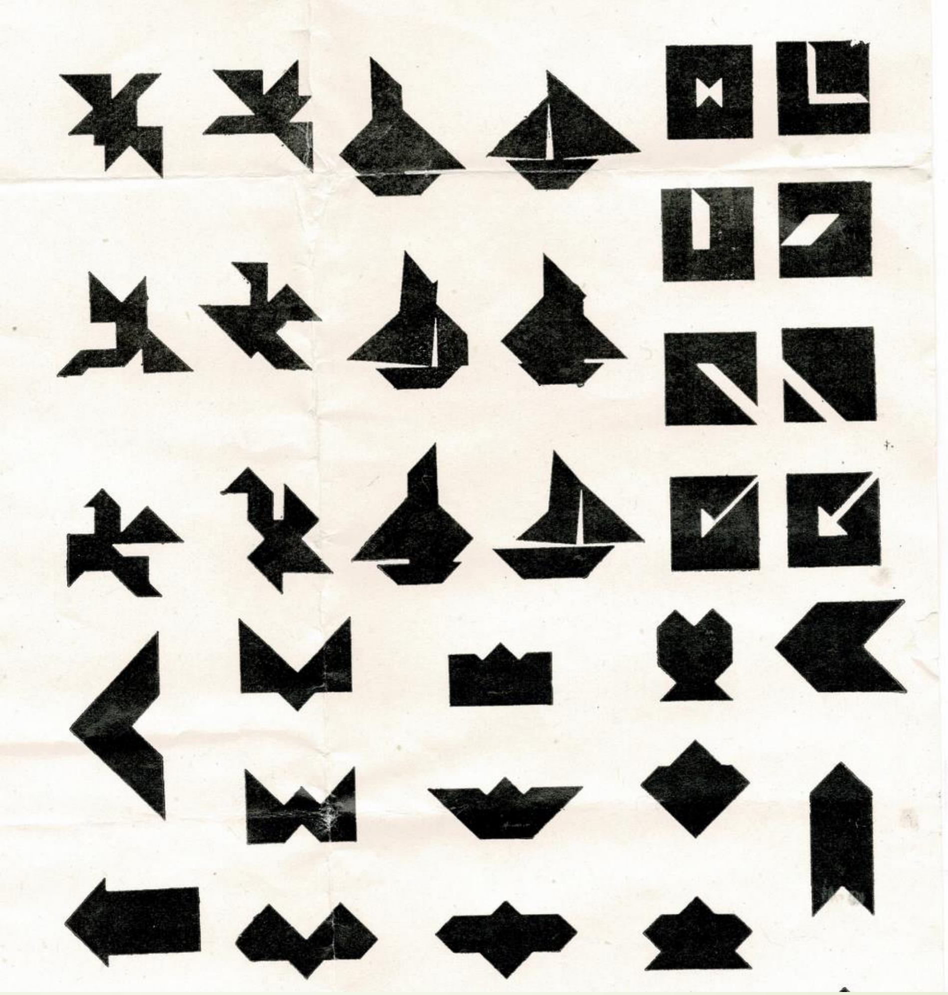
Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke

(Würzburg, 30.11.2021)

Die Idee: Tangram-Geometrie



Eine moderne Definition

Zwei Polygone (in der Ebene, auf der Kugel) heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie sich in gleichviele, paarweise kongruente Teilpolygone zerlegen lassen.

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann, kann man auch die Teilpolygone durch Dreiecke ersetzen.

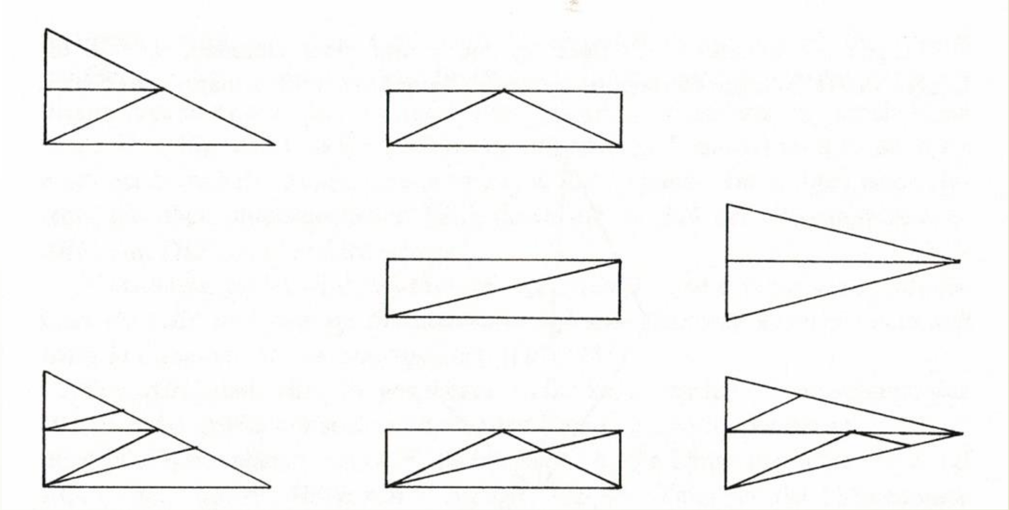
Man beachte: Es geht hier nur um endlich viele Teile, alles ist endlich. Deshalb sprach man früher auch von **endlich gleichen** Polygonen – im Unterschied zur Flächenmessung, für die man ja Grenzprozesse braucht.

Vorsicht: In der sphärischen Geometrie bekommt man Probleme, wenn die Dreiecke „zu groß“ werden. Wir beschränken uns auf Eulersche Dreiecke: Alle Seiten und Winkel kleiner als 180°.

Eigenschaften

Die Zerlegungsgleichheit ist – modern gesprochen - eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität und Symmetrie liegen auf der Hand, die Transitivität ist in folgender Figur angedeutet:



Man kann also definieren: Ein Flächeninhalt ist eine Äquivalenzklasse von sphärischen Polygonen gemäß der Relation „ist zerlegungsgleich“.

Grundbegriffe der Sphärik

Grundbegriffe: Sphäre (der Einfachheit halber mit Radius 1) mit Punkten auf ihr, Großkreise (werden ausgeschnitten von Ebenen, die durch den Kugelmittelpunkt verlaufen), Kleinkreise (alle anderen Kreise auf der Kugel, ausgeschnitten von ebenen nicht durch den Kugelmittelpunkt), Winkel zwischen Großkreisen (festgelegt als Winkel zwischen den zugehörigen Ebenen)

Besondere Punkte: Diametralpunkte

Besonderheiten: Zwei Großkreise schneiden sich immer in einem Paar von Diametralpunkten: Es gibt keine parallelen Großkreise. Durch zwei Diametralpunkte gehen immer unendlich viele Großkreise, durch zwei sonstige Punkte immer nur einer. Es gibt Zweiecke auf der Sphäre und es gilt zusätzlich der Kongruenzsatz WWW.

Die Länge von Großkreisbögen wird gemessen durch den zugehörigen Winkel am Kugelmittelpunkt. Es gibt ein absolutes Maß für diese Längen, z. B. 90°.

Paul Gerwien (1833)

16.

Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.

(Von Herrn *Gerwien*, Pr. Lieut. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Regim.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 228 – 234 und Tafel III.

Gerwien (1833a)

17.

Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.

(Vom Herrn *P. Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preuſs. 22sten Inf. Reg.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 130 – 135 und Tafel IV

Gerwien 1833a

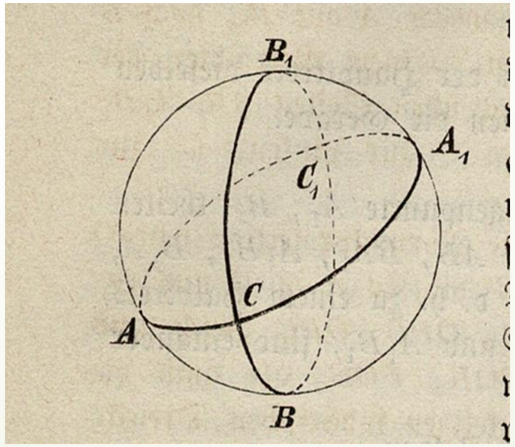
Zu beachten ist, dass Gerwien die sphärische Geometrie der ebenen gewissermaßen gleichberechtigt zur Seite stellt. Das war damals keine Selbstverständlichkeit (vgl. Gudermann, Chr.: Lehrbuch der niederen Sphärik (1835) [https://doi.org/10.3931/e-rara-57114]).

In der sphärischen Geometrie wird die Dreiecksfläche i. w. gemessen durch den Exzess, also durch den Überschuss der Winkelsumme über 180°. L. Euler hat hierfür einen sehr schönen Beweis geliefert.

Also muss man i.w. zeigen: Zwei Dreiecke gleicher Winkelsumme sind zerlegungsgleich. Das geht mit Hilfe der Lexell-Kreise, das ist die Ortslinie, auf der die Spitzen aller maßgleichen Dreiecke liegen, wenn man die Basis festhält.

Wie misst man Flächen auf der Kugel?

Erste Ansätze zur richtigen Antwort: Thomas Harriot (ca. 1600), bekannt geworden durch Girard (1629); es folgt der Beweis von Bonaventura Cavalieri (Directorium generale uranometricum, 1623). Das Maß der Fläche eines Zweiecks (auf der Einheitssphäre 2a, wenn a der Öffnungswinkel ist) wird als bekannt vorausgesetzt. ABC sei das gegebene Dreieck.



Fläche des sphärischen Dreiecks

Man verlängere die Dreiecksseiten AB und AC zu Großkreisen, dann entsteht das Zweieck AA_1 (A_1 ist der Gegenpunkt zu A). Analog verfahre man mit BA und BC; es entsteht das Zweieck BB_1.

Um eine Halbkugel zu überdecken, fehlt nun noch das Dreieck CA_1B_1, ein Scheiteldreieck des Ausgangsdreiecks. Nimmt man zu diesem das Gegendreieck $A_1B_1C_1$ hinzu, so erhält man das Zweieck CC_1.

Nimmt man die drei Zweiecke zusammen, so hat man die Halbkugel plus Gegendreieck überdeckt. Gegendreieck und Dreieck sind aber kongruent, also sicher flächengleich. Also gilt:

Fläche der Zweiecke = Fläche Halbkugel plus Fläche Dreieck

Jetzt liefert Einsetzen die Behauptung – allerdings muss man noch beachten, dass das Ausgangsdreieck gemäß der linken Seite doppelt überdeckt wird.

Fläche des sphärischen Dreiecks

In der sphärischen Geometrie existieren Kreise, die man quadrieren kann. Sehr vereinfacht gesagt liegt das daran, dass in der Formel für den Dreiecksinhalt die Kreiszahl auftritt.

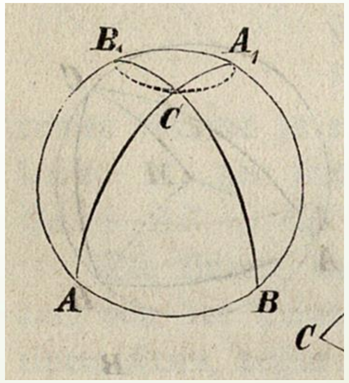
Die Lehre der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auf der Kugel wird sehr ausführlich bei Gudermann behandelt, er bespricht sogar die Frage, wie solche Instrumente konkret aussehen könnten – z.B. ein Großkreislineal.

Vgl. Meschkowski, H.: Gelöste und unlösbare Probleme der Geometrie (Braunschweig: Vieweg, 1975), 129 – 137.

Ein wichtiges Hilfsmittel: Lexell-Kreise

Gegeben ein Dreieck ABC auf der Sphäre. Lexell-Kreise sind dann Ortslinien für maßgleiche Dreiecke: Entweder man hält die Grundseite AB fest und lässt C wandern, oder, man hält C fest und lässt die Strecke AB wandern. Die entsprechenden Ortslinien – Kleinkreise – heißen Lexell-Kreise.

Der erste Lexell-Kreis geht durch die Punkte A, B und C‘ (Diametralpunkt von C): siehe Abbildung. Der zweite durch A‘, B‘ und C. Lexell-Kreise sind Kleinkreise, festgelegt durch die Ebene durch die drei genannten Punkte.



Beweis

Der Beweis beruht i.w. auf folgenden Satz:

Sei ABC ein sphärisches Dreieck nebst Umkreis. Bewegt sich die Ecke C auf diesem Umkreis, so gilt:

$$< BAC + < CBA - < ACB$$

ist konstant.

Das ist sozusagen das Analogon des Perpheriewinkelsatzes der ebenen Geometrie.

Details: Baltzer 1867, 177 – 178.

Der Satz

In der sphärischen Geometrie gilt:

Zwei maßgleiche Polygone sind stets auch zerlegungsgleich. Da die Umkehrung hiervon auch gilt, hat man es mit einer Äquivalenz zu tun.

Grewien zerlegt den Beweis in mehrere Schritte, von einer speziellen Situation ausgehend zu allgemeineren übergehend.

Interessanterweise verläuft sein Beweis nicht analog zum ebenen Fall. Man kann aber umgekehrt den Beweis aus der sphärischen Geometrie in die ebene euklidische übertragen, auch in die hyperbolische (Finzel, 1910).

Beweis des Satzes von Gerwien

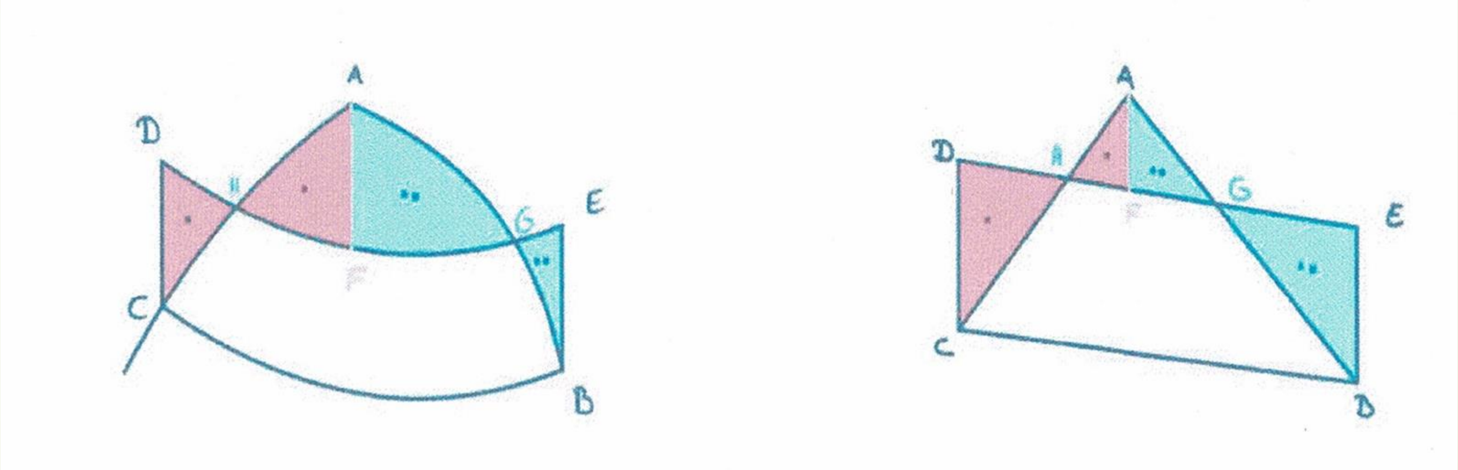
1. Schritt: Gegeben sei das Dreieck ABC. Wir konstruieren zu diesem Dreieck ein zerlegungsgleiches Viereck mit zwei rechten Winkeln.

Wir konstruieren die beiden Lexell-Kreise des Dreiecks und den zu diesen konzentrischen Großkreis (dessen Ebene liegt parallel zu den Ebenen der Lexell-Kreise genau in der Mitte zwischen diesen).

a) Dieser schneide die Seite AC des Dreiecks in H, die Seite AB in G. Nun fälle man die Lote von C und B auf den Großkreis, Fußpunkte seien D und E.

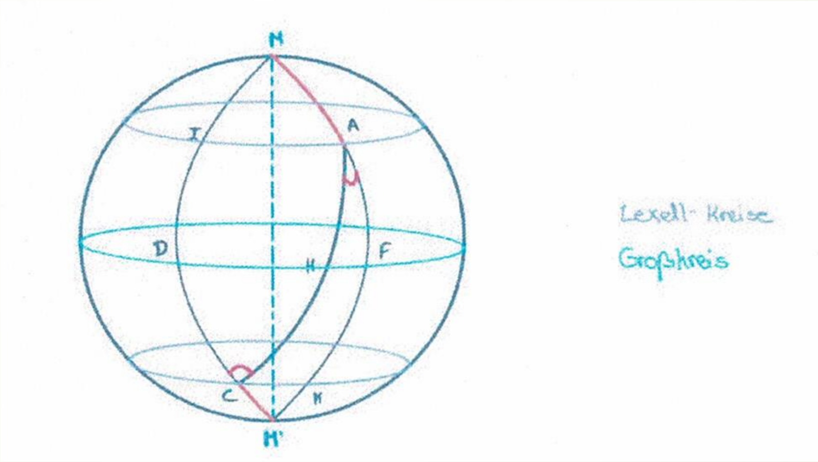
Die Abbildungen stammen aus der BA-Thesis von Yamina Recht (Universität Luxemburg 2021).

Beweis des Satzes von Gerwien (1. Schritt)



Beweis des Satzes von Gerwien (1. Schritt)

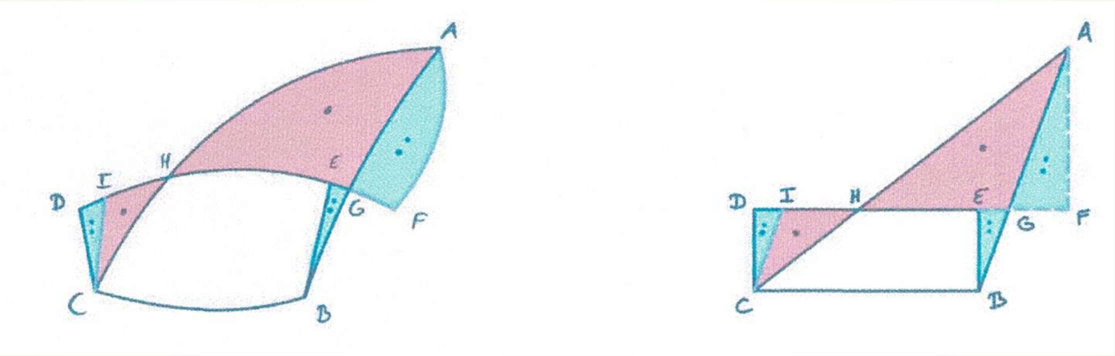
Der wesentliche Punkt ist zu zeigen, dass die Dreiecke MAC und M‘AC kongruent sind. Hierzu braucht man vor allem IC = AK.



Folgerung: Der Großkreis halbiert die Seiten AC und AB, F und G sind die Seitenmitten.

Beweis des Satzes von Gerwien (1. Schritt)

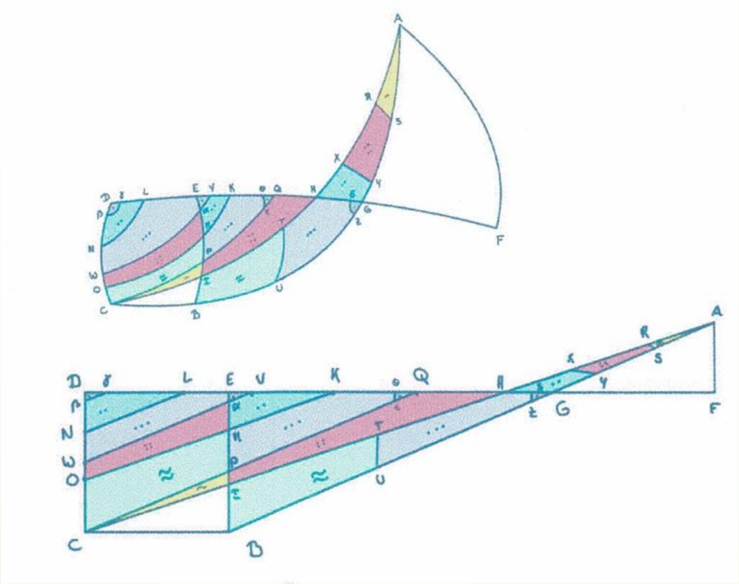
b) Die Situation könnte aber auch so aussehen:



Das heißt, nur die Seite AC schneidet den Großkreis. Hier ist schon etwas mehr Arbeit erforderlich.

Beweis des Satzes von Gerwien (1. Schritt)

c) Aber es kann ja noch schlimmer kommen! Beim Fall, dass weder AC noch AB die Strecke GH treffen, muss man drei Unterfälle unterscheiden. Der mühsamste Fall (der dritte Unterfall) ist dieser:



Beweis des Satzes von Gerwien (1. Schritt)

Wir haben jetzt gezeigt: Zwei sphärische Dreiecke mit gleichem Flächenmaß und einer gemeinsamen Seite sind zerlegungsgleich.

Begründung: Sie führen letztlich auf das gleiche Viereck.

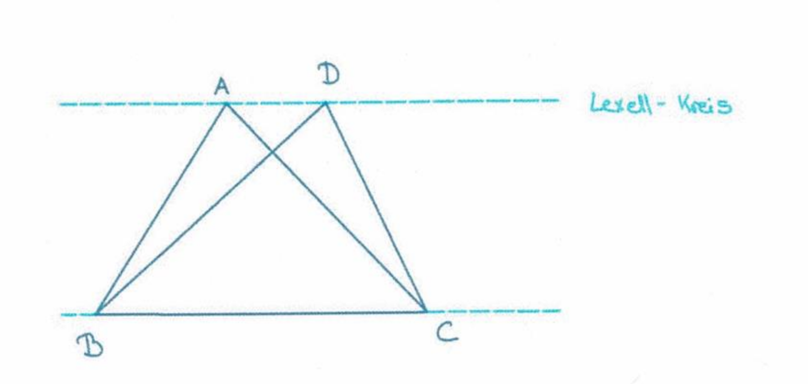
Sind die Grundseiten nicht mehr identisch sondern nur gleich lang, so kann, wenn man die Dreiecke „richtig“ legt, analog argumentieren. Dabei braucht man, dass der Lexell-Kreise genau alle Spitzen von maßgleichen Dreiecken zu einer festen Grundseite enthält.

Im zweiten Schritt befreien wir uns von der Voraussetzung, dass die Grundseiten gleich lang sein sollen.

Beweis des Satzes von Gerwien (2. Schritt)

Gegeben seien zwei maßgleiche Dreiecke ABC und EFG.

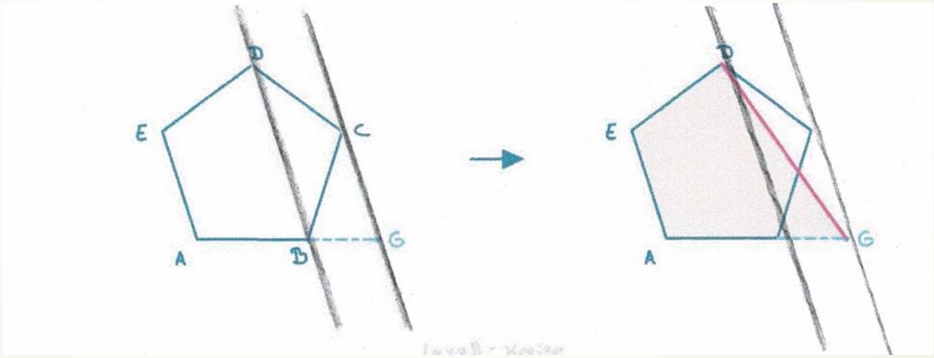
Idee: Man ändert eines der Dreiecke, z. B. ABC, unter Erhaltung der Winkelsumme so ab, dass das entstehende Dreieck ABD eine Seite besitzt, die gleichlang wie eine Seite von EFG.



Zweimalige Anwendung von Schritt 1 liefert nun die Behauptung.

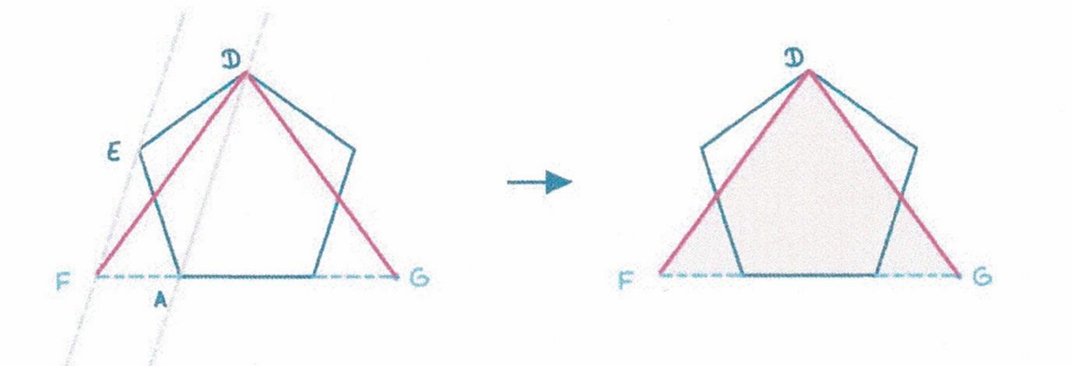
Beweis des Satzes von Gerwien (3. Schritt)

Im dritten Schritt werden Polygone betrachtet, die maßgleich sind. Die zentrale Idee ist, ein n-eck in ein zerlegunsg- also auch maßgleiches (n-1)-ecks zu überführen:



Beweis des Satzes von Gerwien (3. Schritt)

Und noch einmal:

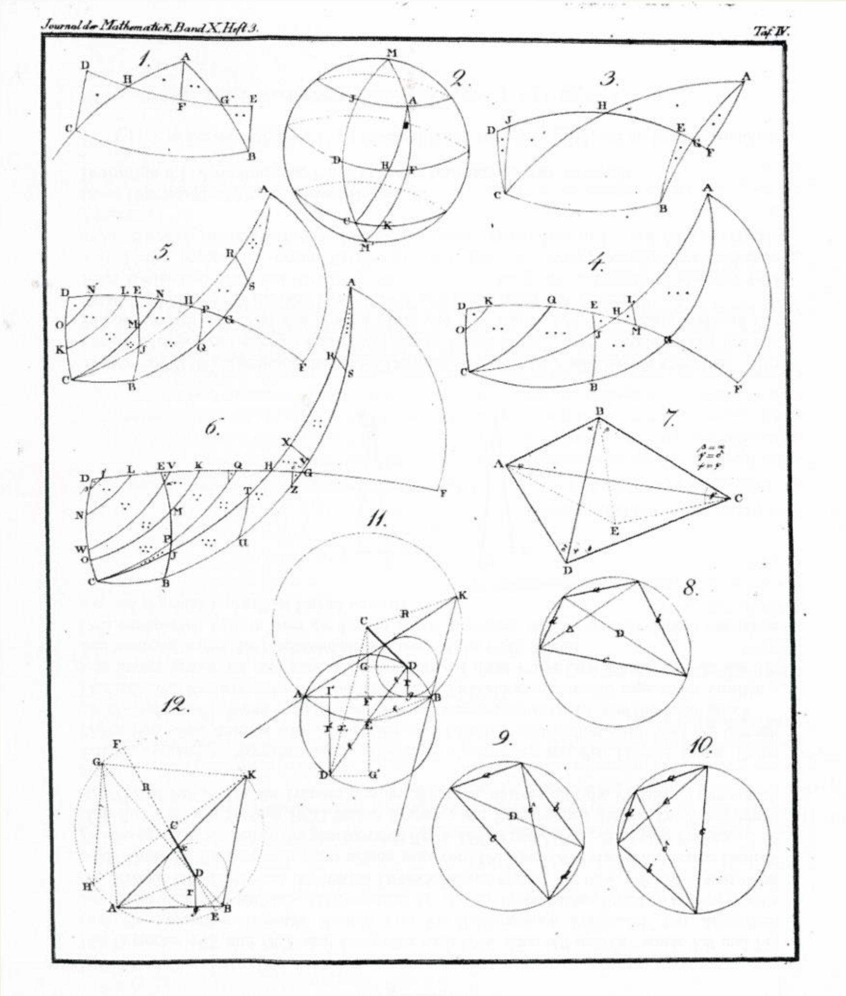


Beweis des Satzes von Gerwien (3. Schritt)

Fazit: Sind die beiden maßgleichen Polygone P und P* gegeben. So können wir diese verwandeln in ihnen zerlegungsgleiche Dreiecke D und D*. Diese sind aber auch maßgleich den Polygonen und somit unter einander maßgleich.

Also hat man zwei maßgleiche Dreiecke. Diese sind aber gemäß Schritt 2 auch zerlegungsgleich. Den Rest erledigt die Transitivität.

Gerwien 1833a



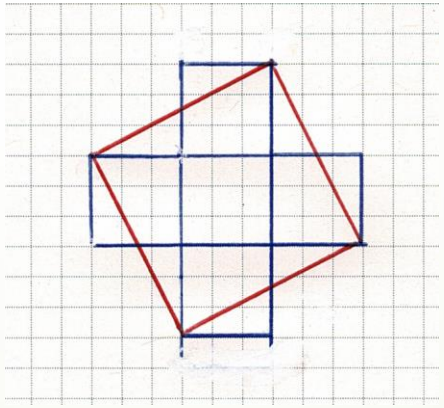
Verbindung zur Zahlentheorie

Um eine Beziehung zur Zahlentheorie herzustellen, will ich hier eine Idee andeuten, allerdings im ebenen Fall. Die Frage, ob und falls ja wie diese Überlegungen auf die Kugel zu übertragen sind, ist allerdings auch interessant.

Anwendungen (ebener Fall)

Es gibt eine sehr große Zahl von Anwendungen der Zerlegungsgleichheit, die oft den Charakter von Rätseln (Puzzle) haben.

Eine systematische Idee verbirgt sich in der Quadrat des Fake Schweizer Kreuzes:

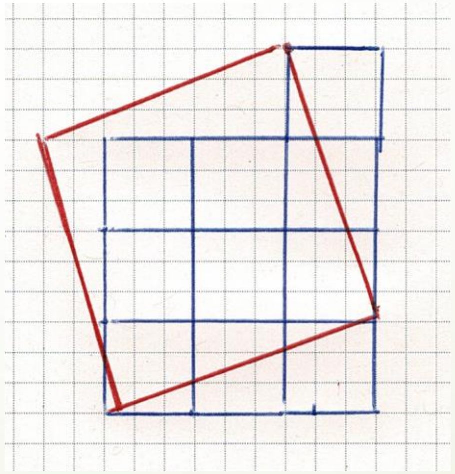


Warnung: Das echte Schweizer Kreuz besteht nicht aus fünf Quadraten – vgl. Hungerbühler/Nüsken 2006.

Anwendungen

Man kann die Ebene überschneidungsfrei und lückenlos mit Fake Schweizer Kreuzen überdecken. Dann legt man passend eine analoge Überdeckung mit den großen Quadraten – ihre Kantenlänge ist Wurzel fünf – drüber. Und schon ist die Quadratur fertig.

Ein weiterer Versuch:



Anwendungen

Welche aus Einheitsquadraten bestehende Figuren kann man so quadrieren? Passend heißt ja, Anfangs- und Endpunkt der Quadratseite fallen mit Gitterpunkten zusammen. Besteht die Figur aus n Einheitsquadraten, so braucht man für das große Quadrat die Kantenlänge Wurzel n. Sollen die Endpunkte Gitterpunkte sein, so muss sich n schreiben in der Form $a^2 + b^2$ (a Schritte nach rechts, b Schritte nach oben im Gitter). Also sucht man alle natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben. Das ist ein bekanntes zahlentheoretisches Problem.

„Schöne" Parkettierungen erhält man, wenn die Zahl a^2+b^2 eine dreieckszahl ist (wie 10). Dann kann man als Zelle der Parkettierung eine „Treppe" nehmen, die man symmetrisch zum einem Rechteck ergänzt. Ansosnten scheint mir das Problem offen, allerdings ist „schön" auch schlecht definiert!

Das Buch von Frederickson (siehe Literatur unten) ist eine wahre Fundgrube für solche Rätsel etc.

Ein Ausblick

Studiert man die Figuren mit dem Fake Schweizer Kreuz und der Bodenkachelung genauer, so sieht man, dass man, um das große Quadrat zu erhalten, Stücke an der Ausgangsfigur abschneiden und diese verschieben muss.

Die Zerlegungsgleichheit benötigt hier also nur Translationen. Mit solchen Fragen haben sich H. Hadwiger (1908 - 1981), Professor in Bern, und seine Schüler beschäftigt. Man findet von ihnen einige sehr interessante Artikel in alten Heften der Zeitschrift „Elemente der Mathematik".

Z.B. kann man beweisen, dass ein Dreieck und ein Rechteck niemals translativ zerlegungsgleich sind (vgl. Hadwiger/Glur: Zerlegungsgleicheit ebener Polygone (Elemente der Mathematik 6 (1951), 97 – 106).

Hadwiger hat übrigens die Theorie von Dehn auf höhere Dimensionen (als drei) erweitert.

Literatur

Baltzer, R.: die Elemente der Mathematik. Zweiter Band. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie (Leipzig: Hirzel, ²1867).

Finzel, A.: Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie (Mathematische Annalen 72 (1912), 262 – 284).

Frederickson, G. N.: Dissections: Plane and Fancy (Cambridge: CUP,1997.

Hungerbühler, N./Nüsken, M.: Delian Metamorphoses (Elemente der Mathematik 61 (2006), 1 – 19).

Recht, Y.: Die Lehre vom Flächeninhalt auf der Kugel (BA-Thesis, Universität Luxemburg, Februar 2021).

Volkert, K.: Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone (Mathematische semesterberichte 46 (1999), 1 – 28).