

Primzahlverteilung Zeta-Funktion RIEMANNsche Vermutung

... den Vorhang eine Handbreit aufgemacht ...

Giancarlo Copetti
(ehemals Kantonschule Schaffhausen)
giancarlo.copetti@shlink.ch

Vortrag an der ETH Zürich,
25. November 2021

1

Abstract

Im Zentrum des Vortrages steht die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der RIEMANNschen Zetafunktion resp. ihren Nullstellen und der Primzahlverteilung.

Ein wichtige Rolle wird dabei auch die «exakte Formel» von VON MANGOLDT für die CHEBYCHEVsche Ψ -Funktion spielen, mit deren Hilfe sich der Primzahlsatz reformulieren lässt.

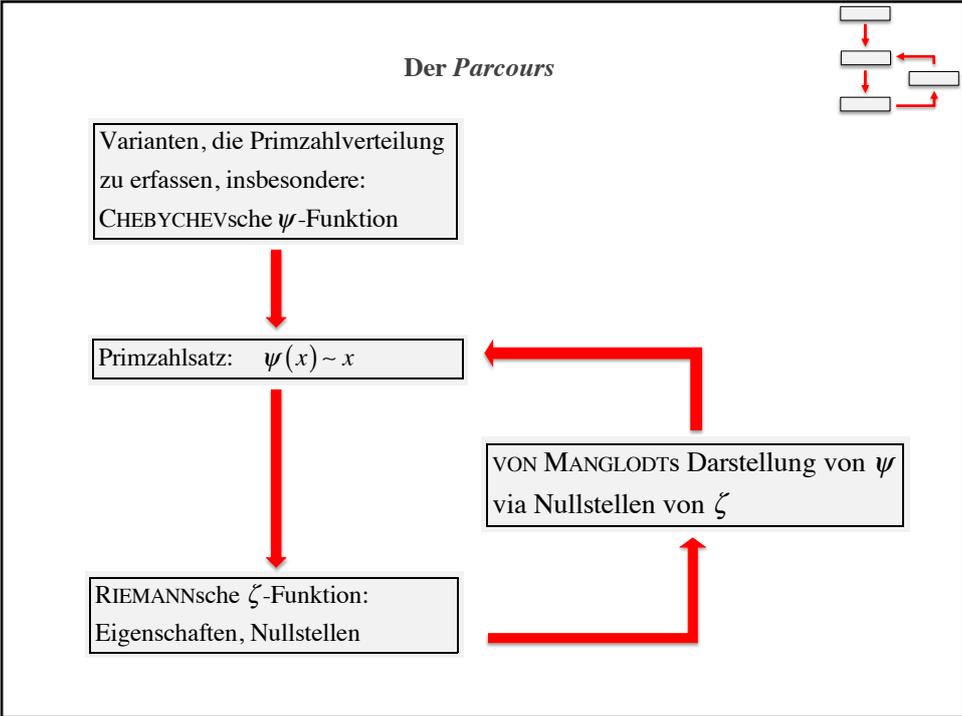
Sparsame Hinweise im Hinblick auf den gymnasialen Unterricht sollen als Anregung für Überlegungen dienen, wie sich einzelne Aspekte in angemessener Form und in einem geeigneten Rahmen evt. am Gymnasium behandeln liessen.

2

Inhalt

- Der *Parcours* 04
- Die wichtigsten Protagonisten 05
- Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen 06
- Der Primzahlsatz 12
- Zur Genesis der Zeta-Funktion 13
- Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion 15
- Die VON MANGOLDT'sche Darstellung der CHEBYCHEV'schen Psi-Funktion 24
- Approximationen der Psi-Funktion 28
- Zusammenhang Nullstellen der RIEMANN'schen Zeta-Funktion und Primzahlsatz 32
- Zum Beweis des Primzahlsatzes 36
- Zur Bedeutung der RIEMANN'schen Vermutung für den Primzahlsatz 37
- Literatur 38

3



4

Die wichtigsten Protagonisten



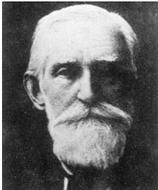
Leonhard EULER
1707 – 1783



Carl Friedrich GAUSS
1777 – 1855



Bernhard RIEMANN
1826 – 1866



Pafnuty CHEBYSHEV
1821 – 1894



Jacques HADAMARD
1865 – 1963



Charles DE LA
VALLÉE POUSSIN
1866 – 1962

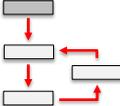


Hans VON MANGOLDT
1854 – 1925

Quellen: <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/>, https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Carl_Friedrich_von_Mangoldt

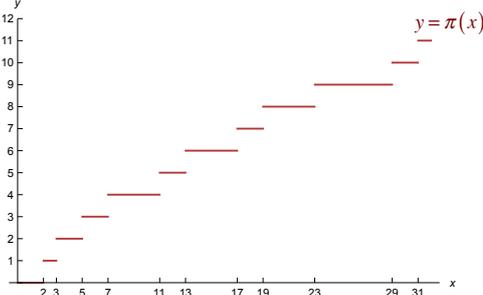
5

Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen



- Seit EUKLID (~ 300 v. Chr.) wissen wir: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*
- Die Primzahlen erscheinen *regellos* unter die natürlichen Zahlen gemischt.
- Frage: Lassen sich *etwa doch Gesetzmässigkeiten* aufdecken?
Aus «statistischer» Warte?
- Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) = \#\{p \mid p \text{ prim}, p \leq x\} = \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} 1$$



6

Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen

Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \mid p \text{ prim}, p \leq x\} = \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} 1$$

Numerische Experimente legen nahe:

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln(x)}$$

Siehe (z.B.): [4] DERBYSHIRE

Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$

Zur Präzisierung von \approx .

Def.: Asymptotische Gleichheit zweier Funktionen f und g :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

7

Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen

Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \mid p \text{ prim}, p \leq x\} = \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} 1$$

Andere Varianten für g mit $\pi \sim g$:

- GAUSS, ca. 1791 / 1849: $g(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(t)} dt =: Li(x)$
- LEGENDRE, 1798: $g(x) = \frac{x}{\ln(x) - A}$ mit $A = 1.08366$

| Unter | Primzahln | Integral $\int \frac{dx}{\ln x}$ | Differ | Ihre Formel | Abweich. |
|-----------|-----------|----------------------------------|---------|-------------|----------|
| 500 000 | 41 556 | 41 506,4 | + 50,4 | 41 596,9 | + 40,9 |
| 1 000 000 | 78 501 | 78 227,5 | + 126,5 | 78 674,7 | + 171,7 |
| 1 500 000 | 114 112 | 114 263,1 | + 151,1 | 114 374,0 | + 263,0 |
| 2 000 000 | 148 883 | 149 054,8 | + 171,8 | 149 233,0 | + 350,0 |
| 2 500 000 | 183 016 | 183 245,0 | + 229,0 | 183 495,1 | + 479,1 |
| 3 000 000 | 216 974 | 216 970,6 | + 225,6 | 217 308,5 | + 563,6 |

Dass Legendre sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, was mir nicht bekannt, auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner Theorie des Nombres nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Stellen gefunden, die ich früher übersehen (oder seitdem vergessen) haben muß. Legendre gebraucht die Formel

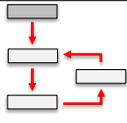
$$\frac{x}{\ln x - A}$$

wo A eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt. Nach einer flüchtigen Rechnung finde ich darauf

Quelle: <https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/199>

Aus einem Brief von GAUSS an ENCKE, Dez. 1849

8



Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen

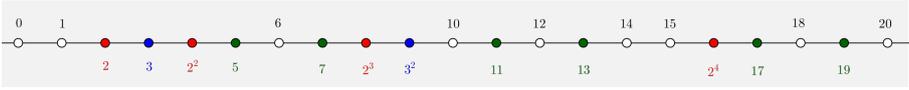
CHEBYCHEVSCHE θ -Funktion, 1848

$$\theta(x) := \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} \ln(p)$$

CHEBYCHEVSCHE ψ -Funktion, 1848

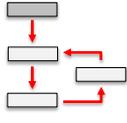
$$\psi(x) := \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p^k \leq x}} \ln(p)$$

Beispiel: $\psi(20) = ?$



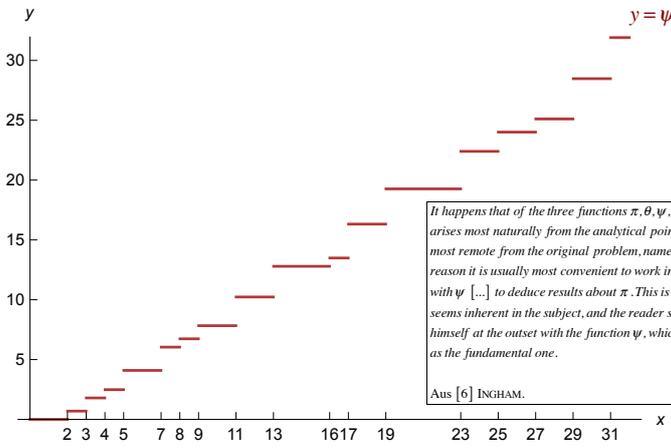
$\psi(20) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(2) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(11) + \ln(13) + \ln(2) + \ln(17) + \ln(19)$
 $= 4 \ln(2) + 2 \ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(11) + \ln(13) + \ln(17) + \ln(19)$
 ≈ 19.3

9



Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen

CHEBYCHEVSCHE ψ -Funktion, 1848

$$\psi(x) := \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p^k \leq x}} \ln(p)$$


$y = \psi(x)$

It happens that of the three functions π , θ , ψ , the one which arises most naturally from the analytical point of view is the one most remote from the original problem, namely ψ . For this reason it is usually most convenient to work in the first instance with ψ [...] to deduce results about π . This is a complication which seems inherent in the subject, and the reader should familiarise himself at the outset with the function ψ , which is to be regarded as the fundamental one.

Aus [6] INGHAM.

10

Varianten, die Primzahlverteilung zu erfassen

CHEBYCHEV'sche ψ -Funktion, 1848

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p^k \leq x}} \ln(p)$$

Vermutung $\psi(x) \sim x$

11

Der Primzahlsatz

Satz CHEBYCHEV, 1848

(i) Falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)}$ existiert, dann ist er gleich 1.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x}$.

Beweis: (z.B.) [5] HAVIL

Primzahlsatz (PZS), HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN, 1896

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{resp.} \quad \psi(x) \sim x$$

Beweis: (z.B.) [6] INGHAM

12

Zur Genesis der Zeta-Funktion

EULER 1737:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-1})^{-1},$$

Der *Brückenschlag* zwischen Zahlentheorie und Analysis!

Man kann zeigen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-x})^{-1} =: \zeta(x), x > 1$$

RIEMANN, 1859: *Übergang von reellen Argumenten zu komplexen Argumenten*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1}, \operatorname{Re}(s) > 1,$$

sowie *analytische Fortsetzung* auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$\zeta(s)$ = RIEMANNsche ζ -Funktion

13

Zur Genesis der Zeta-Funktion

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4116} + \dots$$

Fundamentalsatz der Arithmetik
 $4116 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^3$

Distributivgesetz:

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \dots\right) \cdot \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11}} \cdot \dots$$

14

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

Für einiges, die ζ -Funktion betreffend: Siehe (z.B.)

- [1] AHLFORS
- [5] HAVIL
- [6] INGHAM

RIEMANNs epochaler Artikel

Bernhard RIEMANN : Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859. [7]

Ausgangspunkt:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1}, \operatorname{Re}(s) > 1.$$

(1) Die durch die obige Definition in die Welt gekommene ζ -Funktion lässt sich analytisch fortsetzen auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Die so gewonnene Funktion nennt man die RIEMANNsche ζ -Funktion. ζ hat in $s = 1$ einen einfachen Pol.

15

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

(2) $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$.

(3) **Symmetrieeigenschaft von $\Xi(s)$ unter $s \rightarrow 1-s$**

$$\Xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \Xi(1-s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad s \notin \{0, 1\}$$

Zum Übergang $s \rightarrow 1-s$

v eine echt komplexe Nullstelle von ζ
 $\Rightarrow \bar{v}, 1-v, 1-\bar{v}$ ebenfalls Nullstellen

Γ : die Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion.

- analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$
- keine Nullstellen.

16

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

(4) Alle komplexen (nicht-reellen) Nullstellen ρ der ζ -Funktion befinden sich im sog. *kritischen Streifen* $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$.

Argumentation.

(i) Es existiert kein ρ mit $\text{Re}(\rho) > 1$:
folgt aus der Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdot \dots$$

von ζ .

(ii) Es existiert kein ρ mit $\text{Re}(\rho) < 0$:
folgt aus (i) und der Symmetrieeigenschaft (3).

17

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

(5) **Funktionalgleichung**

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

- $s = -2k, k \in \mathbb{N}$: $\zeta(-2k) = \underbrace{2^{-2k}}_{\neq 0} \underbrace{\pi^{-2k-1}}_{\neq 0} \underbrace{\sin(-\pi k)}_0 \underbrace{\Gamma(1+2k)}_{\substack{\in \mathbb{N} \\ (2k)! \neq 0}} \underbrace{\zeta(1+2k)}_{\substack{> 1 \\ \neq 0}} = 0$
- $s = 2k, k \in \mathbb{N}$: $\zeta(2k) = \underbrace{2^{-2k}}_{\neq 0} \underbrace{\pi^{-2k-1}}_{\neq 0} \underbrace{\sin(\pi k)}_0 \underbrace{\Gamma(1-2k)}_{\substack{\text{negativ, ungerade} \\ \text{Polestellen} \\ \infty}} \underbrace{\zeta(1-2k)}_{\substack{\text{negativ, ungerade} \\ \neq 0}} \neq 0$

(6) Nullstellen der ζ -Funktion sind u.a. die *negativen, geraden Zahlen* $-2, -4, -6, -8, \dots$
Man nennt diese Nullstellen die *trivialen Nullstellen*.
Alle übrigen werden als *nichttriviale Nullstellen* bezeichnet.

18

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

Die RIEMANNsche Vermutung

(7) Die nichttrivialen Nullstellen der ζ -Funktion liegen allesamt auf der kritischen Gerade $\text{Re}(s) = 1/2$.

«Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indes die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.» Aus [7] RIEMANN.

(8) **Satz HARDY, 1914**
Die ζ -Funktion hat unendlich viele nichttriviale Nullstellen auf der kritischen Gerade $\text{Re}(s) = 1/2$.

19

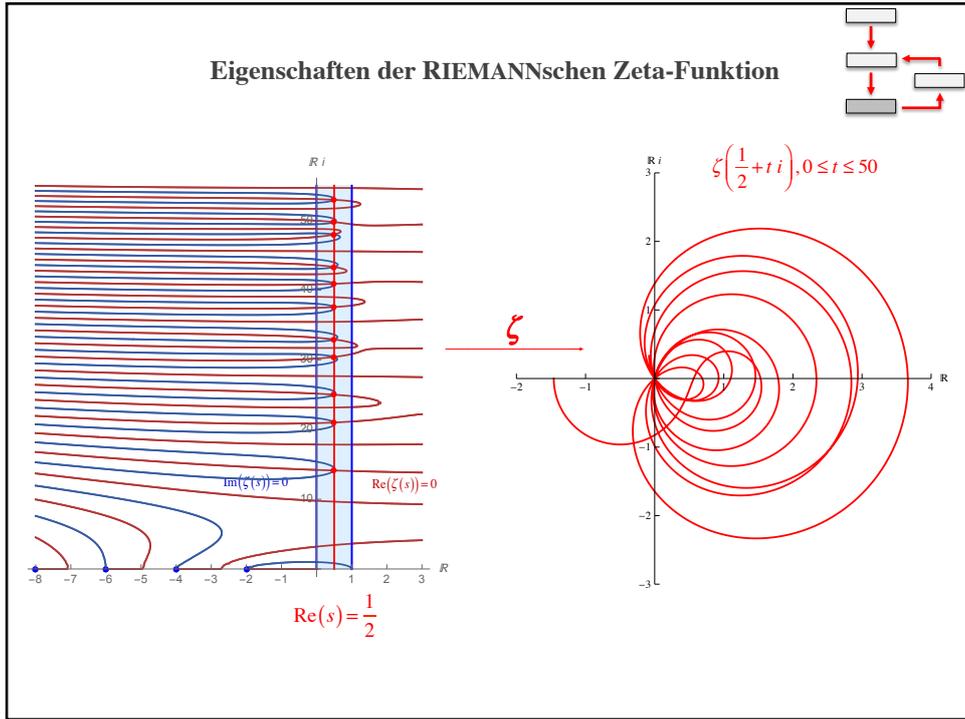
Etappen der Nullstellensuche

| Jahr | Anzahl Nullstellen | Autor |
|----------|--------------------|---------------------------------|
| 1859 (?) | 3 | B. RIEMANN |
| 1953 | 1104 | A. M. TURING |
| 2004 | 10^{13} | X. GOURDON and Patrick DEMICHEL |

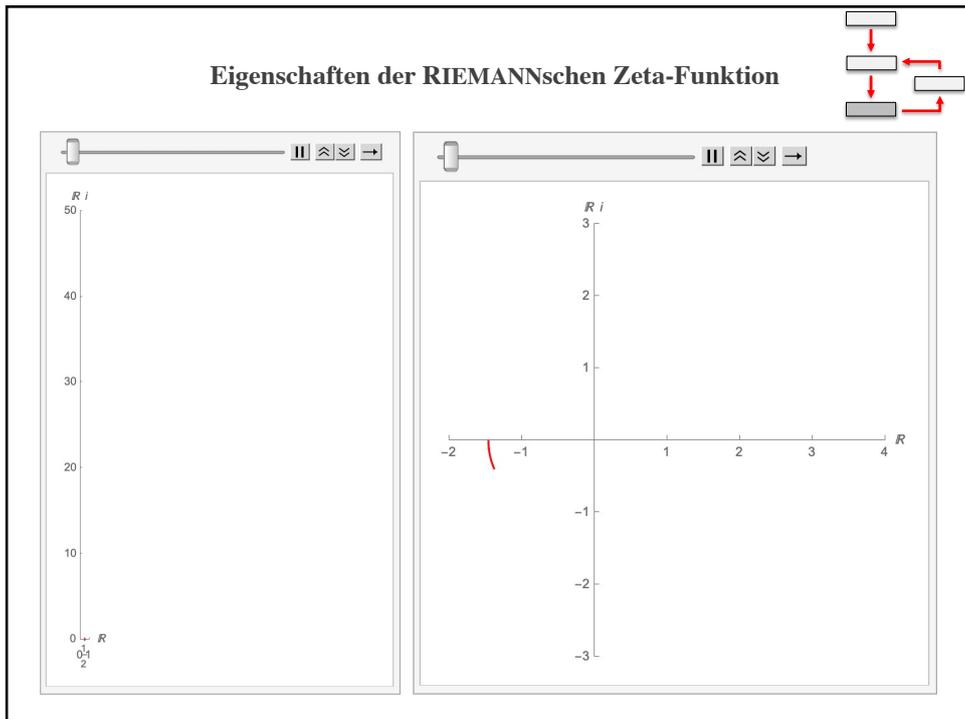
Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

| k | $\rho[k]$ | $\overline{\rho[k]}$ |
|----|---------------------------|---------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2} + 14.1347 i$ | $\frac{1}{2} - 14.1347 i$ |
| 2 | $\frac{1}{2} + 21.0220 i$ | $\frac{1}{2} - 21.0220 i$ |
| 3 | $\frac{1}{2} + 25.0109 i$ | $\frac{1}{2} - 25.0109 i$ |
| 4 | $\frac{1}{2} + 30.4249 i$ | $\frac{1}{2} - 30.4249 i$ |
| 5 | $\frac{1}{2} + 32.9351 i$ | $\frac{1}{2} - 32.9351 i$ |
| 6 | $\frac{1}{2} + 37.5862 i$ | $\frac{1}{2} - 37.5862 i$ |
| 7 | $\frac{1}{2} + 40.9187 i$ | $\frac{1}{2} - 40.9187 i$ |
| 8 | $\frac{1}{2} + 43.3271 i$ | $\frac{1}{2} - 43.3271 i$ |
| 9 | $\frac{1}{2} + 48.0052 i$ | $\frac{1}{2} - 48.0052 i$ |
| 10 | $\frac{1}{2} + 49.7738 i$ | $\frac{1}{2} - 49.7738 i$ |

20



21



22

Eigenschaften der RIEMANNschen Zeta-Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto f(s) := \frac{1}{|\zeta(s)|}$$

23

Die VON MANGOLDT'sche Darstellung der CHEBYCHEV'schen der Psi-Funktion

Im Jahr 1895 bewies Hans Carl Friedrich VON MANGOLDT eine «exakte Formel» für die CHEBYCHEV'sche Psi-Funktion.

Satz Die CHEBYCHEV'sche ψ -Funktion besitzt folgende Darstellung:

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \sum_{\substack{\rho \text{ nicht-triv.} \\ \text{Nst. v. } \zeta}} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

$-2n, n \in \mathbb{N}$: die *trivialen Nullstellen* von ζ ,
 ρ : die *nicht-trivialen Nullstellen* von ζ .

Beweis: (z.B.) [8] STOPPLE

Bemerkung. Eine analoge, aber schwieriger herzuleitende Darstellung existiert auch für $\pi(x)$.
 (RIEMANN, 1859 und VON MANGOLDT, 1895)

24

Die VON MANGOLDT'sche Darstellung der CHEBYCHEV'schen der Psi-Funktion

Zur **Provenienz** der VON MANGOLDT'schen Darstellung.

(i) $\Xi(s) = (s-1)\zeta(s)$ ist eine *ganze Funktion* (d.h. analytisch in ganz \mathbb{C})

(ii) Es besteht eine **Analogie** zwischen ganzen Funktionen und Polynomen.
 Produktdarstellung (RIEMANN, HADAMRD)

$$\Xi(s) = (s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{e} \right)^s \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{-2n} \right) e^{\frac{s}{-2n}} \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

(iii) Darstellung von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ via

- Logarithmische Ableitung $\frac{d}{ds} \{ \ln[\cdot] \}$ von $\Xi(s) \Rightarrow R(s)$
- Logarithmische Ableitung $\frac{d}{ds} \{ \ln[\cdot] \}$ von $\prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s) \Rightarrow L(s)$

(iv) «Extrahiere» aus

- $R(s)$ die rechte Seite der VON MANGOLDT'schen Darstellung, also

$$x - \ln(2\pi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \sum_{\substack{\rho \text{ nicht-triv.} \\ \text{Nst. v. } \zeta}} \frac{x^{\rho}}{\rho},$$

- $L(s)$ die linke Seite der VON MANGOLDT'schen Darstellung, also

$$\psi(x)$$

25

Die VON MANGOLDT'sche Darstellung der CHEBYCHEV'schen der Psi-Funktion

Zur **Aufschlüsselung** der VON MANGOLDT'schen Darstellung.

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{-2n} - \sum_{\substack{\rho \text{ nicht-triv.} \\ \text{Nst. v. } \zeta}} \frac{x^{\rho}}{\rho}$$

↓ $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ & $y = \frac{1}{x^2}$

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \sum_{\substack{\rho \text{ nicht-triv.} \\ \text{Nst. v. } \zeta}} \frac{x^{\rho}}{\rho}$$

↓ mit ρ ist auch $\bar{\rho}$ Nullstelle

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \sum_{\substack{\text{Im}(\rho) \\ \text{zunehmend}}} \left(\frac{x^{\rho}}{\rho} + \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right)$$

↓ via $\rho_k = \sigma_k + t_k i = |\rho_k| e^{i \arg(\rho_k)}$

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k} \cos [t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$$

26

Die VON MANGOLDT'sche Darstellung der CHEBYCHEV'schen der Psi-Funktion

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$$

Graph des 1. Summanden ($k=1$)

$$y = \frac{2}{|\rho_1|} x^{1/2} \cos[t_1 \ln(x) - \arg(\rho_1)]$$

$$y = \frac{2}{|\rho_1|} x^{1/2}, \rho_1 \cong \frac{1}{2} + 14.134725142 i$$

Graph des 5. Summanden ($k=5$)

$$y = \frac{2}{|\rho_5|} x^{1/2} \cos[t_5 \ln(x) - \arg(\rho_5)]$$

$$y = \frac{2}{|\rho_5|} x^{1/2}, \rho_5 \cong \frac{1}{2} + 32.935061588 i$$

27

Approximationen der Psi-Funktion

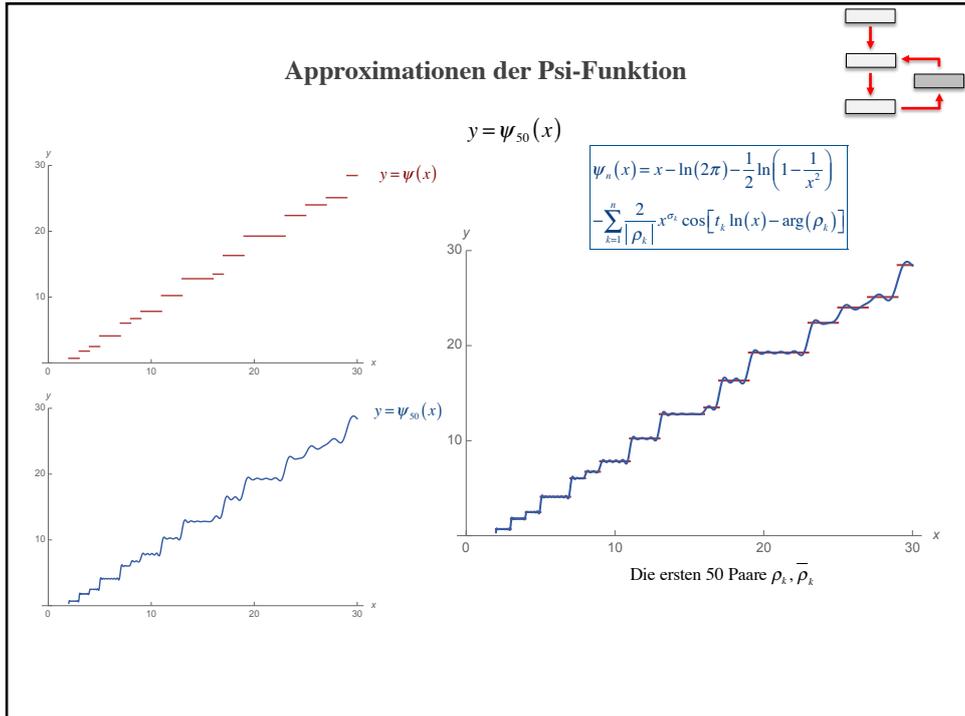
$y = \psi(x)$

$$\psi_n(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$$

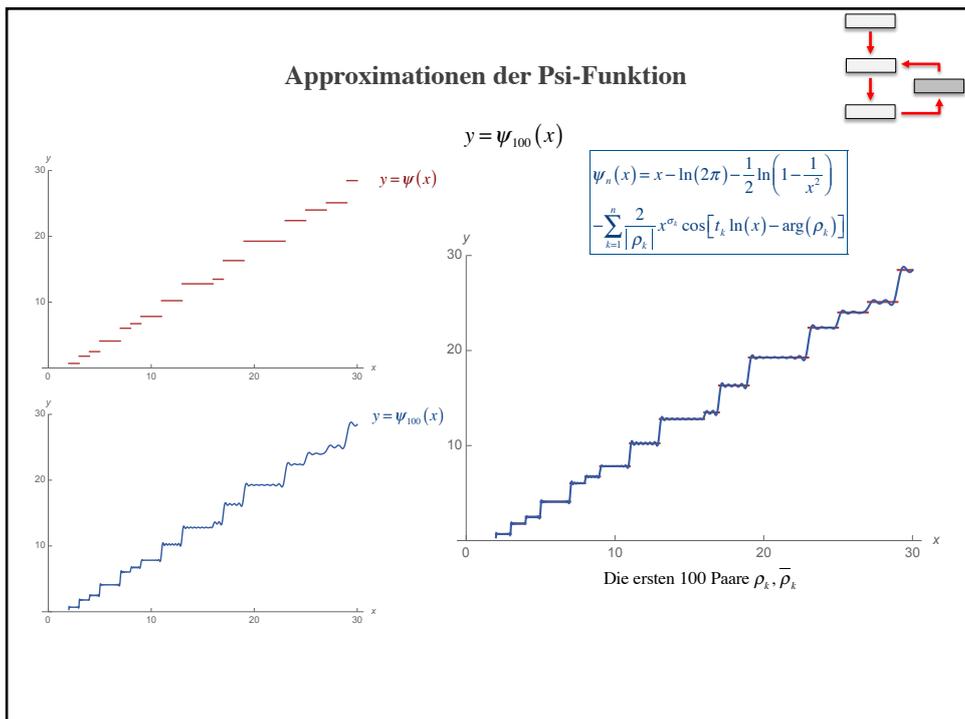
$y = \psi_{25}(x)$

Die ersten 25 Paare $\rho_k, \bar{\rho}_k$

28



29



30

Approximationen der Psi-Funktion

$$y = \psi(x)$$

$$y = \psi_n(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)], \quad 1 \leq n \leq 100$$

Link zu [UsingZetaZerosToComputeTheChebyshevPsiFunction.nb](https://demonstrations.wolfram.com/UsingZetaZerosToComputeTheChebyshevPsiFunction/) (29. Okt. 21):
<https://demonstrations.wolfram.com/UsingZetaZerosToComputeTheChebyshevPsiFunction/>

31

Zusammenhang Nullstellen der Zeta-Funktion und Primzahlsatz

Satz HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN, 1896
 Die ζ -Funktion besitzt keine Nullstellen auf dem rechten
 Rand des kritischen Streifens, also auf $\text{Re}(s) = 1$:
 $\sigma_k = \text{Re}(\rho_k) < 1$ für alle k .

Beweis: Siehe (z.B.) [6], [8], [9]

Erste Einsichten

Satz von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN

RIEMANNsche Vermutung

32

Zusammenhang Nullstellen der Zeta-Funktion und Primzahlsatz

Aus dem Satz von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN folgt der

Primzahlsatz (PZS)
 $\psi(x) \sim x.$

Ausserdem:

Satz WIENER, ~1930
Der Satz von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN und der Primzahlsatz sind äquivalent.

33

Zusammenhang Nullstellen der Zeta-Funktion und Primzahlsatz

Bemerkungen zur Äquivalenz.

(i)
$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$$

↓

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x}$

||

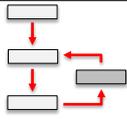
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\ln(2\pi)}{x} - \frac{1}{2x} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k-1} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)] \right\}$

||

$0 - \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k-1} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$

Also:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k-1} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)]$$

34



Zusammenhang Nullstellen der Zeta-Funktion und Primzahlsatz

(ii) Vor.: PZS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0$

↓

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k - 1} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)] = 0$$

↓ «plausibel»

$\sigma_k = \text{Re}(\rho_k) < 1$ für alle k

(iii) Vor.: $\sigma_k = \text{Re}(\rho_k) < 1$ für alle k .

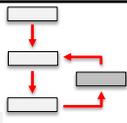
↓

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|\rho_k|} x^{\sigma_k - 1} \cos[t_k \ln(x) - \arg(\rho_k)] \stackrel{?}{=} 0$$

→ 0 für $x \rightarrow \infty$

Problem: Dass die einzelnen Summanden gegen 0 streben für $x \rightarrow \infty$ sichert noch nicht die Konvergenz der Reihe. ○

35



Zum Beweis des Primzahlsatzes $\psi(x) \sim x$

The direct discussion of $\psi(x)$ introduces, however, delicate questions of convergence, an to avoid these we shall work in the first instance with the function

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(u) du$$

Aus [6] INGHAM.

Zur Struktur des Beweises des PZS (siehe [6] INGHAM).

(i) Beweise, dass ζ keine Nullstellen auf dem rechten Rand des kritischen Streifens besitzt.

(ii) Zeige, dass $\Psi(x) \sim \frac{1}{2} x^2$.

(iii) Schliesse von (ii) auf $\psi(x) \sim x$.

36

Zur Bedeutung der RIEMANNschen Vermutung für den Primzahlsatz

Je genauer man die Verteilung der Nullstellen der ζ -Funktion kennt, umso genauer kann man den Fehler einschränken der Approximation

$\psi(x) \sim x$ resp. $\pi(x) \sim Li(x)$.

Ohne Bezug auf die RIEMANNsche Vermutung lässt sich zeigen, dass

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x e^{-\sqrt{\ln(x)}}\right).$$

Die **Gültigkeit** der RIEMANNscher Vermutung **voraussetzend** hat VON KOCH, 1901, gezeigt, dass

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x} \ln(x)\right).$$

Def. Die Schreibweise $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow \infty$ bedeutet, dass eine Konstante $C > 0$ existiert und eine Zahl x_0 , sodass $|f(x)| \leq C|g(x)|$ für alle $x \geq x_0$.

Fazit. $O(\sqrt{x} \ln(x))$ ist **besser** als $O\left(x e^{-\sqrt{\ln(x)}}\right)$

37

Literatur

- [1] Lars V. AHLFORS: Complex Analysis.
[Ein Klassiker.](#)
- [2] P. BORWEIN, S. CHOI, B. ROONEY, A. WEIRATHMUELLER:
The Riemann Hypothesis. A Resource for the Afficionado and Virtuoso alike.
Canadian Mathematical Society, Springer, 2008.
[Sammlung von Artikeln verschiedener Autoren zur RIEMANNschen Vermutung und zum Primzahlsatz.](#)
- [3] J. B. CONRAY: The Riemann Hypothesis.
Notices of the AMS, March 2003.
[Übersichtsartikel, auch in \[2\] enthalten.](#)
- [4] John DERBYSHIRE: Prime Obsession. Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics. Joseph Henry Press, 2003.
[Für den mathematisch etwas gebildeten Laien. Hochgradig anregend.](#)

38

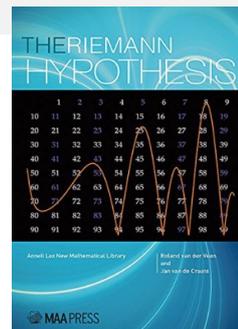
Literatur (Fortsetzung)

- [5] Julian HAVIL: Gamma – Exploring Euler's Constant. Princeton University Press, 2003.
Hochgradig anregendes Werk. U.a. nützlich: Im Anhang eine Übersicht über die wichtigsten Resultate der komplexen Funktionentheorie.
- [6] A. E. INGHAM: The Distribution of Prime Numbers. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 30, 1932.
Ein Klassiker. Enthält u.a. einen vollständigen Beweis des Primzahlsatzes.
- [7] Bernhard RIEMANN: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.
RIEMANNs epochaler Artikel. Zum Charakter: extrem knapp, schwierig, grosse intuitive Sprünge, einige Beweise fehlen. In englischer Übersetzung auch in [2] enthalten.

39

Literatur (Fortsetzung)

- [8] Jeffrey STOPPLE: A Primer of Analytic Number Theory. From Pythagoras to Riemann. Cambridge University Press, 2003.
Gelungene Einführung in die analytische Zahlentheorie.
Mit Aufgaben und Lösungen.
- [9] R. VAN DER VEEN & J. VAN DE CRAATS: The Riemann Hypothesis. A Million Dollar Problem. MAA Press, 2015.
Für Gymnasiasten / Studienanfänger. Ein Meisterstück.
Mit Aufgaben und Lösungen.



40