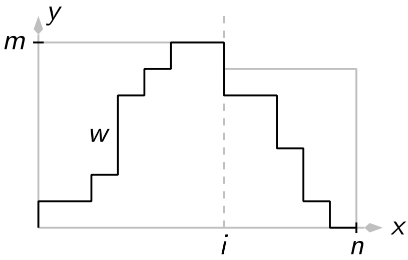


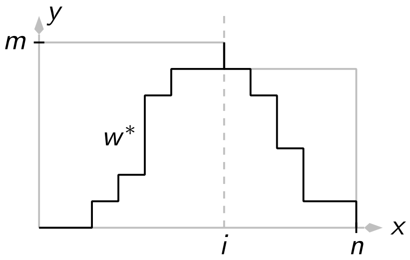
Lösung: Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Anzahl Gitterwege: $|G| = \binom{2m+n}{n}$



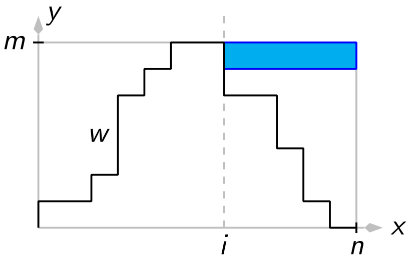
zu $w \in G$ existiert Gitterweg w^* mit je um 180° gedrehtem auf- bzw. absteigendem Ast

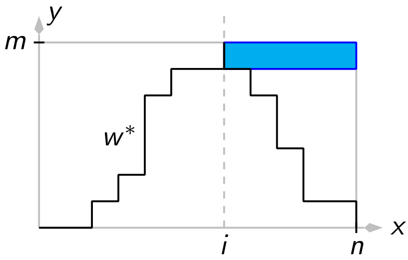




zu $w \in G$ existiert Gitterweg w^* mit je um 180° gedrehtem auf- bzw. absteigendem Ast

Durchschnittliche Fläche: $A_i = \dfrac{mn - (n-i)}{2} = \dfrac{mn-n}{2} + \dfrac{i}{2}$

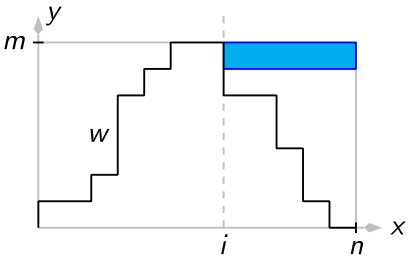


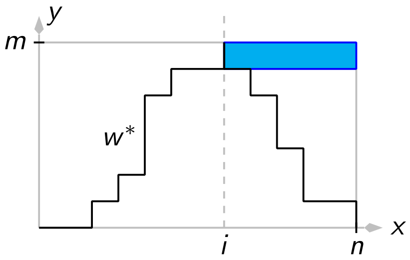


zu $w \in G$ existiert Gitterweg w^* mit je um 180° gedrehtem auf- bzw. absteigendem Ast

Durchschnittliche Fläche: $A_i = \dfrac{mn-(n-i)}{2} = \dfrac{mn-n}{2} + \dfrac{i}{2}$

$$\text{Anzahl Wege: } k_i = \binom{m+i}{i}\binom{m-1+n-i}{n-i}$$





$$A(n,m)=\sum_{i=0}^{n}k_iA_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{mn-n}{2}+\frac{i}{2}\right)k_i=\frac{mn-n}{2}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}k_i}_{|G|}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}ik_i$$

$$A(n,m) = \sum_{i=0}^{n} k_i A_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\tfrac{mn-n}{2} + \tfrac{i}{2}\right) k_i = \tfrac{mn-n}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} k_i}_{|G|} + \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i k_i$$

$$= \tfrac{mn-n}{2} \tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i \tbinom{m+i}{i} \tbinom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$A(n,m)=\sum_{i=0}^{n} k_i A_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{mn-n}{2}+\frac{i}{2}\right)k_i=\frac{mn-n}{2}\underbrace{\sum_{i=0}^{n} k_i}_{|G|}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} ik_i$$

$$=\frac{mn-n}{2}\binom{2m+n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i\binom{m+i}{i}\binom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$=\frac{mn-n}{2}\binom{2m+n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m+1)\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}$$

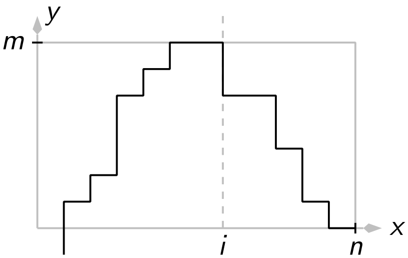
$$A(n,m) = \sum_{i=0}^{n} k_i A_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{mn-n}{2} + \frac{i}{2}\right) k_i = \frac{mn-n}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} k_i}_{|G|} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i k_i$$

$$= \frac{mn-n}{2} \binom{2m+n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i \binom{m+i}{i} \binom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$= \frac{mn-n}{2} \binom{2m+n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m+1) \binom{m+i}{i-1} \binom{m-1+n-i}{n-i}$$

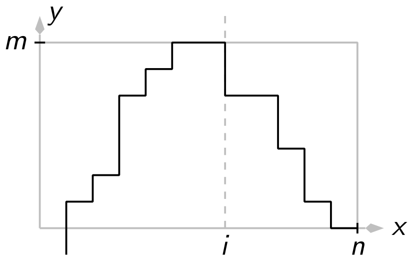
$$= \frac{mn-n}{2} \binom{2m+n}{n} + \frac{m+1}{2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\binom{m+i}{i-1} \binom{m-1+n-i}{n-i}}_{*}$$

$\underbrace{\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}}_{*}$: Anzahl Wege von $(1,-1)$ über (i,m) nach $(n,0)$



$\underbrace{\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}}_{*}$: Anzahl Wege von $(1,-1)$ über (i,m) nach $(n,0)$

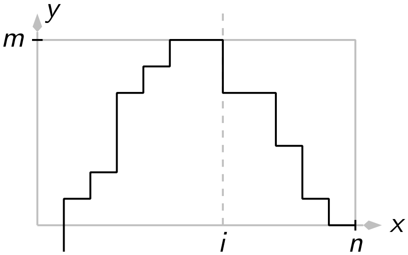
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}$: Anzahl (minimaler) Wege, die von $(1,-1)$ bis zu $y=m$ aufsteigen und in $(n,0)$ enden.



$\underbrace{\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}}_{*}$: Anzahl Wege von $(1,-1)$ über (i,m) nach $(n,0)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i}$: Anzahl (minimaler) Wege, die von $(1,-1)$ bis zu $y=m$ aufsteigen und in $(n,0)$ enden.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\binom{m+i}{i-1}\binom{m-1+n-i}{n-i} = \binom{2m+n}{n-1}$$



$$A(n,m) = \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tbinom{m+i}{i-1}\tbinom{m-1+n-i}{n-i}$$

Aufgabe 1349 (2016), Lösung: Fritz Siegerist

$$A(n,m) = \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tbinom{m+i}{i-1}\tbinom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$= \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\tbinom{2m+n}{n-1}$$

Aufgabe 1349 (2016), Lösung: Fritz Siegerist

$$A(n,m) = \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tbinom{m+i}{i-1}\tbinom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$= \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\tbinom{2m+n}{n-1}$$

$$= \tfrac{mn-n}{2}\cdot\tfrac{2m+1}{n}\tbinom{2m+n}{n-1} + \tfrac{m+1}{2}\tbinom{2m+n}{n-1}$$

Aufgabe 1349 (2016), Lösung: Fritz Siegerist

$$A(n,m) = \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tbinom{m+i}{i-1}\tbinom{m-1+n-i}{n-i}$$

$$= \tfrac{mn-n}{2}\tbinom{2m+n}{n} + \tfrac{m+1}{2}\tbinom{2m+n}{n-1}$$

$$= \tfrac{mn-n}{2}\cdot\tfrac{2m+1}{n}\tbinom{2m+n}{n-1} + \tfrac{m+1}{2}\tbinom{2m+n}{n-1}$$

$$= m^2\tbinom{2m+n}{n-1}$$

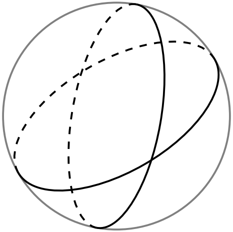
a) Vier zufällige Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1 liegen unabhängig voneinander gleichverteilt auf der Sphäre S^2. Mit Wahrscheinlichkeit 1 besitzen P_0 und P_1 einen wohlbestimmten kürzesten Verbindungsbogen $\gamma \subset S^2$ und ebenso Q_0, Q_1 einen kürzesten Verbindungsbogen γ'. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Bögen schneiden.

b) Man behandle dasselbe Problem für zwei Punktepaare auf einem euklidischen Torus $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Die kürzesten Verbindungen sind dann Strecken.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösung: Christian Blatter, Greifensee, CH

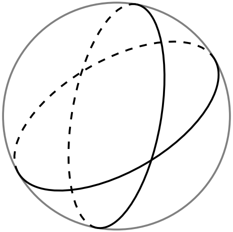
P_0, P_1 resp. Q_0, Q_1 definieren (mit Wahr'keit 1) Grosskreise g, h, die sich gegenseitig halbieren



Lösung: Christian Blatter, Greifensee, CH

P_0, P_1 resp. Q_0, Q_1 definieren (mit Wahr'keit 1) Grosskreise g, h, die sich gegenseitig halbieren

Ereignis A: P_0, P_1 auf verschiedenen Hälften von g $\quad \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

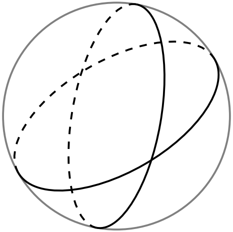


Lösung: Christian Blatter, Greifensee, CH

P_0, P_1 resp. Q_0, Q_1 definieren (mit Wahr'keit 1) Grosskreise g, h, die sich gegenseitig halbieren

Ereignis A: P_0, P_1 auf verschiedenen Hälften von g $\quad \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Ereignis B: Q_0, Q_1 auf verschiedenen Hälften von h $\quad \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$



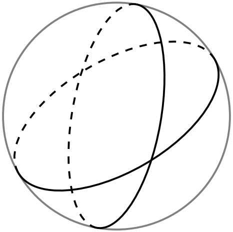
Lösung: Christian Blatter, Greifensee, CH

P_0, P_1 resp. Q_0, Q_1 definieren (mit Wahr'keit 1) Grosskreise g, h, die sich gegenseitig halbieren

Ereignis A: P_0, P_1 auf verschiedenen Hälften von g $\quad\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Ereignis B: Q_0, Q_1 auf verschiedenen Hälften von h $\quad\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

Ereignis C: Verbindungsbögen γ, γ' laufen über denselben Schnittpunkt von g, h $\quad\Rightarrow P(C \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$



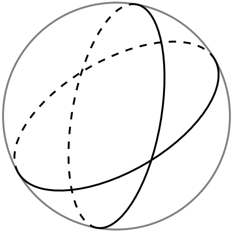
Lösung: Christian Blatter, Greifensee, CH

P_0, P_1 resp. Q_0, Q_1 definieren (mit Wahr'keit 1) Grosskreise g, h, die sich gegenseitig halbieren

Ereignis A: P_0, P_1 auf verschiedenen Hälften von g $\quad \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

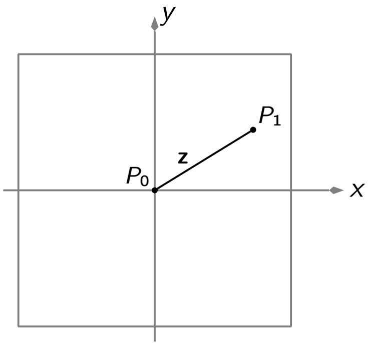
Ereignis B: Q_0, Q_1 auf verschiedenen Hälften von h $\quad \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

Ereignis C: Verbindungsbögen γ, γ' laufen über denselben Schnittpunkt von g, h $\quad \Rightarrow P(C \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$



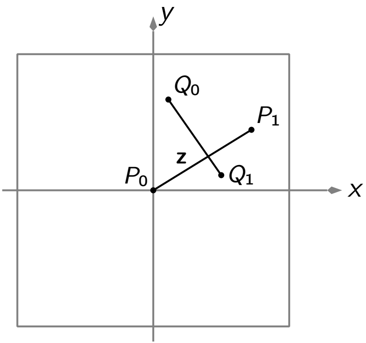
$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$

oBdA: $P_0 = \mathbf{0} = (0,0)$ und $\mathbf{z} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ repräsentiert kürzeste Verbindung $P_0 P_1$



oBdA: $P_0 = \mathbf{0} = (0,0)$ und $\mathbf{z} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ repräsentiert kürzeste Verbindung P_0P_1

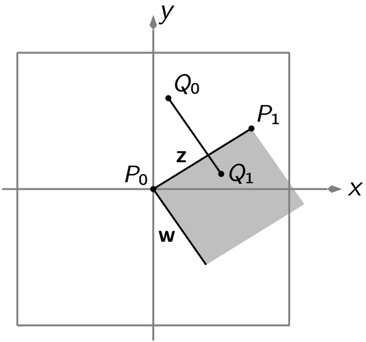
$Q_0 = \mathbf{c}$ und $Q_1 = \mathbf{c} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{w} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



oBdA: $P_0 = \mathbf{0} = (0,0)$ und $\mathbf{z} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ repräsentiert kürzeste Verbindung P_0P_1

$Q_0 = \mathbf{c}$ und $Q_1 = \mathbf{c} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{w} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

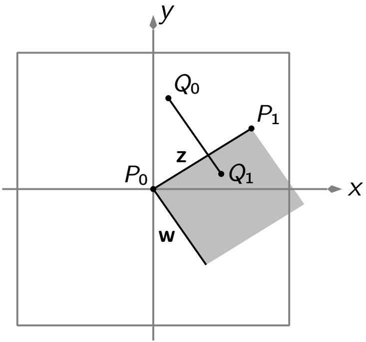
kürzesten Verbindungen schneiden sich, falls Q_1 im von $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelogramm



oBdA: $P_0 = \mathbf{0} = (0,0)$ und $\mathbf{z} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ repräsentiert kürzeste Verbindung P_0P_1

$Q_0 = \mathbf{c}$ und $Q_1 = \mathbf{c} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{w} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

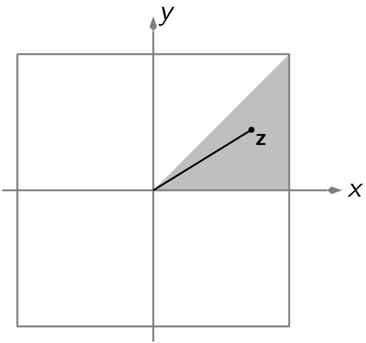
kürzesten Verbindungen schneiden sich, falls Q_1 im von $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelogramm



$\Rightarrow$ zu gegebenem $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$ ist die Wahr'keit für schneiden:

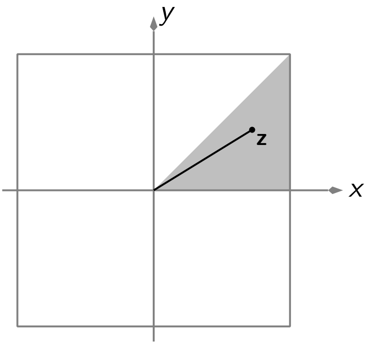
$$A = |\mathbf{z} \times \mathbf{w}|$$

z im ersten Oktanten Δ, $\quad \mathbf{z} = (x, y),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 \le y \le x$



z im ersten Oktanten Δ, $\quad \mathbf{z} = (x, y),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq x$

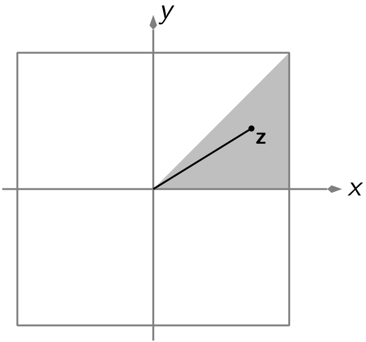
$E(A \mid \mathbf{z}) = ?$



$\mathbf{z}$ im ersten Oktanten Δ, $\quad \mathbf{z} = (x, y),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 \le y \le x$

$E(A \mid \mathbf{z}) = ?$

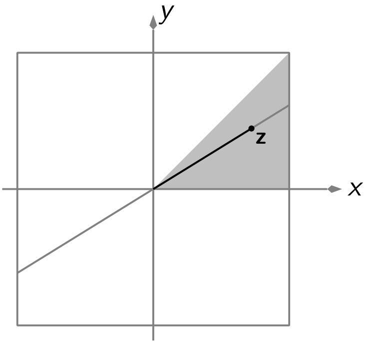
$$E(A \mid \mathbf{z}) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |\mathbf{z} \times \mathbf{w}|\, dv\, du \qquad \text{mit } \mathbf{w} = (u, v)$$



$\mathbf{z}$ im ersten Oktanten Δ, $\quad \mathbf{z} = (x, y),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 \le y \le x$

$E(A \mid \mathbf{z}) = ?$

$$E(A \mid \mathbf{z}) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |\mathbf{z} \times \mathbf{w}|\, dv\, du \qquad \text{mit } \mathbf{w} = (u, v)$$

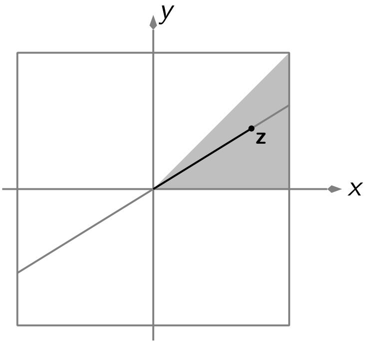


$$= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{uy/x}^{1/2} (xv - yu)\, dv\, du$$

$\mathbf{z}$ im ersten Oktanten Δ, $\quad \mathbf{z} = (x, y),\ 0 < x < \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq x$

$E(A \mid \mathbf{z}) = ?$

$$E(A \mid \mathbf{z}) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |\mathbf{z} \times \mathbf{w}|\, dv\, du \qquad \text{mit } \mathbf{w} = (u, v)$$



$$= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{uy/x}^{1/2} (xv - yu)\, dv\, du$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{y^2}{12x}$$

$$\Rightarrow \text{ gesuchte Wahr'keit ist } 8\int_0^{1/2}\int_0^{x}\left(\frac{x}{4}+\frac{y^2}{12x}\right)dy\,dx=\frac{5}{54}$$

Aufgabe 1295 (Die einfache dritte Aufgabe)
Die Höhlenbewohner erfuhren den Zahlbegriff über die Mächtigkeiten von verschiedenen Mengen. Ihr Zahlbereich erstreckte sich wohl nur über die ersten paar natürlichen Zahlen; aber sie konnten bestimmt ein wenig addieren und multiplizieren. Beim Grübeln über Anzahlen von Vorfahren oder Nachkommen kamen sie dann auch aufs Potenzieren und im weiteren Verlauf zu der Frage, ob diese dritte Operation, ebenfalls kommutativ ist. Das erste interessante Gegenbeispiel wäre $2^3 \neq 3^2$. Gesucht ist also ein möglichst niederschwelliger Beweis dieses Sachverhaltes.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösung: Walter Nohl, Steffisburg, CH

Wir gehen in Gedanken 50 000 Jahre zurück. Im Neandertal kennen die Bewohner sogar nur die Zahlen 1, 2, 3. Was darüber ist, ist „viel“. Sie wissen einiges über den Bereich der „Viel-Zahlen“.

Lösung: Walter Nohl, Steffisburg, CH

Wir gehen in Gedanken 50 000 Jahre zurück. Im Neandertal kennen die Bewohner sogar nur die Zahlen 1, 2, 3. Was darüber ist, ist „viel“. Sie wissen einiges über den Bereich der „Viel-Zahlen“.

- Es gibt verschiedene Viel-Zahlen.

Lösung: Walter Nohl, Steffisburg, CH

Wir gehen in Gedanken 50 000 Jahre zurück. Im Neandertal kennen die Bewohner sogar nur die Zahlen 1, 2, 3. Was darüber ist, ist „viel“. Sie wissen einiges über den Bereich der „Viel-Zahlen“.

- Es gibt verschiedene Viel-Zahlen.
- Es gibt die Methode der „konstruktiven Definition“ von Viel-Zahlen.
  Beispielsweise erhält man 3^2 Kuchenstücke, wenn man einen Kuchen in drei Teile teilt und anschliessend jeden Teil wieder in drei Teile teilt. Entsprechend kann man 2^3 durch eine Menge von Kuchenstücken repräsentieren.

Aufgabe 1295 (2011), Lösung Walter Nohl

- Die Zahlenmenge, zu der auch die Viel-Zahlen gehören, zerfällt in zwei Klassen:

  Die „Friedenszahlen“ und die „Streitzahlen“.

  Diese Begriffe haben sich folgendermassen ergeben: Nüssesammler müssen aus Sicherheitsgründen immer zu zweit in den Wald gehen. Am Schluss teilen sie den Ertrag. Da sie im entsprechenden Zahlbereich weder zählen noch rechnen kännen, haben sie eine geniale Methode zum Teilen erfunden: Sie legen die Nüsse jeweils paarweise auf den Boden, eine Nuss links, eine rechts. Einer der Sammler nimmt die Nüsse links, der andere die Nüsse rechts. Dabei mussten sie die Erfahrung machen, dass manchmal eine Nuss übrig bleibt. Um diese Nuss gab es regelmässig Streit. So sind die Begriffe „Friedenszahl“ und „Streitzahl“ entstanden.

Vor einiger Zeit hat der führende Mathematiker des Tals drei sensationelle Theoreme gefunden:

Vor einiger Zeit hat der führende Mathematiker des Tals drei sensationelle Theoreme gefunden:

1. Vereinigt man zwei Mengen, deren Anzahl beide Friedenszahlen sind, so ist die resultierende Anzahl auch eine Friedenszahl.

Vor einiger Zeit hat der führende Mathematiker des Tals drei sensationelle Theoreme gefunden:

1. Vereinigt man zwei Mengen, deren Anzahl beide Friedenszahlen sind, so ist die resultierende Anzahl auch eine Friedenszahl.
2. Ist eine der Anzahlen eine Friedenszahl, die andere eine Streitzahl, so resultiert eine Streitzahl.

Aufgabe 1295 (2011), Lösung Walter Nohl

Vor einiger Zeit hat der führende Mathematiker des Tals drei sensationelle Theoreme gefunden:

1. Vereinigt man zwei Mengen, deren Anzahl beide Friedenszahlen sind, so ist die resultierende Anzahl auch eine Friedenszahl.
2. Ist eine der Anzahlen eine Friedenszahl, die andere eine Streitzahl, so resultiert eine Streitzahl.
3. Sind beides Streitzahlen, so resultiert eine Friedenszahl.

An einer Sonnwendfeier versammelt sich die ganze Bevölkerung. Dazu gehört der uralte Mathy, der drei Söhne hat, von denen jeder auch drei Söhne hat. Mathy hat also 3^2 Enkel.

An einer Sonnwendfeier versammelt sich die ganze Bevölkerung. Dazu gehört der uralte Mathy, der drei Söhne hat, von denen jeder auch drei Söhne hat. Mathy hat also 3^2 Enkel.

Auch die uralte Loga ist anwesend, die zwei Töchter hat, von denen jede zwei Töchter hat, die ihrerseits wieder je zwei Töchter haben. Loga hat also 2^3 Urenkelinnen.

Aufgabe 1295 (2011), Lösung Walter Nohl

An einer Sonnwendfeier versammelt sich die ganze Bevölkerung. Dazu gehört der uralte Mathy, der drei Söhne hat, von denen jeder auch drei Söhne hat. Mathy hat also 3^2 Enkel.

Auch die uralte Loga ist anwesend, die zwei Töchter hat, von denen jede zwei Töchter hat, die ihrerseits wieder je zwei Töchter haben. Loga hat also 2^3 Urenkelinnen.

In der Feststimmung findet die Idee grossen Anklang, die Enkel von Mathy könnten eigentlich die Urenkelinnen von Loga heiraten.

Kurze Zeit nachher meldet sich der jüngste der Jünglinge zum Wort und sagt: Diese Heirat ist unmöglich. Ich beweise es Euch:

Kurze Zeit nachher meldet sich der jüngste der Jünglinge zum Wort und sagt: Diese Heirat ist unmöglich. Ich beweise es Euch:

Nach den bekannten Theoremen ist die Anzahl der Jungfrauen eine Friedenszahl, die Anzahl der Jünglinge aber eine Streitzahl. Fasst man Jungfrauen und Jünglinge zu einer Menge zusammen, so ergibt sich eine Streitzahl. Dann kann man die Menge aber nicht in Zweierklassen zerlegen.

Kurze Zeit nachher meldet sich der jüngste der Jünglinge zum Wort und sagt: Diese Heirat ist unmöglich. Ich beweise es Euch:

Nach den bekannten Theoremen ist die Anzahl der Jungfrauen eine Friedenszahl, die Anzahl der Jünglinge aber eine Streitzahl. Fasst man Jungfrauen und Jünglinge zu einer Menge zusammen, so ergibt sich eine Streitzahl. Dann kann man die Menge aber nicht in Zweierklassen zerlegen.

Die Argumentation leuchtete allen ein. Sie gewannen die Einsicht, dass 2^3 und 3^2 verschiedene konstruktiv definierte Viel-Zahlen sind.

Aufgabe 1295 (2011), Lösung Walter Nohl

Kurze Zeit nachher meldet sich der jüngste der Jünglinge zum Wort und sagt: Diese Heirat ist unmöglich. Ich beweise es Euch:

Nach den bekannten Theoremen ist die Anzahl der Jungfrauen eine Friedenszahl, die Anzahl der Jünglinge aber eine Streitzahl. Fasst man Jungfrauen und Jünglinge zu einer Menge zusammen, so ergibt sich eine Streitzahl. Dann kann man die Menge aber nicht in Zweierklassen zerlegen.

Die Argumentation leuchtete allen ein. Sie gewannen die Einsicht, dass 2^3 und 3^2 verschiedene konstruktiv definierte Viel-Zahlen sind.

Welche der beiden Zahlen allerdings grösser ist, blieb den Teilnehmern des Festes weiterhin verborgen.