Mathe und Magie

Mathematik findet man überall - auch in der Zauberei.

Kolloquium über Mathematik,
Informatik und Unterricht an der ETH Zürich

Prof. Dr. Annegret Weng,
Hochschule für Technik Stuttgart


1
2
3
5
8

Effekt:

Der Zauberer schreibt eine Vorhersage auf ein Blatt Papier. Dann bittet er den Zuschauer zwei beliebige Zahlen u, v zwischen 1 und 7 zu wählen. Beide Zahlen sollten nicht identisch nicht gleich 7 sein.

Anschließend wird die Folge

$$g_0 = u, g_1 = v, g_{n+2} = \begin{cases} g_n + g_{n+1} \;\; falls \; g_n + g_{n+1} \leq 7, \\ \quad g_n + g_{n+1} - 7, \qquad sonst. \end{cases}$$

für n=0,...,15 und die Summe $s = \sum_{i=0}^{15} g_1$ berechnet.

Das Ergebnis stimmt mit der Vorhersage (nämlich 63) überein.

Wir betrachten allgemein (a, b) -Fibonaccifolgen:

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ *gegeben mit* $a^2 + 4b \neq 0$.

Die Folge definiert durch

$$f_0 = u, f_1 = v,\ u, v \in \mathbb{N}\ (u, v) \neq (0,0)\ \textit{und}$$

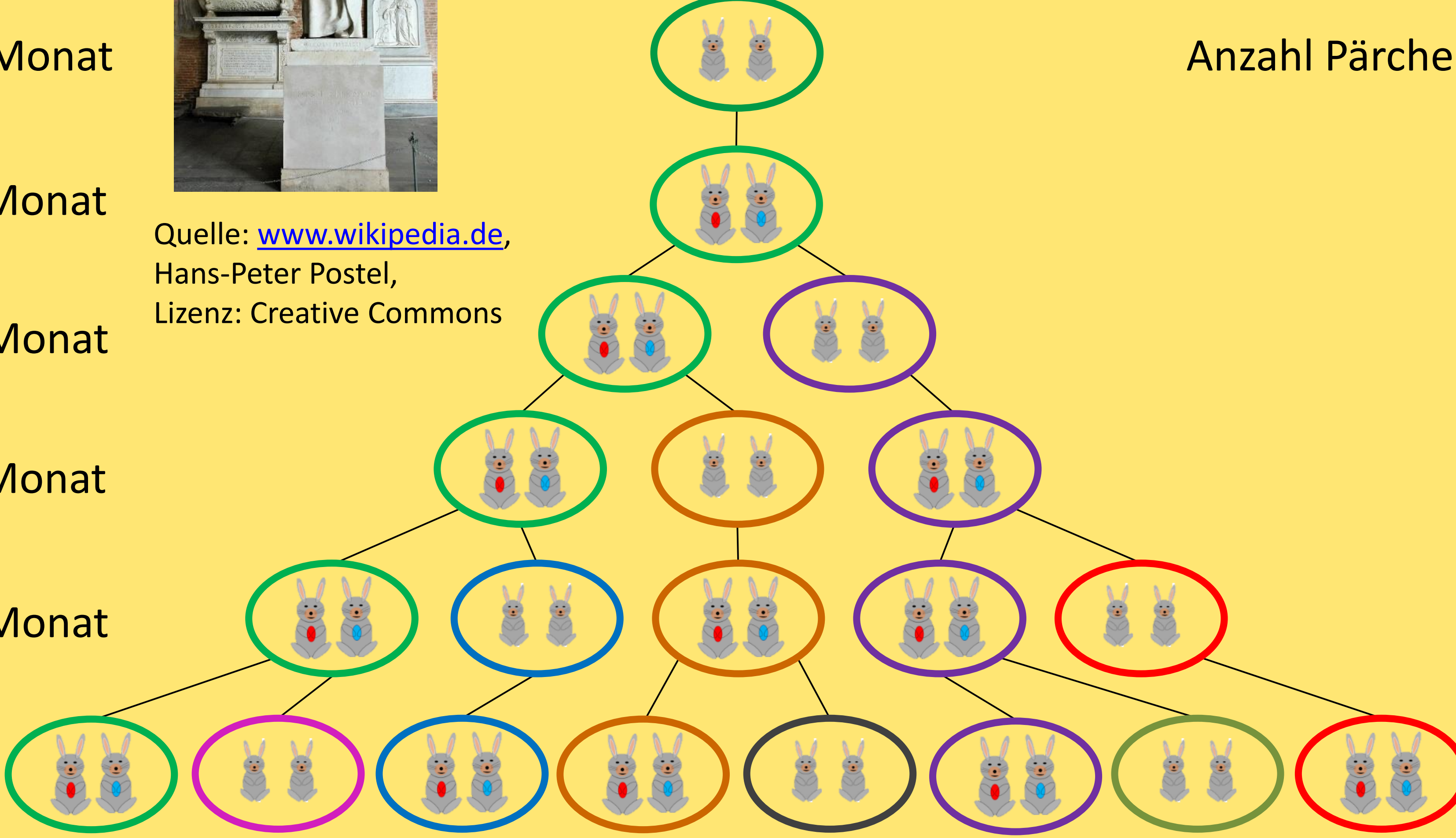
$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}$$

für $n \geq 2$ *heißt* (a, b) *-Fibonaccifolge.*

Für $a = b = 1$ ergibt sich hier die „normale“ Fibonaccifolge.

Statue Fibonaccis, Camposanto di Pisa

Quelle: www.wikipedia.de, Hans-Peter Postel, Lizenz: Creative Commons



1.Monat — Anzahl Pärchen: 1

2.Monat — 1

3.Monat — 2

4.Monat — 3

5.Monat — 5

6. Monat — 8

1. Monat — Anzahl Pärchen: 1

2. — 1

3. — 2

4. — 3

5. — 5

6. — 8

7. — 13

8. — 21

9. — 34

10. — 55

11. — 89

12. — 144

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

1,	1,	2,	3,
5,	8,	13,	21,
34,	55,	89,	144,
233,	377,	610,	987,
1597,	2584,	4181,	6765,
10946,	17711,	28657,	46368,
75025,	121393,	196418,	317811,
514229,	832040,	1346269,	2178309,
3524578,	5702887	9227465,	14930352,
…			

Foto: HFT Stuttgart, Ostervorlesung 2017

Foto: HFT Stuttgart, Ostervorlesung 2017

Für unseren Zaubertrick betrachten wir die (a,b)-Fibonaccifolge modulo einer Primzahl p (in der Originalversion p=7).

Da ist zunächst einmal klar, dass die Folge irgendwann periodisch werden muss, da es nur endlich viele verschiedene Wertepaare aufeinanderfolgender Folgegliedern gibt.

Fragen:

1. Wie groß ist die Periode, bis sich alles wiederholt?
2. Was kann man über die Zahlen sagen, die in einer Periode auftreten?

Wie groß ist die Periode, bis sich alles wiederholt?

Hier können wir zeigen, dass der uns interessierende Fall der Fall ist, für den a^2+4b kein quadratischer Rest modulo p ist. Das bedeutet, es gibt keine ganze Zahl x, so dass x^2 und a^2+4b den gleichen Rest bei Division durch p haben.

In diesem Fall lässt sich beweisen, dass die Periodenlänge γ die Zahl

$$ord_p(-b) \cdot (p+1)$$

teilt und γ von den beiden vom Zuschauer gewählten Anfangszahlen unabhängig ist.

Beispiel: $p = 7, a = b = 1$**:**

Die quadratischen Reste modulo 7 sind 0,1,2,4.

Hier gilt

$$a^2 + 4b \; modulo \; p = 5 \text{ modulo } 7$$

und 5 ist kein quadratischer Rest modulo 7.

Weiter gilt $ord_p(-1) = 2$. Somit ist die Periodenlänge ein Teiler von

$$ord_p(-b) \cdot (p+1) = 2 \cdot 8 = 16.$$

In diesem Fall ist sie sogar genau 16.

Zahlen, die in einer Periode auftreten:

Sei γ die Periodenlänge und a^2+4b kein quadratischer Rest modulo p.

Dann kann man folgendes zeigen:

Falls ein Folgeglied g_i für $0 \leq i \leq \frac{\gamma}{2}$ von p verschieden ist, dann gilt

$$g_i + g_{\frac{\gamma}{2}+i} = p$$

Falls $g_i = p$, dann gilt auch $g_{\frac{\gamma}{2}+i} = p$, also $g_i + g_{\frac{\gamma}{2}+i} = 2p$.

Damit ergibt sich dann die folgende Aussage: Sei υ die Anzahl der Folgeglieder innerhalb einer Periode, die gleich p sind, dann gilt

$$s = \mathrm{p} \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\upsilon}{2}\right).$$

Für unseren Zaubertrick ist es nun entscheidend, dass auch die Anzahl v der p‘s nicht von den beiden Anfangswerten, die der Zuschauer gewählt hat, abhängt.

Man kann zeigen, dass dies für Primzahlen, für die $a^2 + 4b \ modulo\ p$ kein quadratischer Rest ist, genau dann der Fall ist, wenn die Periodenlänge maximal (d.h. gleich $ord_p(-b) \cdot (p+1)$) ist und zudem $-$b auch kein quadratischer Rest ist.

Anfangsbeispiel:

$p = 7, a = b = 1$**:** Es gilt $-1 = 6 \ modulo\ p$ ist kein quadratischer Rest modulo p. Wir haben hier $v = 2$. Also erhalten wir

$$s = \mathrm{p} \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{v}{2}\right) = 7 \cdot \left(8 + \frac{2}{2}\right) = 7 \cdot 9 = 63.$$

Mit unseren Überlegungen können wir den Trick nun verallgemeinern und noch andere Zahlen forcieren.

So ergibt sich zum Beispiel für $p = 5, a = 3, b = 2$ mit Periode 24 immer die Summe $5 \cdot (12 + 2) = 70$.

Für mehr Bespiele und einen vollständigen Beweis der Aussagen siehe *Magische Eigenschaften linearer Rekursionen* von Nina Strasser und Annegret Weng, Elemente der Mathematik, Vol. 74(3), 2019, pp.104-113

Vorarbeit: *Fibonacci goes magic* von Erhard Behrends, Elemente der Mathematik, Vol. 68(1), 213, pp. 1-9


1
2
3
5
8

Die Grundidee des Würfeltricks geht auf Royal V. Heath (1883-1960) und Edmund Balducci (1906-1988) zurück.

Ihre Würfel trugen die folgenden Zahlen

Würfel 1 :[483, 285, 780, 186, 384, 681]
Würfel 2 :[642, 147, 840, 741, 543, 345]
Würfel 3 :[558, 855, 657, 459, 954, 756]
Würfel 4 :[168, 663, 960, 366, 564, 267]
Würfel 5 :[971, 377, 179, 872, 773, 278]

Keine zwei der dreistelligen Zahlen sind gleich.

Beim Wurf mit 5 Würfeln ergeben sich

$$6^5 = 7776$$

Möglichkeiten.

Doch für die Summe der 5 Würfel erhalten wir für diese spezielle Würfelset nur 35 mögliche Summen!

Schauen wir mal an, was passiert, wenn wir die Summe nach der Schulmethode bilden:

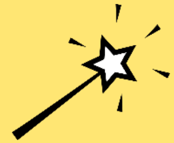
Würfel 1 :[483, 285, 780, 186, 384, 681]
Würfel 2 :[642, 147, 840, 741, 543, 345]
Würfel 3 :[558, 855, 657, 459, 954, 756]
Würfel 4 :[168, 663, 960, 366, 564, 267]
Würfel 5 :[971, 377, 179, 872, 773, 278]

$$
\begin{array}{r}
a_1 b_1 c_1 \\
+\ a_2 b_2 c_2 \\
+\ a_3 b_3 c_3 \\
+\ a_4 b_4 c_4 \\
+\ a_5 b_5 c_5 \\
\text{-------------} \\
z_1 z_2 z_3 z_4
\end{array}
$$

Das Würfelset hat folgende besondere Eigenschaft:

Die Summe der letzten Stellen (Einerstellen) der fünf Würfel ist gleich $z_3 z_4$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ bei Division durch 10 den Rest 0 hat. Tatsächlich gilt $\sum_i b_i$=30.

$$\begin{array}{r} a_1 b_1 c_1 \\ + a_2 b_2 c_2 \\ + a_3 b_3 c_3 \\ + a_4 b_4 c_4 \\ + a_5 b_5 c_5 \\ \text{-------------} \\ z_1 z_2 z_3 z_4 \end{array}$$



Würfel 1 :[483, 285, 780, 186, 384, 681]
Würfel 2 :[642, 147, 840, 741, 543, 345]
Würfel 3 :[558, 855, 657, 459, 954, 756]
Würfel 4 :[168, 663, 960, 366, 564, 267]
Würfel 5 :[971, 377, 179, 872, 773, 278]

Weiter fällt auf, dass die Summe $a_i + c_i$ für alle Würfel konstant ist.

Unabhängig vom Ausgang des Wurfes ergibt sich

$$(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + (a_3 + c_3) + (a_4 + c_4) + (a_5 + c_5)$$
$$= 7 + 8 + 13 + 9 + 10 = 47$$

Daraus folgt

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{10}) + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$$

$$= (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + (a_3 + c_3) + (a_4 + c_4) + (a_5 + c_5) + \frac{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{10}$$

= 47 + 3 = 50.

Es gilt also stets (unabhängig vom Wurf!) $z_1 z_2 + z_3 z_4$=50.

Mit diesen Überlegungen lassen die Würfel noch optimieren bzw. der Trick auch auf 6, 7, 8 oder 9 Würfel verallgemeinern.

Für das folgende Würfelset

Würfel 1 :[126, 621, 225, 522, 324, 423]

Würfel 2 :[157, 751, 256, 652, 355, 553]

Würfel 3 :[207, 702, 306, 603, 405, 504]

Würfel 4 :[398, 893, 596, 695, 497, 794]

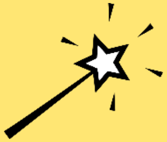
Würfel 5 :[449, 944, 548, 845, 647, 746]

Eigenes Foto

gibt es nur 27 mögliche Summe und nur 15 Möglichkeiten für den Buchtest.

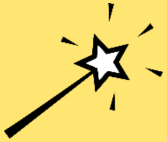
Balduccis und Heaths clevere Würfel von Annegret Weng in der Mathezeitschrift „Die Wurzel“, 9/2022

Magie im mathematischen Schulunterricht – Einige Anregungen



- Gerade und ungerade Zahlen
- Variablen, Umformungen, Lösungen von Gleichungen, Distributivgesetz und ähnliches
- Zweierpotenzen, Binärsystem oder andere Zahlsysteme
- Lineare Gleichungssysteme, Vektorräume
- Folgen und Konvergenz
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Kodierungstheorie

Beispiel 1: Distributivgesetz



1. Denkt Euch eine Zahl zwischen 1 und 9.
2. Verdoppelt eure Zahl.
3. Zählt zum Ergebnis zwei dazu.
4. Nehmt jetzt das Ergebnis mal 5.
5. Und zieht am Ende die Zahl 3 ab.
6. Merkt euch die Antwort.

Hier kommen meine Vorhersagen …

- Das Ergebnis ist eine zweistellige Zahl.
- Die erste Ziffer ist die Zahl, die du dir zu Beginn gedacht hast.
- Und die zweite Ziffer ist die Zahl 7.

Erläuterung mit dem Distributivgesetz

Sei x die gedachte Zahl. Dann können wir die Rechenoperation durch den folgenden Term darstellen:

$$(x \cdot 2 + 2) \cdot 5 - 3$$
$$= x \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 - 3 = x \cdot 10 + 7$$

An dieser Darstellung können wir nun direkt die Korrektheit der drei Vorhersagen ableiten.

Das Ergebnis ist eine zweistellige Zahl.
Die erste Ziffer ist die Zahl, die du dir zu Beginn gedacht hast.
Und die zweite Ziffer ist die Zahl 7.

Beispiel 2: Lineare Gleichungssysteme & Vektorräume

Definition:

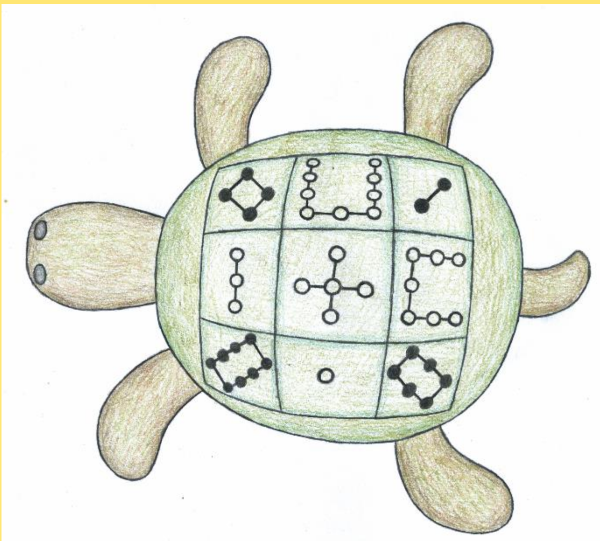
Ein magisches Quadrat ist eine Anordnung von n^2 reellen Zahlen in einem quadratischen Schema der Seitenlänge n, so dass die Summe der Zeilen-, der Spalten- und der Diagonalelemente jeweils gleich einer konstanten Zahl S ist.

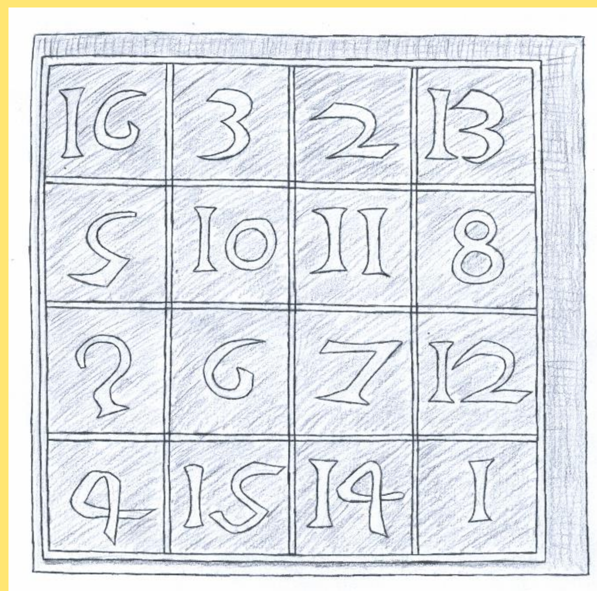
Die magischen Quadrate der Dimension n bilden einen reellen Vektorraum der Dimension $n^2 - 2n$.

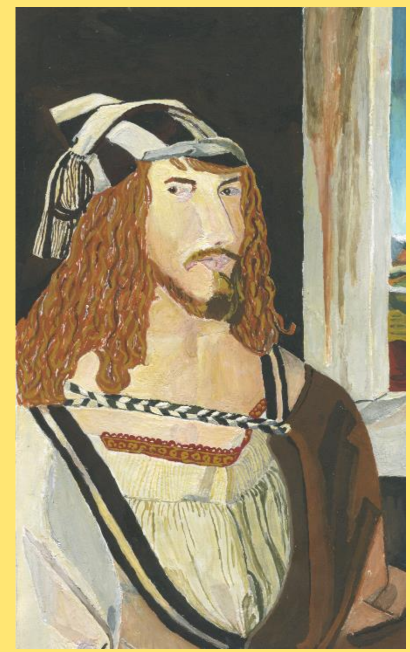
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Magisches Quadrat zur Summe 15

Magische Quadrate







Aus meinem Buch „Ziffy, der Zahlenzauberer“

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe: Konstruiere ein magisches 3×3 Quadrat zur Summe S.

Mit dem Ansatz

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

erhalten wir ein lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= S \\
d + e + f &= S \\
g + h + i &= S \\
a + d + g &= S \\
b + e + h &= S \\
c + f + i &= S \\
a + e + i &= S \\
c + e + g &= S
\end{aligned}
$$

Der Rang des Gleichungssystems ist nicht 8 (das wäre maximal), sondern 7. Die Summe aus den ersten drei Zeilen entspricht der Summe der Zeilen 4 bis 6.

Lineare Gleichungssysteme

Die Lösung:

$$a = \frac{2}{3} \cdot S - i$$
$$b = \frac{2}{3} \cdot S - h$$
$$c = -\frac{1}{3} \cdot S + h + i$$
$$d = -\frac{2}{3} \cdot S + h + 2i$$
$$e = \frac{1}{3} \cdot S$$
$$f = -h - 2i + \frac{4}{3} \cdot S$$
$$g = -i - h + S$$

- Wir können S, h, i frei wählen, erhalten also einen 3-dimensionalen Vektorraum.
- Das Element e ist durch S immer eindeutig bestimmt. Es gibt nur ganzzahlige magische Quadrate zu einer durch 3 teilbaren magischen Summe.
- Die gleiche Rechnung lässt sich auch für magische 4×4-Quadrate durchführen. In diesem Fall existiert zu jeder ganzen Zahl S auch ein magisches Quadrat mit ganzzahligen Einträgen.

Mathemagische Literatur (Auswahl):

- Magical Mathematics: The Mathematical Ideas That Animate Great Magic Tricks, P. Diaconis, R. Graham, Princeton Univers. Press; Reprint Edition (13. Oktober 2015)
- Der mathematische Zauberstab, E. Behrends, Rowohlt Taschenbuch; 5. Edition (27. November 2015)
- Ziffy, der Zahlenzauberer, A. Weng, S. Renger, Springer-Verlag, 2019

https://ziffy-zahlenzauberer.de/

Weiteres Übungsmaterial (zusätzlich zum Buch)

Niemand wird als Zahlenzauberer geboren. Hier sind noch ein paar Knobel- und Übungsblätter, mit denen ihr die Mathematik trainieren könnt, die ihr für die Zaubertricks braucht.

Einen Link zu den Lösungen findet ihr weiter unten auf der Seite.

1. Primzahlen (Abschnitt 1.3)
2. Primzahllabyrinth (Abschnitt 1.3)
3. Gerade und ungerade Zahlen (Abschnitt 1.6)
4. Parität (Abschnitt 1.7)
5. Römische Zahlen (Abschnitt 1.8)
6. Zweierpotenzen (Abschnitt 1.11)
7. Fibonaccizahlen Teil 1 (Abschnitt 2.1, 2.2 und 2.9)
8. Fibonaccizahlen Teil 2 (Abschnitt 2.1, 2.2 und 2.9)
9. Fibonaccizahlen Teil 3 (Abschnitt 2.1, 2.2 und 2.9)
10. Pythagoreische Tripel (Abschnitt 2.3)
11. Magische Quadrate (Abschnitt 2.5)
12. Eulerkreise und Graphen (Abschnitt 2.8)
13. Symmetrie (Abschnitt 3.4 und 3.5)
14. Logik (Abschnitt 3.10)
15. Modulrechnen (Abschnitt 3.11)

Zaubertrick zum Schluss