

Ein mathematisches Modell zur Klimaänderung

Albert Fässler



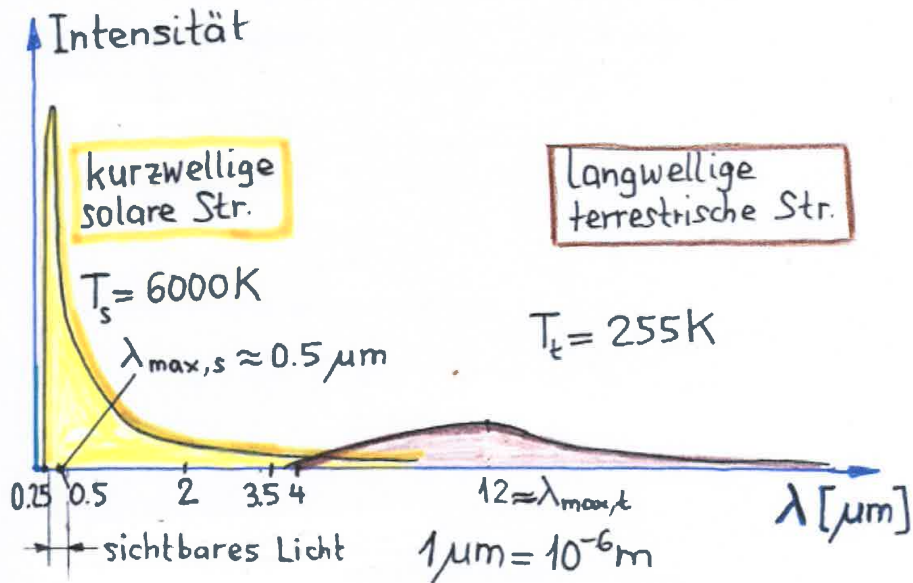
1

Inhaltsverzeichnis

0. Solare und terrestrische Strahlung	3
1. Das Null-dimensionale Energie- Gleichgewichts-Modell	6
2. Linearisierung des Modells	17
2.1 Temperaturverlauf für Grenzwert 2.0 °C ab dem Jahr 2020	19
2.2 Klimasensitivität	22
3. Zunahme des Treibhausgases	23
4. Kohlenstoffbudget für die Grenzwerte von 2.0 °C und 1.5 °C	27
4.1 Ziel und Modell	27
4.2 Grenzwert 2.0 °C	28
4.3 Grenzwert 1.5 °C	32
4.4 Ein realistischeres Szenario?	33
4.5 Bedenkenswerte Fakten	36
5. Temperaturverlauf für verschiedene Szenarien (IPCC)	38
6. Sonstiges	42
6.1 Aktuelle CO ₂ -Daten	42
6.2 Verallgemeinerte Geschwindigkeit	44
7. Studium und Unterricht	48

2

0. Solare und terrestrische Strahlung



3

1 Mikrometer = $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$
 1 Nanometer = $1\ \text{nm} = 10^{-9}\text{m}$
 1000 nm $1\ \mu\text{m}$

violett 400-425 nm
 blau 450-475 nm
 grün 500-560 nm
 gelb 560-590 nm
 rot 630-700 nm

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\frac{\lambda_{\text{max},t}}{\lambda_{\text{max},s}} = \frac{1/255}{1/6000} \approx 24$$

Sonne und Erde können näherungsweise als schwarze Körper und somit als maximal emittierend und absorbierend betrachtet werden.

4

Erde:

- absorbiert die kurzwellige solare Strahlungsleistung P_+
- strahlt die Leistung P_- als langwellige Strahlung gemäss dem Stefan-Boltzmann Gesetz ab:
 P_- ist proportional zu T^4

Wellenlänge λ und Frequenz f sind zueinander umgekehrt proportional:

$$f = 1/\lambda$$

5

1. Das Null-dimensional Energie-Gleichgewichts-Modell (Zero-dimensional Energy-Balance-Model)

Es stammt von den beiden Herren



Mikail Iwanowich Budyko (1920-2001)
russischer Klimatologe und Geophysiker.

6



Piers John Sellers (1955-2016)
amerikanisch-britischer Klimaforscher,
Direktor der geowiss. Forschungsabt.
NASA und Astronaut.

Ihr Modell arbeitet ausschliesslich mit global gemittelten skalaren Grössen.

Die Wärmegleichung der Erde lautet:

$$\frac{dQ}{dt} = P_+ - P_-$$

Q = Wärmemenge der Masse M mit der absoluten Temperatur T:

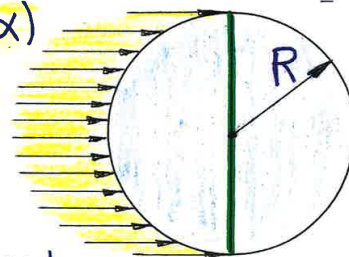
$$Q = C \cdot M \cdot T$$

7

C = spezifische mittlere globale Wärmekapazität der betroffenen Schicht der Erdoberfläche pro Grad und kg:

$$P_+ = \underbrace{\pi \cdot R^2}_{\text{Flächeninhalt Kreisscheibe}} \cdot S_0 \cdot (1 - \alpha)$$

Flächeninhalt
Kreisscheibe



$$\alpha \approx 0.32$$

32% wird reflektiert
(planetarisches Albedo)

$$S_0 = 1370 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \text{Leistung/m}^2 \text{ der totalen Sonneneinstrahlung.}$$

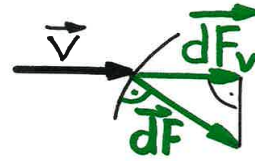
(Total Solar Irradiance TSI)

8

Warum Kreisscheibe?

Die Figur beschreibt den Fluss des konstanten Vektorfeldes \vec{v} durch die halbe Kugeloberfläche K:

$$\int_K \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_K \vec{v} \cdot d\vec{F}_v = \vec{v} \cdot \int_K d\vec{F}_v = |\vec{v}| \cdot \pi \cdot R^2$$



infinitesimale Flächenvektoren.

Totale Verlustleistung P_{\perp} pro m^2 verursacht durch die langwellige Abstrahlung der Erde gemäss dem Gesetz von Stefan-Boltzmann:

$$P_{\perp} = 4\pi R^2 \cdot \epsilon \cdot \sigma \cdot g \cdot T^4$$

$$\epsilon \approx 0.97$$

Emissionsvermögen

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Boltzmann-Konstante



9

Der (beeinflussbare) **Abstrahlungsfaktor** $g < 1$ berücksichtigt die Tatsache, dass durch die Treibhausgase ein Teil der emittierten Strahlung die Atmosphäre nicht verlässt, da sie hauptsächlich durch Wasserdampf und CO_2 absorbiert wird.

Diese Teilchen strahlen die absorbierte Energie in alle Richtungen ab, auch nach unten zur Erde. Dadurch heizt sich die Erdoberfläche auf und durch Konvektion wird damit auch die Atmosphäre aufgeheizt.

Die tatsächliche Emissionstemperatur ist abhängig von vielen Feedbacks im System Erde-Atmosphäre, beispielsweise von einem Anstieg der Menge Wasserdampf, wenn sich die Erde aufheizt.

Zurück zur Wärmeleichung (Dimension = W/m²):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{M \cdot C \cdot dT}{dt} = \frac{4\pi R^2 \cdot \Delta R \cdot \rho \cdot C \cdot dT}{dt} = P_+ - P_-$$

ΔR = mittlere Eindringtiefe der Wärme in die Erdoberfl. ($4\pi R^2$)

ρ = mittlere Dichte

$$\cancel{4\pi R^2} \cdot \Delta R \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT}{dt} = \pi R^2 S_0 \frac{(1-\alpha)}{4} - \cancel{4\pi R^2} \cdot \epsilon \cdot \sigma \cdot g \cdot T^4$$

$$\Rightarrow C_E \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{S_0}{4} (1-\alpha) - \epsilon \cdot \sigma \cdot g \cdot T^4$$

$$\text{mit } C_E = \Delta R \cdot \rho \cdot C$$

autonome nicht-lineare Differentialgleichung

$$[C_E] = m \cdot \frac{\cancel{kg}}{m^3} \cdot \frac{J}{K \cdot \cancel{kg}} = \frac{J}{m^2 \cdot K}$$

ist spezifische Wärmekapazität pro m².

11

Gemäss den Klimawissenschaften wird die Einstrahlungsleistung in Zukunft wegen zusätzlichen Rückkoppelungen in der Atmosphäre um den sogenannten

Strahlungsantrieb (Radiative Forcing)

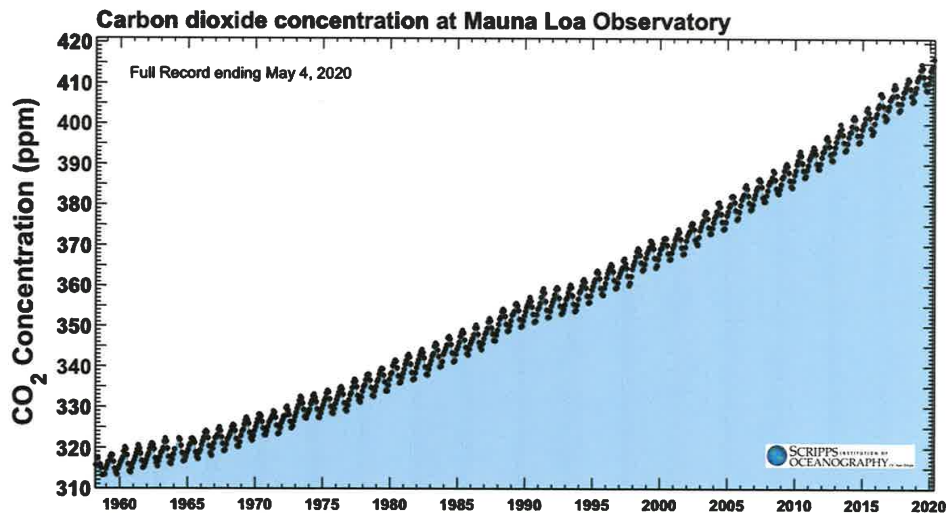
$$\Delta F = 5.35 \frac{W}{m^2} \cdot \ln\left(\frac{c}{c_0}\right)$$

erhöht, wobei

- c_0 = vorindustrielle Referenzbelastung der Atmosphäre durch CO₂-Teilchen in ppm
- c die aktuelle Belastung ist.

12

Schicksalshafte Keeling-Kurve



Monthly mean CO₂ concentrations measured at Mauna Loa Observatory, Hawaii, from 1958 through to 4 May 2020.

Etwa 31% Zuwachs in 60 Jahren

13

Somit lautet die Differentialgleichung inkl. ΔF für das Jahr 2020:

$$C_E \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{S_0}{4} (1-\alpha) + \Delta F - \epsilon \cdot \sigma \cdot g \cdot T^4 \quad (1)$$

Aus der Dgl. (1) folgt mit $\frac{dT}{dt} = 0$ der Grenzwert

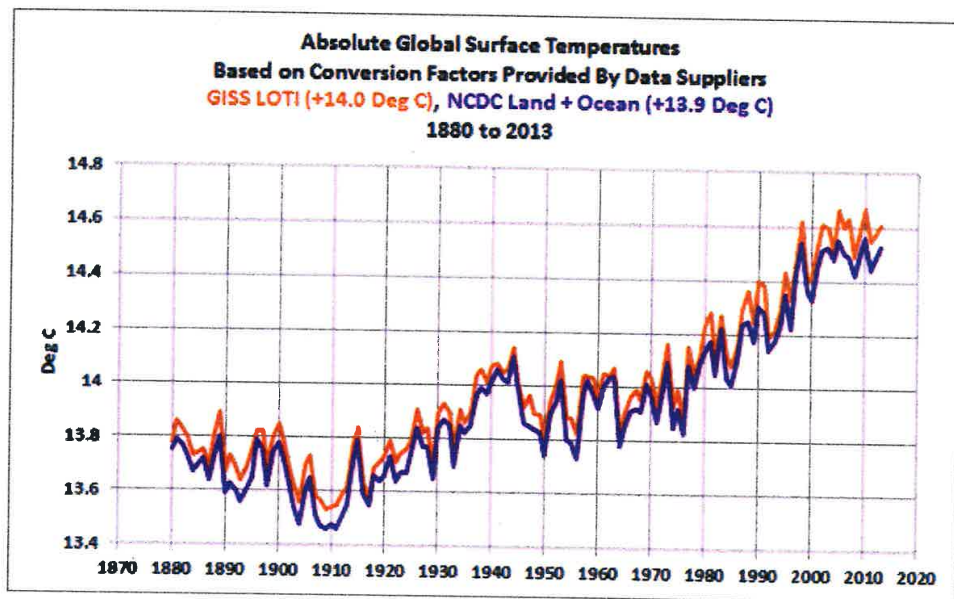
$$T_\infty(g) = \sqrt[4]{\frac{S_0(1-\alpha)/4 + \Delta F}{\epsilon \cdot \sigma \cdot g}} = \sqrt[4]{\frac{1370 \cdot 0,68/4 + 2,54}{0,97 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} g}}$$

$$T_\infty(g) = \frac{255,8}{\sqrt[4]{g}} \quad (\text{in Kelvin}).$$

ΔF wächst nur leicht in Abhängigkeit der Zeit und der Zähler 255.8 bleibt praktisch konstant für die folgenden Jahre.

14

Temperaturverlauf seit dem Jahr 1870



15

Der stationäre Temperaturanstieg gegenüber der mittleren Oberflächentemperatur von 14.65°C im Jahr 2020 (gemäss Grafik) mit $T_1 = 273.15 + 14.65 = 287.8\text{ K}$ in Grad Celsius beträgt also

$$\Delta T_{\infty}(g) = \frac{255.8}{\sqrt[4]{g}} - 287.8 \quad \text{in } ^{\circ}\text{C}.$$

Für $\Delta T_{\infty} = 0^{\circ}\text{C}$ (schön wärs) gilt

$$g = g_0 = \underline{0.624} \quad (2)$$

Ohne Treibhausgase ($g = 1$) wäre

$$\Delta T_{\infty}(1) = -32^{\circ}\text{C}$$

16

2. Linearisierung des Modells

Sei $\Delta(t) = T(t) - T_1$. Also ist $T(t) = \underbrace{287.8 \text{ K}}_{\text{gross}} + \underbrace{\Delta(t)}_{\text{klein}}$.

Näherung 1. Ordnung unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$T^4 = (T_1 + \Delta)^4 \approx T_1^4 + 4T_1^3 \cdot \Delta.$$

T und Δ unterscheiden sich um additive Konstante $\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{d\Delta}{dt}$.

Aus (1) folgt

$$C_E \cdot \frac{d\Delta}{dt} = \frac{S_0}{4} (1-\alpha) + \Delta F - \epsilon \sigma_g (T_1^4 + 4T_1^3 \Delta)$$

$$C_E \cdot \frac{d\Delta}{dt} = \underbrace{\frac{S_0}{4} (1-\alpha) + \Delta F - \epsilon \sigma_g T_1^4}_{A(g)} - \underbrace{4\epsilon \sigma_g T_1^3}_{B(g)} \Delta.$$

17

$$C_E \cdot \frac{d\Delta}{dt} = A(g) - B(g) \cdot \Delta(t) \quad (3)$$

lineare Dgl. für $\Delta(t)$

Grenzwert für $t \rightarrow \infty$:

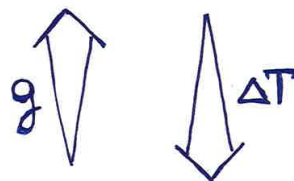
$$\Delta_\infty(g) = \frac{A(g)}{B(g)} = \frac{235.4 - 377g}{5.24g} \quad (4)$$

Kontrolle für $\Delta_\infty(g) = 0 \Rightarrow$

$$g = g_0 = 0.624 \text{ wie (2)} \checkmark$$

Aus (4) folgt

- für $\Delta T_\infty = 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$: $g_{1.5} = 0.612$
- für $\Delta T_\infty = 2 \text{ }^\circ\text{C}$: $g_2 = 0.608$
- für $\Delta T_\infty = 3 \text{ }^\circ\text{C}$: $g_3 = 0.600$



18

2.1 Temperaturverlauf für Grenzwert 2°C ab dem Jahr 2020

Dazu benötigen wir den numerischen Wert von $C_E = \Delta R \cdot \rho \cdot C$.

Die Eindringtiefe ΔR von Licht im Wasser schwankt zwischen 5m (rotes Licht) und 6m (blaues Licht). Aber die relevante Wasserschicht ist hauptsächlich durch die Konvektionstiefe zwischen ca. 10 m und 100 m gegeben.

Da 3/4 der Erde mit Wasser bedeckt ist, wählen wir $\Delta R = 40$ m und für die mittlere Dichte $\rho = 1500$ kg/m³ (gegenüber Wasser mit 1000 kg/m³).

Wasser hat die spezifische Wärmekapazität 4187 J/(K kg).

Unter Berücksichtigung, dass die Materialien der Erdkruste kleinere Wärmekapazitäten aufweisen, sei $C = 3440$ J/(K kg).

Somit ist

$$C_E = 40 \text{ m} \cdot 1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3440 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 2,06 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot$$

19

Unter der Voraussetzung, dass $g = g_2 = 0,608 = \text{konstant}$, folgt aus (3) das Anfangswertproblem

$$\frac{d\Delta}{dT} = \frac{A(g_2)}{C_E} - \frac{B(g_2)}{C_E} \Delta = \frac{6,37}{C_E} - \frac{3,18}{C_E} \cdot \Delta$$

mit $\Delta(0) = 0$. (5)

Kontrolle: $\frac{6,37}{3,18} = 2,0 \text{ °C} \checkmark$

Lösung von (5): $\Delta(t) = 2,0 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{3,18}{C_E} t\right) \right]$ mit $[t] = \text{s}$.

Umrechnung auf Jahre:

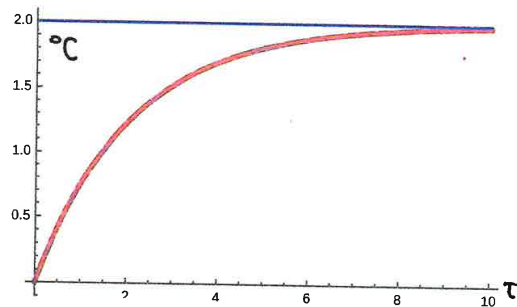
Nach 1 Jahr = 365 x 24 x 3600 s = 3,15 x 10⁷ s

lautet die Konstante im Exponenten für die neue Variable τ in Jahren

$$\frac{3,18 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{2,06 \cdot 10^8} = 0,4740.$$

20

Graph der Lösung für die Jahre von 2020 bis 2030:



0 entspricht dem Jahr 2020,
10 entspricht dem Jahr 2030.

Bemerkung: Innerhalb von etwa 20 Jahren ist der Wert von C_E vernünftig. Für grössere Zeiträume (Jahrzehnte, Jahrhunderte) müsste berücksichtigt werden, dass die Erwärmung der Meere in grössere Tiefen erfolgt.

21

2.2 Klimasensitivität

Sie ist eine zentrale Grösse in den Klimawissenschaften.

Def: Klimasensitivität = ΔT für den Fall einer Verdoppelung der CO_2 -Konzentration gegenüber dem vorindustriellen Zeitalter.

Aus $\Delta T = 3.0 \text{ }^\circ\text{C} = A(g)/B(g)$ mit dem Strahlungsantrieb

$$\Delta F = 5.35 \cdot \ln 2 = 3.71 \text{ W/m}^2$$

resultiert der Abstrahlungsfaktor $g = 0.602$.

Er liegt leicht höher als $g_3 = 0.600$ auf Seite 18, weil hier mit $\Delta F = 3.71$ anstelle von 2.54 gerechnet wurde.

Das Ergebnis ist kompatibel mit der Aussage im fünften Sachstandsbericht von 2017 des Weltklimarates:

Die Klimasensitivität liegt wahrscheinlich zwischen $1.5 \text{ }^\circ\text{C}$ und $4.5 \text{ }^\circ\text{C}$.

22

3. Zunahme des Treibhausgases

Ist der Anstieg der gemessenen CO₂-Belastungen gemäss Keeling-Kurve **durch den Menschen verursacht?**

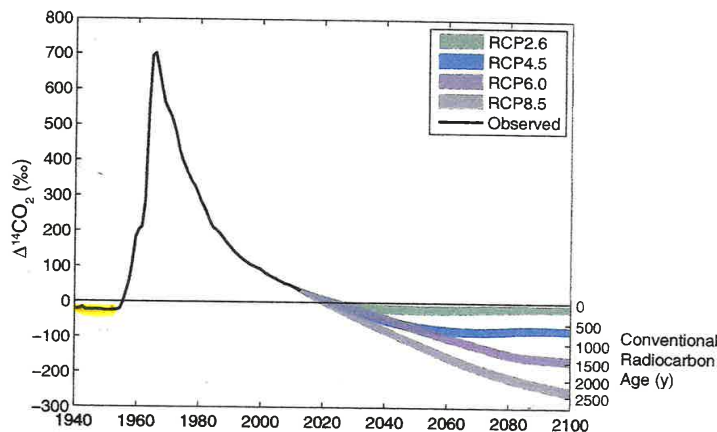
Die folgenden Überlegungen beweisen, dass die klare Antwort lautet: **Ja!**

Die nächste Grafik¹ zeigt den Anteil der Anzahl C14-Isotope n^{14} gegenüber der Anzahl CO₂-Moleküle n^{CO_2} in einem gegebenen Volumen der Atmosphäre auf. Zeitspanne über die Jahre von 1940 bis 2100 mit verschiedenen Modellannahmen.

Die Wirkung (Bombenpeak) der oberirdischen Atombombenversuche ist eklatant.

$$\text{Def: } \Delta^{14}\text{C} = f \cdot \frac{n^{14}}{n^{CO_2}} - 1000 \quad \text{mit } f = 8.19 \cdot 10^{14}$$

¹ Aus Heather D. Gravens, *Impact of fossil fuel emissions on atmospheric radiocarbon over this century*, 2015



Der Faktor f wurde so gewählt, dass für die vor dem Jahre 1950 während mehreren Jahrtausenden geltende praktisch konstante C14-Konzentration (Basis für die C14-Methode der Altersbestimmung)

$$r = \frac{\# \text{C14-Isotope}}{\# \text{CO}_2\text{-Moleküle}} = \frac{n^{14}}{n^{CO_2}} \quad \text{gilt: } \Delta^{14}\text{C} = 0$$

für die doppelte Konzentration 2r: $\Delta^{14}\text{C} = 1000$

für die Konzentration 1.5r: $\Delta^{14}\text{C} = 500$

Vorindustriell:

$$\frac{n^{14}}{n^{CO_2}} = 1,22 \cdot 10^{-12}$$

Trotz dem Bombenpeak ist der Wert aktuell praktisch wieder auf dem vorindustriellen Stand 0 und die Prognosen für verschiedene Szenarien zeigt, dass die Werte nun negativ werden.

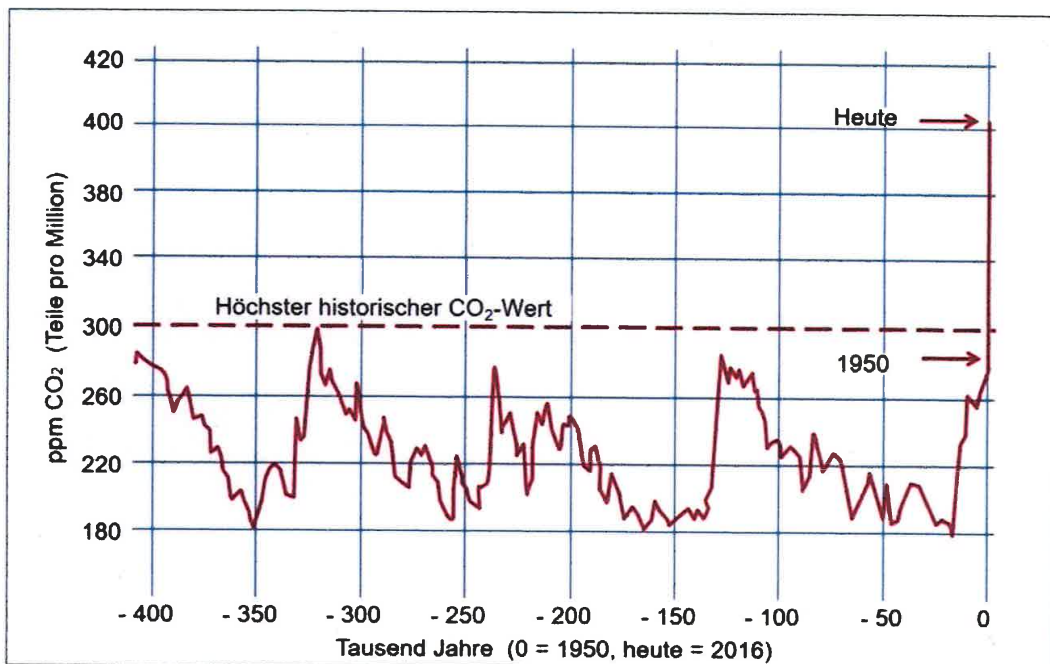
Denn: Das Abbrennen fossiler Brennstoffe verursacht **keine** C14-Isotope, sondern ausschliesslich C12-Atome. \Rightarrow Man made!

Der negative Bereich links zeigt den sogenannten Suess-Effekt der Industrialisierung.

Die folgende Grafik stammt aus Analysen von Eisbohrkernen. Sie zeigt den bedenklichen Anstieg in jüngster Zeit, weit über den historischen Maximalwert hinaus.

25

Historische Entwicklung der CO₂-Konzentration
in den letzten 400.000 Jahren



Quelle: IWR, Daten: NOAA

© IWR, 2017

26

4. Kohlenstoff-Budget für die Grenzwerte 2.0 °C und 1.5 °C

4.1 Ziel und Modell

Es geht darum für einen Grenzwert

- die maximal zulässige emittierte Menge an Kohlenstoff in die Atmosphäre zu berechnen, das sogenannte Kohlenstoff-Budget.
- Die Zeitdauer zu bestimmen, bis das Budget ausgeschöpft ist.

Einfaches Modell:

$$\Delta W = \Delta F - \Delta R$$

- ΔW bezeichnet die Grösse der durch die Erde (hauptsächlich durch die Ozeane) aufgenommenen Nettoleistung.
- ΔF = Strahlungsantrieb.
- ΔR = reflektierte Leistung in die Atmosphäre.

27

In erster Näherung sind ΔW und ΔR proportional zur Temperaturerhöhung ΔT . Klimamodelle zeigen, dass gilt

$$\Delta W = \kappa \cdot \Delta T, \quad \Delta R = \lambda \cdot \Delta T$$

mit den geschätzten approximativen Parametern

$$\kappa = 0.6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}), \quad \lambda = 1.4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}).$$

4.2 Grenzwert $\Delta T = 2.0 \text{ °C}$

Wir berechnen die CO_2 -Konzentration c_2 für $\Delta T = 2 \text{ °C}$ aus $\Delta F = \Delta W + \Delta R = (\kappa + \lambda) \Delta T = 5.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln\left(\frac{c}{c_0}\right)$.

Hier sind jedoch die Nicht- CO_2 - Strahlungsantriebe (Methan, Lachgas..) noch nicht berücksichtigt. Laut dem IPCC wird dadurch ca. 0.5 °C zusätzliche Erwärmung verursacht.

28

Deshalb muss in der Berechnung

$\Delta T = 2 - 0.5 = 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$ gesetzt werden:

$$c_2 = c_0 \cdot \exp\left(\frac{(1.4 + 0.6) \cdot 1.5}{5.35}\right) = 490.6 \text{ ppm.}$$

Bekannte Tatsache: Bei Zunahme von c um 1 ppm nimmt die **reine Kohlenstoffmasse** (ohne Sauerstoff) zu um

$$a = 2,1 \cdot 10^9 \text{ t / ppm} = 2.1 \text{ Gt / ppm.}$$

Kohlenstoffsinken im Ozean und in den Wäldern entfernen durchschnittlich etwa 50% der emittierten Masse M_{em} .

Damit verbleibt 50% davon in der Atmosphäre.

29

Der Anteil der verbleibenden Masse M in der Atmosphäre gegenüber M_{em} wird als f_{air} (**airborne fraction**) bezeichnet. Sie betrug in den vergangenen Jahrzehnten ziemlich konstant 50%.

Modellsimulationen zeigen nun aber, dass der Wert von f_{air} mit zunehmender Temperaturerhöhung ΔT um etwa 5% pro Grad Erwärmung ansteigt. Somit gilt die Beziehung

$$\frac{M}{M_{em}} = f_{air} = 0,5 + 0,05 \cdot \Delta T.$$

Für $\Delta T = 2.0 \text{ }^\circ\text{C}$ bedeutet dies, dass 60% von M_{em} in der Atmosphäre bleibt und 40% durch die Ozeane und die Biosphäre aufgenommen wird.

30

Somit liegt durch die Erhöhung der Konz. von $c_0 = 280$ ppm auf $c_2 = 490.6$ ppm die Kapazität der Emissionsmasse bei

$$M_{em} = \frac{2,1 \text{ Gt/ppm} \cdot (490,6 - 280) \text{ ppm}}{0,6} = 737 \text{ Gt.}$$

Etwa 540 Gt wurden bis zum Jahr 2020 bereits emittiert.

Somit beträgt das Budget, das noch ausgestossen werden kann

$$\Delta M_{em} = (737 - 540) \text{ Gt} = 197 \text{ Gt.}$$

Mit einer Ausstossmenge von etwa 10 Gt/Jahr (entspricht bei einer für das Jahr 2021 geschätzten Weltbevölkerung von ca. 8 Milliarden etwa 1.25 t/Person) ergäbe sich damit eine Zeitspanne von 20 Jahren.

Die Parameter sind so bemessen, dass mit 50%iger Sicherheit $\Delta T \leq 2.0$ °C.

31

Danach müsste schlagartig klimaneutral produziert werden, was ein utopisches Szenario ist.

Für die höhere Sicherheit von 66% muss mit der kleineren Parametersumme $(\kappa + \lambda) = 1.8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ gerechnet werden mit der resultierenden Zeitspanne von lediglich 10 Jahren.

Danach müsste auch hier schlagartig klimaneutral produziert werden, ein noch utopischeres Szenario!

4.3 Grenzwert $\Delta T = 1.5$ °C

Eine analoge Rechnung gemäss Übungsaufgabe Nr. 96 (b) meines Buches *Schnelleinstieg Differentialgleichungen*,

2. Auflage, 2020 zeigt, dass das Budget lediglich noch

$$\Delta M_{em} = (671.3 - 540) \text{ Gt} = 131.3 \text{ Gt}$$

beträgt.

32

Wird mit einem konstanten jährlichen Ausstoss von 10 Gt gerechnet, beträgt die Zeitspanne 13.1 Jahre. Dies bei einer Sicherheit von lediglich 50%, dass für die tatsächliche Temperaturerhöhung gilt: $\Delta T \leq 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$.

4.4 Ein realistischeres Szenario?

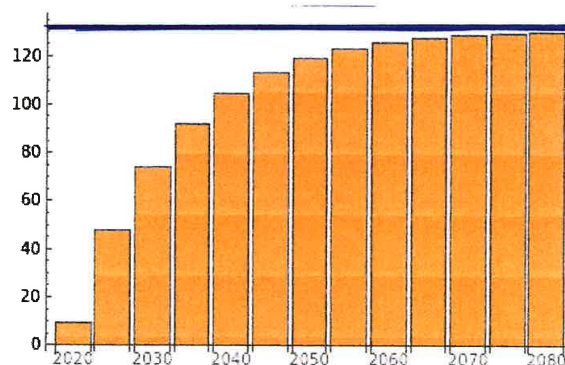
In Anlehnung an das Umweltschutzprogramm der Vereinten Nationen, dass der Ausstoss für die nächste 10 Jahre jährlich um 7.6% abnehmen müsste, betrachten wir folgendes Szenario: Würde die Ausstossmenge jährlich um 7.2% abnehmen mit dem gemessenen Anfangswert $A_0 = 9.5$ Gt im Corona-Jahr 2020, so ergäbe sich für die totale Ausstossmenge $A(k)$ nach k Jahren inklusive dem Jahr 2020 mit dem Faktor $m = 0.928$

$$A(k) = A_0 (1+m+m^2+m^3+\dots+m^k).$$

33

Mit dem Grenzwert $A_0/(1-m) = 131.9$ würde das Budget gerade ausgeschöpft.

Hier ist eine Grafik für die Jahre 2020 bis 2080 ($k= 0, 5, 10, \dots, 60$):



34

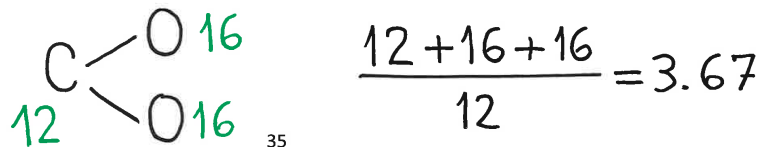
Nach 30 Jahren wären 87% des Budgets aufgebraucht und nach 40 Jahren bereits 92%.

Die Betrachtung zeigt ausserdem, dass bei einer prozentualen Abnahme pro Jahr unter 7.1% ($m > 0.928$) der Grenzwert von 131.3 Gt überschritten würde!

Titel eines Artikels in der NZZ vom Mai 2020: *Das Virus rettet das Klima nicht.*

Bemerkungen:

- Um Missverständnisse zu vermeiden hier noch das Verhältnis zwischen den Grössen einer gegebenen CO₂-Masse und ihrer reinen Kohlenstoffmasse C unter Verwendung der atomaren Massen:



- Die International Energy Agency IEA hat im Corona-Jahr 2020 geschätzt, dass die Emissionen gegenüber dem Vorjahr um 7.1% kleiner sei.

Nun wissen wir nach dem Corona-Jahr, dass es sich lediglich um eine Abnahme von 5.0% handelt.

4.5 Bedenkenswerte Fakten

- Für die aktuelle CO₂-Belastung pro Kopf für Indien (I), Schweden (S), Deutschland (D), USA (U), Katar (K), gilt etwa $K : U : D : S : I = 14 : 6 : 4 : 2 : 1$.
EU-Bürger beansprucht im Mittel 8 t CO₂-Äquivalente / Jahr.

Ein Vergleich² mit dem Energieverbrauch pro Kopf, zeigt etwa $K : U : D : S : I = 44 : 14 : 7 : 11 : 1$.

- NASA-Beobachtungen zeigen auf, dass die Arktische See im Jahr 1984 auf einer Fläche von 3 Millionen km² von Eis mit dem Mindestalter von 4 Jahren bedeckt war. Im Jahr 2019 waren es noch 116'000 km².
Nach 35 Jahren ist die Fläche somit auf 4% geschrumpft!
- Die Atmosphäre verhält sich wie ein Container, der keine Schadstoffe abbaut!



² Angeregt durch den Beitrag «Die Klimadebatte krankt an Wirklichkeits-verleugung» von Anton Stadler in der NZZ vom 12. November 2021.

5. Temperaturverlauf für verschiedene Szenarien (IPCC)

Referenz: Weltklimarat (Intergovernmental Panel on Climate Change)

Die vorgeschlagenen Temperaturerhöhungen bezieht sich auf die **vorindustrielle** mittlere Temperatur (ca. 1880-1900) von 13.75 °C. Im Jahr 2020 betrug sie bereits 14.65 °C.

Im **Fall von 2.0 °C** ist die Differenz von ca. 0.9 °C somit schon aufgebraucht.

Es geht also darum, ab dem Jahr 2020 mit $\Delta T = 1.1$ °C zu rechnen. Im Abschnitt über das CO₂-Budget wurde $c_2 = 490.6$ ppm berechnet, was dem hohen Strahlungsantrieb

$\Delta F_H = 5.35 \ln(490.6/280) = 3.00$ W/m² entspricht.

Im Jahre 2020 war er noch tief und betrug $\Delta F_T = 2.54 \text{ W/m}^2$.

Mittelwert = $\Delta F_M = 2.77 \text{ W/m}^2$. Die allgemeinere Gl. (4) auf p.18

$$\Delta T_\infty = \frac{232.9 + \Delta F - 377g}{5.24g}$$

liefert mit $\Delta_\infty = 1.1 \text{ }^\circ\text{C}$ für die abnehmenden Werte $\Delta F_H, \Delta F_M$ und ΔF_T praktisch konstante Werte:

$g_{1.1} = 0.616, 0.616$ und 0.615 .

Mit der Wahl $g_{1.1} = 0.616$ erhalten wir $B(g_{1.1}) = 5.24 \cdot 0.616 = 3.23$ und $A(g_{1.1}) = 232.9 + \Delta F - 377 \cdot 0.616 = 0.67 + \Delta F$.

Wegen $\Delta_\infty = A(g_{1.1}) / B(g_{1.1}) = 1.1 \text{ }^\circ\text{C}$ können wir den Mittelwert für ΔF verfeinern: $1.1 \cdot 3.23 = 0.67 + \Delta F$ $\Delta F_{M,\text{fein}} = 2.88$.

Damit lautet das zu (5) entsprechende Anfangswertproblem

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{A(g_{1.1})}{C_E} - \frac{B(g_{1.1})}{C_E} \cdot \Delta = \frac{3.55}{C_E} - \frac{3.23}{C_E} \cdot \Delta$$

mit $\Delta(0) = 0$.

mit der jahresabhängigen Lösung

$$\Delta(\tau) = 1.1 \cdot \left[1 - e^{-0.4939\tau} \right] \quad 2^\circ\text{C}$$

Im Fall von $1.5 \text{ }^\circ\text{C}$ liefert ein analoge Rechnung mit

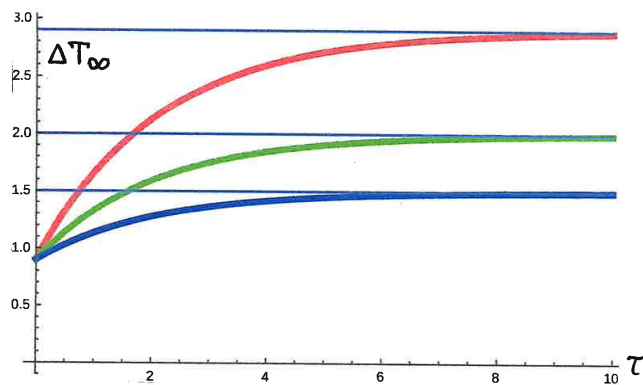
$$C_{1.5} = C_0 \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot 1}{5.35}\right) = 414.6, \quad \Delta F = 5.35 \ln\left(\frac{414.6}{280}\right) = 2.10, \quad g_{0.6} = 0.618$$

die Lösung

$$\Delta(\tau) = 0.6 \left[1 - e^{-0.4954\tau} \right] \quad 1.5^\circ\text{C}$$

In der folgenden Figur sind die beiden Graphen von $\Delta(\tau) + 0.9$ zu den Grenzwerten $2.0 \text{ }^\circ\text{C} / 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$ für 10 Jahre Zeitdauer geplottet und zum Vergleich nochmals den früheren Fall mit Grenzwert $2.9 \text{ }^\circ\text{C}$.

Der 0 entspricht das Jahr 2020, der 10 das Jahr 2030.



Mein Dank geht an Dr. Nicolas Gruber,
Professor für Umwelphysik an der ETH
für seine wertvolle aktive Unterstützung.

41

6. Sonstiges

6.1 Aktuelle CO₂- Daten

Weltweit:

- CO₂-Ausstoss im Coronajahr 2020 betrug 9.5 Gt = 9.5 Milliarden Tonnen,
- Weltbevölkerung 2021: 8.0 Milliarden.
- Ergibt eine mittlere pro Kopf-Belastung von 1.2 t
- Flugwesen global: 2.5%.
- Myclimate:
Ein Hin und Rückflug Zürich-Shanghai-Zürich wird mit ca.3t CO₂-Belastung verbucht.

42

Schweiz ohne internationale Flüge:

total 40 Mio t/Jahr, also 5 t pro Kopf und Jahr.

Aufschlüsselung:

32% Verkehr (inkl. den nationalen Flügen)

24% Gebäude

24% Industrie

14% Landwirtschaft

3.4% Synthetische Gase

1.6% Abfall

Internationale Flüge Schweiz:

6 Mio t/Jahr, entspricht 15% von 40 Mio t

43

6.2 Verallgemeinerte Geschwindigkeit V

nach Ivan Illich (1926-2002)

Philosoph, Theologe und Sozialkritiker:

$$V = \text{Weg} / \text{total aufgewendete Zeit}$$

Am Beispiel eines Autos:

Benutzungsdauer: 10 Jahre,

Preis des Kleinwagens: Fr. 15'000, entspricht

Fr. 1'500 / Jahr = 125 Fr/Mt,

Fahrdistanz 18'000 km/Jahr = 1'500 km/Mt,

Brutto-Jahresgehalt: Fr. 90'000 = 7'500/Mt.

44

Das Auto wird de facto vom Netto-Einkommen von Fr. 3'500 finanziert. Entspricht einem Netto-Stundenlohn von Fr. $3'500/(21 \times 8) = \text{Fr.}21$.

Jahreskosten:

- Versicherung Fr.500, Reparaturen Fr.300, Reifenwechsel Fr 300, Parkgebühren Fr.500. Total Fr.1'600.
 - Benzin 1.80/Liter, Verbrauch 6.5 Liter/100 km ergibt für 18'000 km jährliche Benzinkosten von $6.5 \times 180 \times 1.8 = \text{Fr.}2106$
 - Anschaffungskosten 1'500/Jahr
- Total $1'600 + 2'106 + 1'500 = \text{Fr.} 5'206/\text{Jahr}$

45

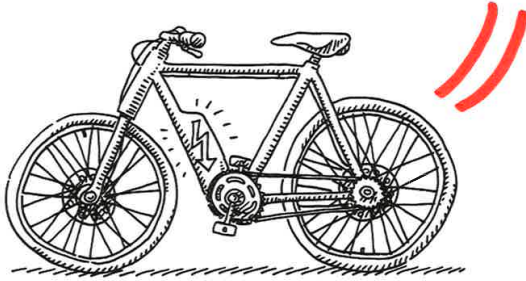
Aufzuwendende Zeitspannen pro Monat:

- Bei einer mittleren Geschwindigkeit von
 - 50 km/h benötigt man für die 1'500 km **30 h** Fahrzeit.
 - Stauzeit **7 h** (20 Min/Tag).
 - Parkplatz suchen **3.5 h** (10 Min/Tag).
 - 4 Fahrten hin und zurück für Pneuwechsel
+ 1 Fahrt für Reparatur/Jahr + Administration ergibt ca. 6 h/Jahr = **0.5 h**.
 - Arbeitszeit für den Kauf mit dem Netto-Stundenlohn
 $= 125/21 = \text{6 h}$.
- Total Zeit $30 + 7 + 3.5 + 0.5 + 6 = \text{47 h/Mt.}$
Weg = 1500 km/Mt.

46

Verallgemeinerte Geschwindigkeit:

$$\underline{V=1500 \text{ km} / 47\text{h} = 32 \text{ km/h}}$$



Myclimate: Für unser Auto mit 18'000 km/Jahr ergibt sich eine CO₂-Belastung von 4.8 t.

47

7. Studium und Unterricht

Mein dünnes Buch *Schnelleinstieg Differentialgleichungen* beinhaltet eine Vielzahl von Anwendungen und ermöglicht einen raschen und motivierenden Zugang zum Thema. Dabei steht das Verständnis an oberster Stelle.

Es beinhaltet 101 Übungsaufgaben mit Lösungen. Das einführende Kapitel 1 behandelt nur die Differential- und Integralrechnung, also noch keine Differentialgleichungen.

Es richtet sich

- an Studierende naturwissenschaftlicher Disziplinen und der Technik an Hochschulen und kann auch Dozierenden dienen. Wegen den Anwendungen kann es auch für Studierende der Mathematik interessant sein.

48

- an Gymnasien, wo es insbesondere im interdisziplinären Vertiefungsfach Physik und Angewandte Mathematik (PAM) Unterstützung geben kann, wobei auch die Informatik mit dem Einsatz eines Computeralgebra-Systems zum Zuge kommt.

Die Thematisierung der mathematischen Modellierung im Buch bietet eine Basis für Maturarbeiten. Darin sind auch konkrete Projekte beschrieben.

Die sorgfältige englische Übersetzung

*Fast Track to Differential Equations,
2nd Ed., Springer November 2021*

verdanke ich Frau Dr. Baoswan Dzung.

49



2. Aufl. 2020, XIV, 221 S. 137 Abb.

Gedrucktes Buch

Softcover

1) 27,99 € (D) | 28,77 € (A) | CHF 31,00

eBook

2) 19,99 € (D) | 19,99 € (A) | CHF 24,50

Albert Fässler

Schnelleinstieg Differentialgleichungen

anwendungsorientiert – verständlich – kompakt

- Anwendungsorientierte und verständliche Einführung in gewöhnliche DGLen
- Verzichtet weitestgehend auf abstrakte Beweise
- Bietet eine Vielzahl an Beispielen aus verschiedensten Bereichen der Naturwissenschaften und Technik

Diese kompakte Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen richtet sich mit einer Fülle von Anwendungen aus verschiedensten Gebieten an alle, die in ihrem Studium freiwillig oder unfreiwillig mit dem vielseitigen Thema konfrontiert werden. Zahlreiche kleinere und größere Beispiele aus Physik, Technik, Biomathematik, Kosmologie, Ökonomie, Optimierung und Geometrie ermöglichen einen raschen und motivierenden Zugang – auf unnötigen Formalismus und Existenzbeweise wird weitestgehend verzichtet. Im Vordergrund steht das Modellieren von Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung sowie deren analytische und numerische Lösungsverfahren. Umfassendere Modellierungen betreffen die aktuellen Themen Klimaänderung und Epidemiologie (mit Bezug zur Coronavirus-Pandemie). Außerdem wird mit exemplarischen Codes gezeigt, wie mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) auch anspruchsvollere Fragen beantwortet und sinnvoll graphisch dargestellt werden können. Eine Vielzahl an Übungen inklusive Lösungen rundet das Werk ab. Dr. Alessio Figalli, Professor an der ETH Zürich und Träger der Fields-Medaille 2018: "Ich bin froh, ein solches Buch zu sehen. Es wird vielen Studierenden, Professoren und Lehrkräften als Unterstützung dienen."