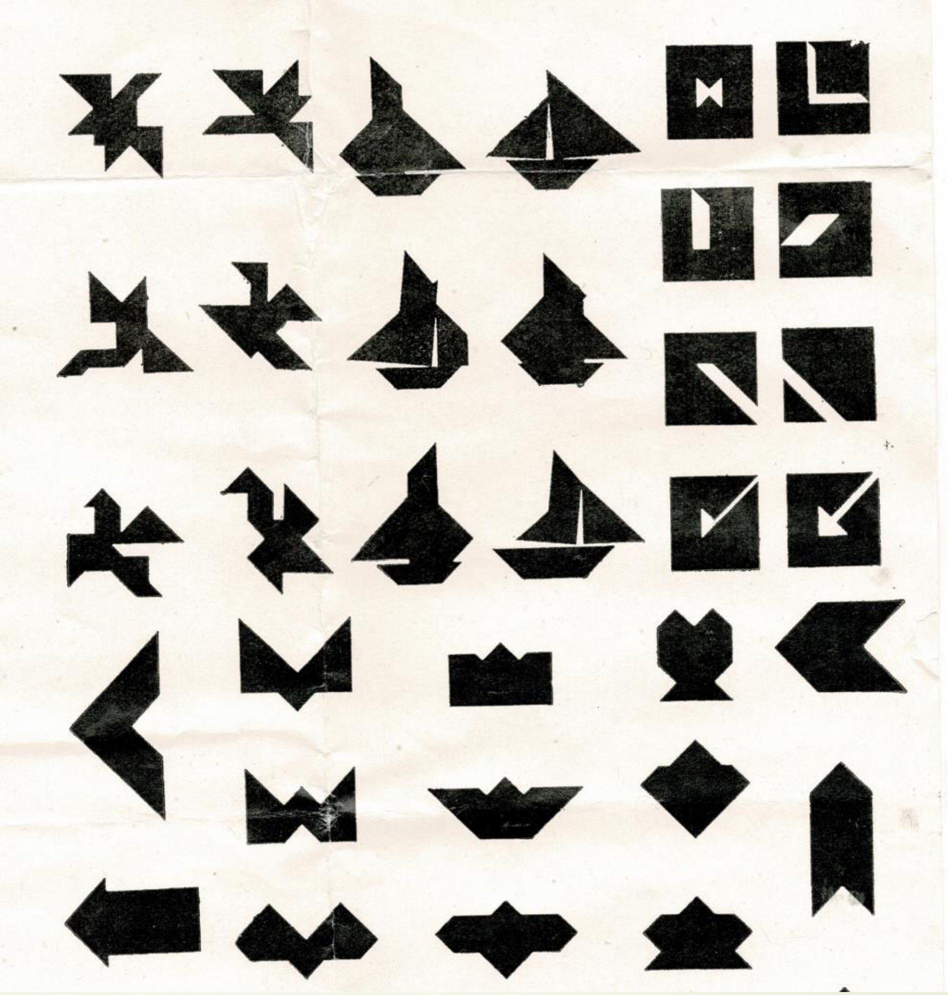
Was ist das - ein Flächeninhalt?
(ETH Zürich, 11.11.2021)

Die Idee



Eine moderne Definition

Zwei Polygone heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie sich in gleichviele, paarweise kongruente Teilpolygone zerlegen lassen.

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann, kann man auch die Teilpolygone durch Dreiecke ersetzen.

Man beachte: Es geht hier nur um endlich viele Teile, alles ist endlich. Deshalb sprach man früher auch von **endlich gleichen** Polygonen – im Unterschied zur Flächenmessung, für die man ja Grenzprozesse braucht.

Euklid I, 35

§ 35 (L. 25).

Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.

Die Parallelogramme $ABCD$, $EBCF$ mögen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen AF, BC liegen. Ich behaupte, daß Pgm. $ABCD = EBCF$.

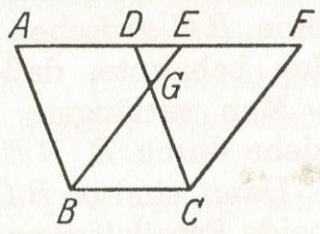


Fig. 35.

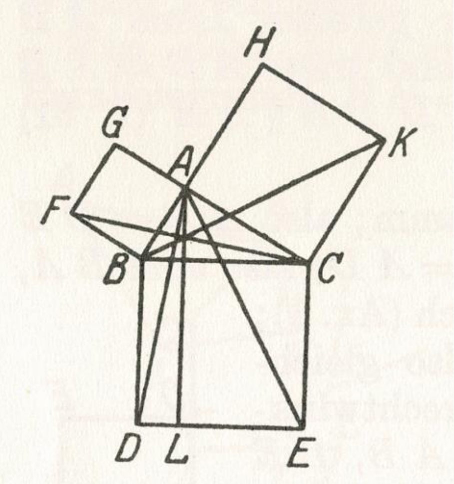
Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist $AD = BC$ (I, 34). Aus demselben Grunde ist $EF = BC$, so daß auch $AD = EF$; DE ist gemeinsam; also sind die ganzen Strecken $AE = DF$ (Ax. 2). Aber auch $AB = DC$; mithin sind zwei Seiten EA, AB zwei Seiten FD, DC entsprechend gleich; ferner ist $\angle FDC = \angle EAB$, der äußere dem inneren (I, 29); also ist Grdl. EB = Grdl. FC, und $\triangle EAB$ muß $= \triangle DFC$ sein (I, 4). Man nehme das gemeinsame $\triangle DGE$ weg; dann ist das Resttrapez $ABGD$ = dem Resttrapez $EGCF$ (Ax. 3). Man füge $\triangle GBC$ beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. $ABCD$ = dem ganzen Pgm. $EBCF$ (Ax. 2) — S.

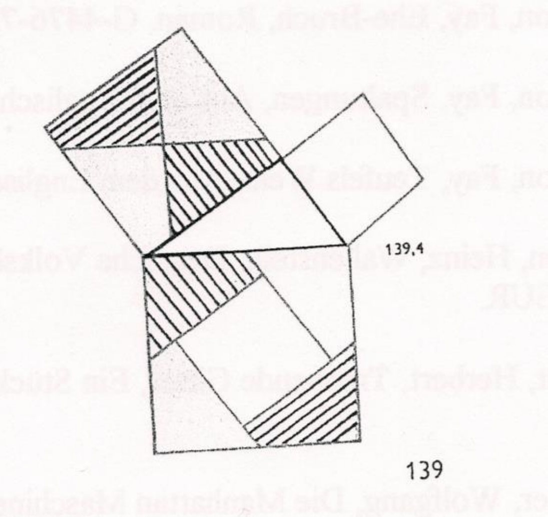
Das Ziel I,47

§ 47 (L. 33).

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

$A\,B\,C$ sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel $B\,A\,C$. Ich behaupte, daß $B\,C^2 = B\,A^2 + A\,C^2$.





Paul Gerwien (1833)

16.

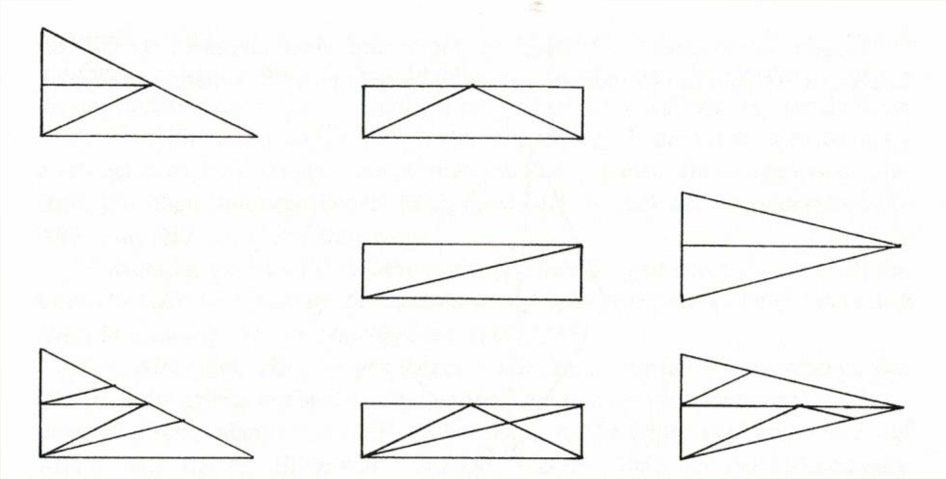
Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.

(Von Herrn *Gerwien*, Pr. Lieut. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Regim.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 228 – 234 Tafel III.

Gerwien (1833)

Die Relation „zerlegungsgleich“ ist eine Äquivalenzrelation, Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, die Transitivität wird in folgender Abbildung erläutert (vgl. auch Hilberts Figur weiter unten):



Gerwien (1833)

Die beiden Zerlegungen des Rechtecks werden „übereinander gelegt“ und dann in die Dreiecke stückweise zurückkopiert –Gerwien spricht von „Verzeichnen“.

Die Ausgangsfrage ließe sich also für Polygone so beantworten:

Ein **Flächeninhalt** ist eine Äquivalenzklasse von Polygonen bzgl. der Relation „ist zerlegungsgleich“.

Solche Formulierungen finden sich aber erst in der Mitte des 20. Jhs. Gerwiens Fazit wird weiter unten zitiert.

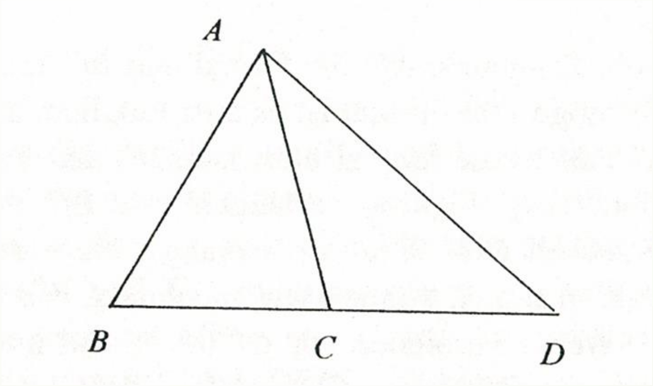
Gerwien (1833)

Der Inhalt der Gerwienschen Arbeit besteht hauptsächlich im Beweis des Satzes „Zwei maßgleiche Polygone sind zerlegungsgleich“ – heute als Satz von Bolyai-Gerwien-Wallace bezeichnet, weil mehrere Mathematiker diesen Satz fanden und bewiesen. Es wird also vorausgesetzt, dass man jedem Polygon eine Maßzahl zuordnen kann – z. B. vermöge der Formel für das Maß eines Dreiecks (1/2 Grundseite mal Höhe).

Der Beweis wird bei Gerwien in mehreren Schritten durchgeführt – vom einfachen zum schwierigeren Fall fortschreitend.

Gerwien (1833)

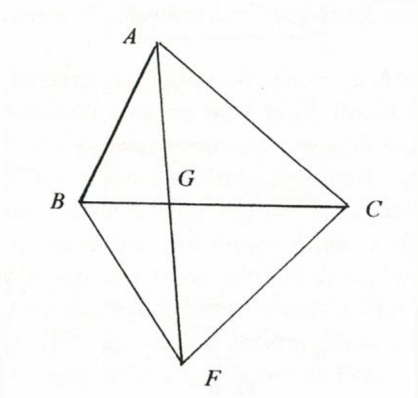
1. Zwei Dreiecke mit kongruenten Grundseiten und gemeinsamer Spitze – diese sind ja offensichtlich maßgleich:



Lösung: Ziehe durch C die Parallelen zu AB und AD, es entstehen vier paarweise kongruente Teildreiecke. Vgl. Figur 1 in Gerwiens Bildtafel (unten Folie 15).

Gerwien (1833)

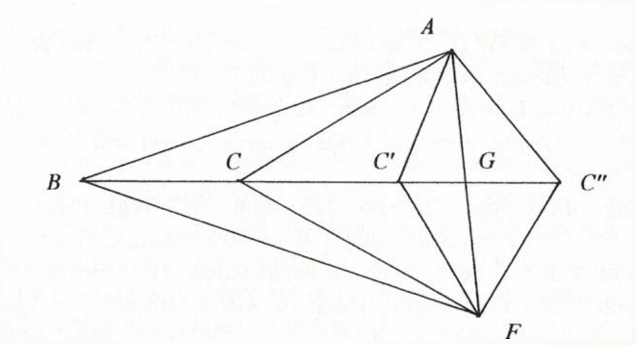
2a. Zwei Dreiecke mit kongruenten Grundseiten und Höhen:



Diese werden wie in der Abbildung zu sehen aneinander gelegt und die Diagonale gezogen. Links und rechts derselben erhält man die Situation von Fall 1. Dazu muss man sich nur überlegen, dass die Diagonale AF durch BC halbiert wird. Vgl. Figur 2 in Gerwiens Bildtafel (unten Folie 15).

Gerwien (1833)

2b. Es kann aber passieren, dass die Diagonale AF, die die beiden Dreiecksspitzen A und F verbindet, außerhalb des entstehenden Vierecks liegt. Wie Gerwien dann argumentiert, entnehme man der Abbildung. Vgl. Figur 3 in Gerwiens Bildtafel (unten Folie 15).



Hier spielt die Transitivität eine wichtige Rolle: Die Dreiecke AC‘‘C‘‘‘ und FC‘‘C‘‘‘ sind zerlegungsgleich nach Schritt 2a, alle Dreiecke mit der Spitze A sind zerlegungsgleich nach Schritt 1, Analoges gilt für alle Dreiecke mit der Spitze F. Also sind letztlich die Dreiecke ABC und FBC zerlegungsgleich.

Man beachte: Es wird vorausgesetzt, dass es ein Vielfaches von BC gibt, das BG übertrifft.

Gerwien (1833)

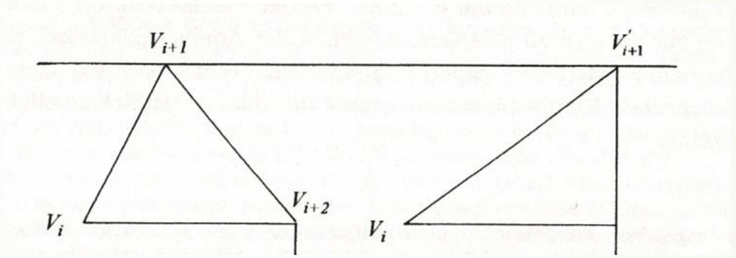
3. Bleibt noch der Fall zweier maßgleicher Dreiecke ABC und A‘B‘C‘ ohne sonstige Gemeinsamkeit.

Dann konstruiert man sich ein maßgleiches Hilfsdreieck, das sowohl eine mit ABC gleiche lange Seite hat und eine Seite mit A‘B‘C‘ und argumentiert ansonsten mit Schritt 2.

Ist z. B. BC die längste aller auftretenden Dreiecksseiten und B‘C‘ die längste Seite des zweiten Dreiecks, so ziehe man durch A die Parallele zu BC und ziehe um B den Kreis mit dem Radius B‘C‘. Dann ergeben sich – hier spielen die Voraussetzungen eine Rolle – zwei Schnittpunkte mit der Parallelen. Verbindet man einen dieser Schnittpunkte mit C, so entsteht ein Dreieck, das sowohl eine Seite der Länge BC als auch eine der Länge B‘C‘ besitzt. Dieses ist zu den beiden Ausgangsdreiecken maßgleich also auch zerlegungsgsgleich. Vgl. Figur 4 in Gerwiens Bildtafel (unten Folie 15).

Gerwien (1833)

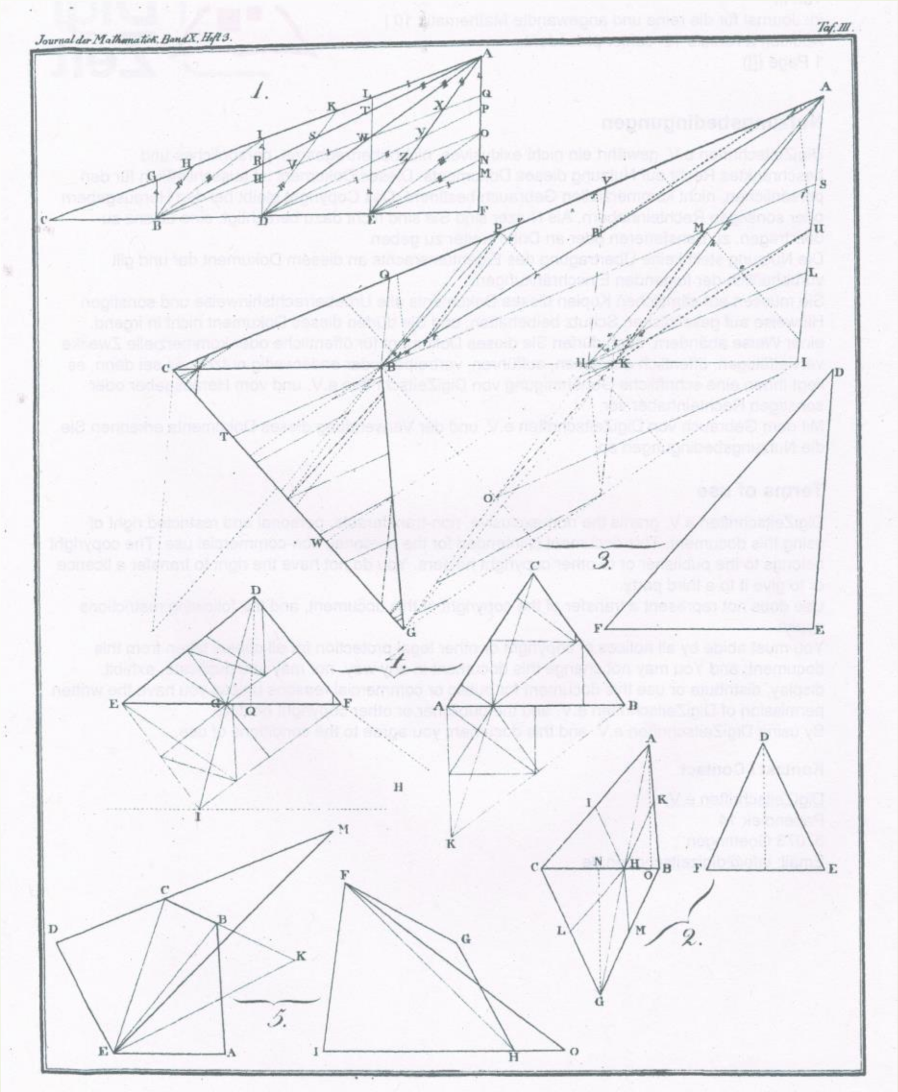
4. Die allgemeine Aussage für maßgleiche Polygone erhält man, indem man diese in zerlegungsgleiche Dreiecke transformiert, indem man in jedem Schritt eine Ecke zum Verschwinden bringt. Dies geht folgendermaßen:



Die Restpolygone sind nach unten als Fortsetzung zu denken. Die Ecke unten rechts wird durch den angedeuteten Prozess zum Verschwinden gebracht.

Man erhält also letztlich zwei zu den Ausgangspolygonen jeweils maßgleiche Dreiecke, die gemäß 3. auch zerlegungsgleich sind. Die Dreiecke waren aber auch zerlegungsgleich den Polygonen, also liefert die Transitivität wieder die Behauptung die Behauptung. Vgl. Figur 5 in Gerwiens Bildtafel (unten Folie 15).

Gerwien (1833)



Gerwiens Fazit

Mit dem Vorhergehenden stehen noch die folgenden Bemerkungen im Zusammenhange.

1. In den Systemen der Geometrie wird der Satz: daſs Dreiecke mit gleichen Höhen und Grundlinien gleiche Flächen haben, aus dem zu den Parallelogrammen gehörenden analogen Satz abgeleitet, während offenbar gerade das Umgekehrte, nämlich die Ableitung eines Satzes der zusammengesetzten Figur aus den Gesetzen der einfachen, Statt finden müſste. Aus No. II. der vorstehenden Abhandlung ergiebt sich, daſs diesem Übelstande mittelst der daselbst gegebenen Auflösung 1. leicht abzuhelfen ist, da man sich derselben als Beweis für die bloſse Gleichheit der Dreiecke unter allen Umständen bedienen kann.

2) Aus der vorstehenden Abhandlung geht hervor: daſs sich die Gleichheit der geradlinigen Figuren folgendergestalt definiren läſst:

Gleiche Figuren sind diejenigen, welche von denselben Stücken gebildet werden.

Gerwien, 1833a

17.

Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.

(Vom Herrn *P. Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Reg.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 235 – 240 Tafel IV.

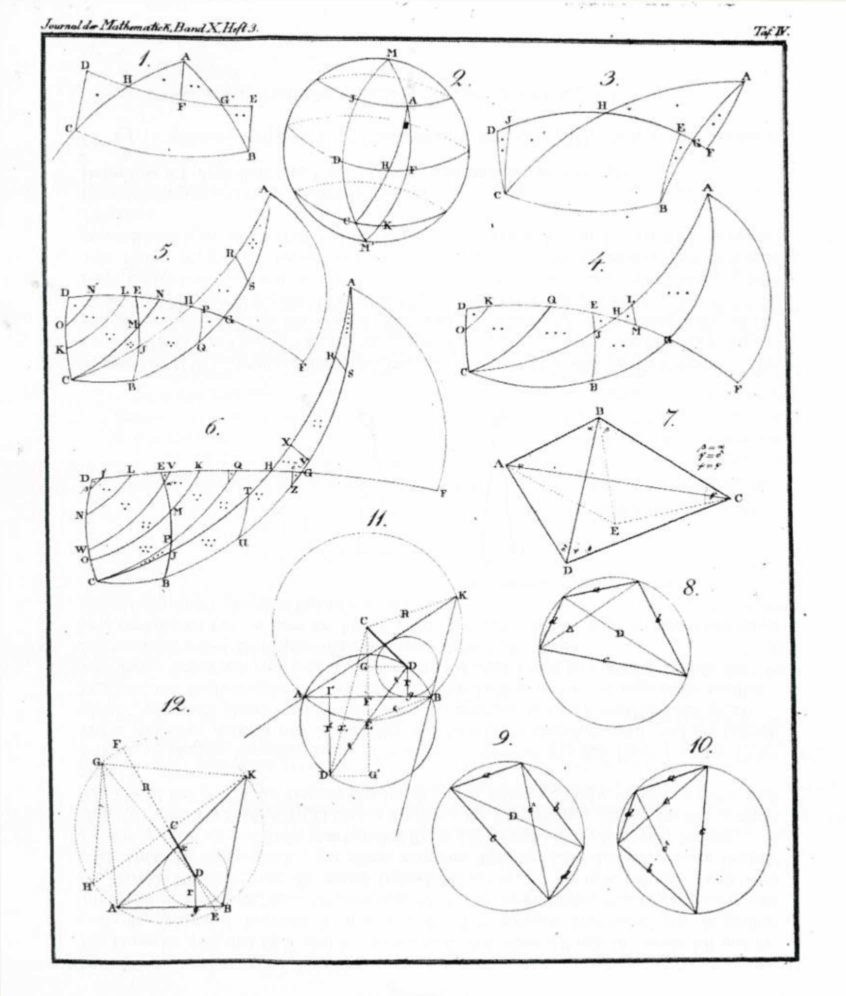
Gerwien 1833a

Zu beachten ist, dass Gerwien die sphärische Geometrie der ebenen gewissermaßen gleichberechtigt zur Seite stellt. Das war damals keine Selbstverständlichkeit (vgl. Gudermann, Chr.: Lehrbuch der niederen Sphärik (1835) [https://doi.org/10.3931/e-rara-57114]).

In der sphärischen Geometrie wird die Dreiecksfläche gemessen durch den Exzess, also durch den Überschuss der Winkelsumme über 180°. L. Euler hat hierfür einen sehr schönen Beweis geliefert.

Also muss man i.w. zeigen: Zwei Dreiecke gleicher Winkelsumme sind zerlegungsgleich. Das geht mit Hilfe der Lexell-Kreise, das ist die Ortslinie, auf der die Spitzen aller maßgleichen Dreiecke liegen, wenn man die Basis festhält.

Gerwien 1833a



David Hilbert, 1899
„Grundlagen der Geometrie“

Kapitel IV.

Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18.

Die Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen.

Wir legen den Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels IV dieselben Axiome wie im Kapitel III zu Grunde, nämlich die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV.

Die im Kapitel III erörterte Lehre von den Proportionen und die daselbst eingeführte Streckenrechnung setzt uns in den Stand, die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Da nach den Entwickelungen im Kapitel III die Lehre von den Proportionen wesentlich auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so gilt dies auch für die Lehre von den Flächeninhalten; diese Begründung der Lehre von den Flächeninhalten erscheint mir als eine der merkwürdigsten Anwendungen des Pascalschen Satzes in der Elementargeometrie.

Erklärung. Verbindet man zwei Punkte eines Polygons P durch irgend einen Streckenzug, der ganz im Inneren des Polygons verläuft, so entstehen zwei neue Polygone P_1 und P_2, deren innere Punkte alle im Inneren von P liegen; wir sagen: P zerfällt in P_1 und P_2, oder P_1 und P_2 setzen P zusammen.

Definition. Zwei Polygone heissen *flächengleich*, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander congruent sind.

Definition. Zwei Polygone heissen *inhaltsgleich* oder *von gleichem Inhalte*, wenn es möglich ist, zu denselben flächengleiche Polygone hinzuzufügen, so dass die beiden zusammengesetzten Polygone einander flächengleich sind.

David Hilbert, 1899
„Grundlagen der Geometrie“

Ferner gelten folgende Sätze:

Satz 24. Sind zwei Polygone P_1 und P_2 mit einem dritten Polygon P_3 flächengleich, so sind sie auch unter einander flächengleich. Sind zwei Polygone mit einem dritten inhaltsgleich, so sind sie unter einander inhaltsgleich.

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich sowohl für P_1, als auch für P_2 eine Zerlegung in Dreiecke angeben, so dass einer jeden dieser beiden Zerlegungen je eine Zerlegung des Polygons P_3 in congruente Dreiecke entspricht. Indem wir diese Zerlegungen von P_3 gleichzeitig in Betracht ziehen, wird im Allgemeinen jedes Dreieck der einen Zerlegung durch Strecken, welche der anderen

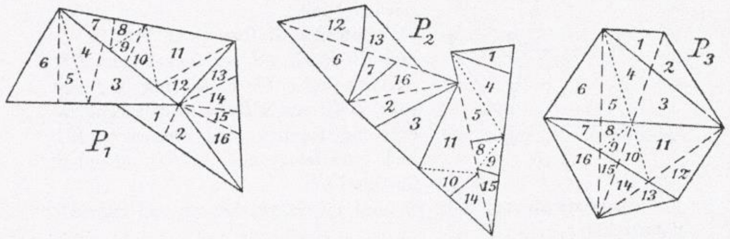


Fig. 28.

Zerlegung angehören, in Polygone zerlegt. Wir fügen nun noch so viele Strecken hinzu, dass jedes dieser Polygone selbst wieder in Dreiecke zerfällt und bringen dann die zwei entsprechenden Zerlegungen in Dreiecke in P_1 und in P_2 an; dann zerfallen offenbar diese beiden Polygone P_1 und P_2 in gleich viele paarweise einander congruente Dreiecke und sind somit nach der Definition einander flächengleich.

Der Beweis der zweiten Aussage des Satzes 24 ergiebt sich nunmehr ohne Schwierigkeit.

Wir definiren in der üblichen Weise die Begriffe: *Rechteck*, *Grundlinie* und *Höhe eines Parallelogrammes*, *Grundlinie* und *Höhe eines Dreiecks*.

David Hilbert, 1899 „Grundlagen der Geometrie“

Hilbert interessierte sich besonders für die Rolle des Archimedischen Axioms. Er konnte zeigen, dass es maßgleiche Dreiecke gibt, die nicht zerlegungsgleich sind, **wenn das Archimedische Axiom nicht gilt**.

Das liegt daran, dass man unter diesen Bedingungen den Umfang des einen Dreiecks nicht erreichen kann mit Hilfe der Teile des anderen. Man wählt hierzu eine Seite so, dass sie unendlich klein ist im Vergleich zu den Seiten des anderen Dreiecks.

Um das Archimedische Axiom zu vermeiden, verwendet Hilbert neben der Zerlegungsgleichheit zusätzlich die Ergänzungsgleichheit: Zwei Polygone heißen ergänzungsgleich, wenn sie durch Hinzunahme von gleichvielen zerlegungsgleichen Polygonen zerlegungsgleich werden. Euklids Beweis von I, 35 ist einer, der mit Ergänzungsgleichheit arbeitet.

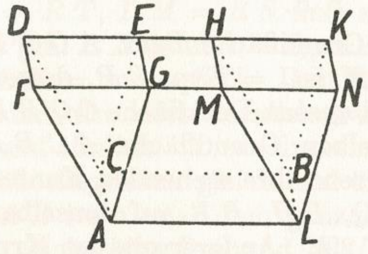
Und im Raum?

Euklid Elemente Buch XI, 29

§ 29 (L. 24).

Parallelflache auf derselben Grundfläche und unter derselben Höhe sind, wenn ihre stehenden Kanten auf denselben Geraden enden, einander gleich.

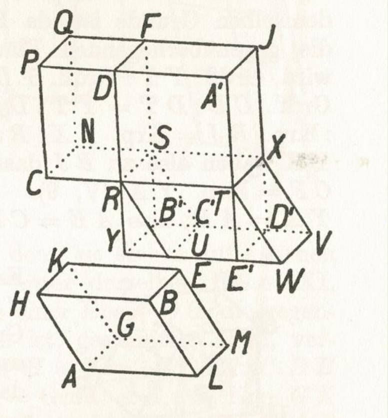
Die Parallelflache CM, CN mögen auf derselben Grundfläche AB stehen unter derselben Höhe, und ihre stehenden Kanten AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH, BK mögen auf denselben Geraden FN, DK enden. Ich behaupte, daß Krp. CM = Krp. CN.



Da CH, CK beide Parallelogramme sind, ist CB sowohl $= DH$ als $= EK$ (I, 34), folglich $DH = EK$. Man nehme EH beiderseits weg; dann ist Rest DE = Rest HK (I, Ax. 3), folglich $\triangle DCE$ dem $\triangle HBK$ gleich (I, 8) und Pgm. DG dem Pgm. HN (I, 34, 29, 4). Aus demselben

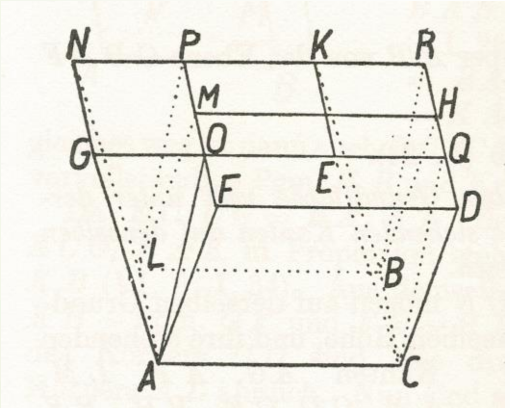
Und im Raum?

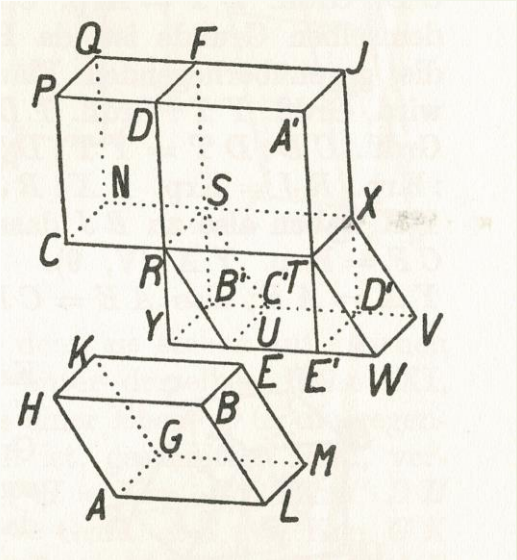
Grunde ist auch $\triangle AFG$ dem $\triangle MLN$ gleich. Ferner sind Pgm. CF dem Pgm. BM und CG dem Pgm. BN gleich als gegenüberliegende (XI, 24). Das von den zwei Dreiecken AFG, DCE und drei Parallelogrammen AD, DG, CG umfaßte Prisma ist also dem von den zwei Dreiecken MLN, HBK und drei Parallelogrammen BM, HN, BN umfaßten Prisma gleich (XI, Def. 10). Man füge beiderseits den Körper, dessen Grundfläche Pgm. AB und dessen Deckfläche $GEHM$ ist, hinzu. Dann ist das ganze Pfl. CM = dem ganzen Pfl. CN (I, Ax. 2) — S.



Und im Raum?

XI, 30 und 31:dieselbe Grundfläche bzw. gleiche Grundflächen





Hilbert 1900

Vortrag „Mathematische Probleme“, Paris Sommer 1900 beim zweiten internationalen Mathematikerkongress

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe

Gauss spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d.h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden, auch ist es Gerling gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Tetraeder durch Zerlegen in kongruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich, und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln.

Dehn 1900

- Dehn konstruierte rund einen Monat nach Hilberts Vortrag das gewünschte Beispiel; wichtigstes Hilfsmittel dabei ist die heute sogenannte **Dehnsche Invariante**.

Satz: Zwei zerlegungsgleiche Polyeder stimmen in ihrer Dehnschen Invariante überein.

Er gibt zwei volumengleiche (d.h. maßgleiche) Polyeder an, deren Invarianten verschieden sind. Z. B. gilt der Satz:

Ein reguläres Tetraeder ist keinem Würfel zerlegungsgleich.

Dehnsche Bedingung: n$\cdot\, \alpha = m \cdot \frac{\pi}{2}$

(m,n teilerfremde natürliche Zahlen, α Kantenwinkel des Tetraeders, $\frac{\pi}{2}$ Kantenwinkel des Würfels)

Dehn 1900

Ueber raumgleiche Polyeder.

Von

M. Dehn in Karlsruhe.

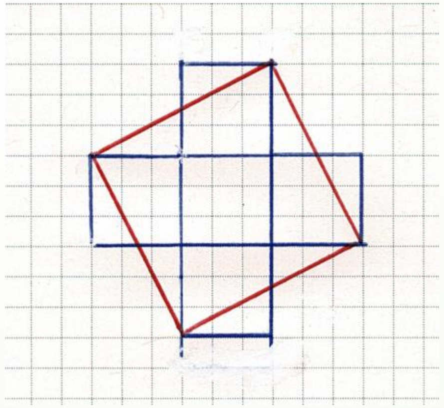
Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 27. October 1900.

Raumgleich wollen wir, wie üblich, zwei inhaltsgleiche Polyeder, Π_1 und Π_2 dann nennen, wenn sie in respective congruente Polyeder zerlegt werden können. Dabei ist die Inhaltsgleichheit in bekannter Weise mittels eines Grenzprozesses definirt zu denken. Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, eine allgemeine Bedingung für die Raumgleichheit zweier Polyeder aufzustellen. Um zu zeigen, daß diese Bedingung nicht stets bei inhaltsgleichen Polyedern erfüllt, also trivial ist, sollen einige specielle Fälle untersucht werden, von denen der eine die Verwandlung eines regulären Tetraeders in ein Prisma behandelt. Es wird sich das, wegen der analogen Verhältnisse in der Ebene auf den ersten Blick vielleicht überraschende, Resultat ergeben, daß *ein reguläres Tetraeder keinem Prisma raumgleich sein kann, daß also Tetraeder und Prisma auf keine Weise in respective congruente Teile zerlegt werden können.*

Anwendungen

Es gibt eine sehr große Zahl von Anwendungen der Zerlegungsgleichheit, die oft den Charakter von Rätzeln (Puzzle) haben.

Eine systematische Idee verbirgt sich in der Quadrat des Fake Schweizer Kreuzes:

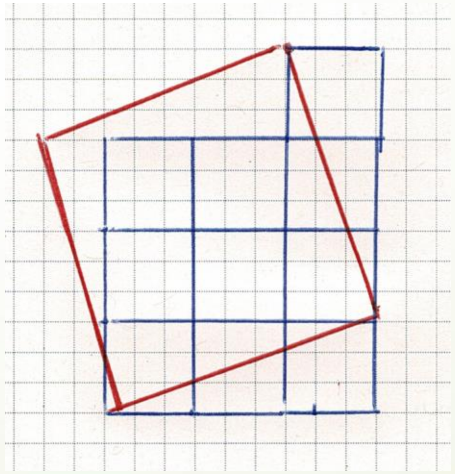


Warnung: Das echte Schweizer Kreuz besteht nicht aus fünf Quadraten – vgl. Hungerbühler/Nüsken 2006.

Anwendungen

Man kann die Ebene überschneidungsfrei und lückenlos mit Fake Schweizer Kreuzen überdecken. Dann legt man passend eine analoge Überdeckung mit den großen Quadraten – ihre Kantenlänge ist wurzel fünf – drüber. Und schon ist die Quadratur fertig.

Ein weiterer Versuch:



Anwendungen

Stellt man sich vor, das 3 auf 3 Quadrat wäre hell, das kleine 1 auf 1 Quadrat dunkel, so erkennt man rasch ein Muster, wie man es z. B. bei Badezimmerböden finden kann. Auch hier ist eine Überdeckung der Ebene möglich – und wieder kann man ein passendes Quadratgitter drüber legen. Die Kantenlänge ist Wurzel 10.

Welche aus Einheitsquadraten bestehende Figuren kann man so quadrieren? Passend heißt ja, Anfangs- und Endpunkt der Quadratseite fallen mit Gitterpunkten zusammen. Besteht die Figur aus n Einheitsquadraten, so braucht man für das große Quadrat die Kantenlänge Wurzel n. Sollen die Endpunkte Gitterpunkte sein, so muss sich n schreiben in der Form $a^2 + b^2$ (a Schritte nach rechts, b Schritte nach oben im Gitter). Also sucht man alle natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben. Das ist ein bekanntes zahlentheoretisches Problem.

Das Buch von Frederickson (siehe Literatur unten) ist eine wahre Fundgrube für solche Rätsel etc.

Ein Ausblick

Studiert man die Figuren mit dem Fake Schweizer Kreuz und der Bodenkachelung genauer, so sieht man, dass man, um das große Quadrat zu erhalten, Stücke an der Ausgangsfigur abschneiden und diese verschieben muss.

Die Zerlegungsgleichheit benötigt hier also nur Translationen. Mit solchen Fragen haben sich H. Hadwiger (1908 - 1981), Professor in Bern, und seine Schüler beschäftigt. Man findet von ihnen einige sehr interessante Artikel in alten Heften der Zeitschrift „Elemente der Mathematik“.

Z.B. kann man beweisen, dass ein Dreieck und ein Rechteck niemals translativ zerlegungsgleich sind (vgl. Hadwiger/Glur: Zerlegungsgleicheit ebener Polygone (Elemente der Mathematik 6 (1951), 97 – 106).

Hadwiger hat übrigens die Theorie von Dehn auf höhere Dimensionen (als drei) erweitert.

Literatur

Frederickson, G. N.: Dissections: Plane and Fancy (Cambridge: CUP,1997.

Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Berlin u.a.: Springer, 1957).

Hartshorne, R.: Geometry.Euclid and Beyond (New York u.a.: Springer, 2000).

Hungerbühler, N./Nüsken, M.: Delian Metamorphoses (Elemente der Mathematik 61 (2006), 1 – 19).

Recht, Y.: Die Lehre vom Flächeninhalt auf der Kugel (BA-Thesis, Universität Luxemburg, Februar 2021).

Seebach, K.: Didaktische Überlegungen zum Satz von Dehn (Didaktik der Mathematik 1 (1983), 1 – 13).

Volkert, K.: Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone (Mathematische semesterberichte 46 (1999), 1 – 28).

Volkert, K.(Hg): David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899) (Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum, 2015).