Funktionalanalysis I
Vorlesung Wintersemester 2002/03

Michael Struwe

16. September 2003

Worum geht es?

Grob gesagt, geht es um die Auflösung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = y$$

zu gegebenem y, wobei x und y in unendlich-dimensionalen Räumen X und Y liegen.

Beispiel 1 *Das Randwertproblem zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \textit{ in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 \textit{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

kann man auffassen als Gleichung der Form $Ax = y$ mit $X = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $A\colon H^2 \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto -\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Zusätzlich zur linearen Struktur des Problems bedarf es im ∞-dimensionalen Fall weiterer analytischer und geometrischer Strukturen, insbesondere spielen Vollständigkeit, Kompaktheit, beziehungsweise Konvexität eine Rolle.

Je nachdem ist daher der “richtige” Rahmen für die mathematische Behandlung ein normierter Vektorraum (Linearität) oder ein metrischer Raum (Vollständigkeit, Kompaktheit), vielleicht auch ein “lokal konvexer topologischer Vektorraum”, in dieser Vorlesung jedoch meist ein Banachraum oder sogar ein Hilbertraum.

Wie das Beispiel zeigt, genügen für die Anwendungen die klassischen Funktionenräume allein nicht. In der Vorlesung “Funktionalanalysis II” werden die für die Behandlung partieller Differentialgleichungen fundamentalen Sobolev-Räume eingeführt und die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen entwickelt

Die Vorlesung stützt sich auf die grosse verfügbare Lehrbuchliteratur, vor allem jedoch auf die nachfolgend aufgeführten Texte.

Literatur:

Alt: *Funktionalanalysis*, Springer
Bachmann - Narici: *Functional analysis*
Brezis: *Analyse fonctionnelle*
Dunford - Schwarz: *Linear operators*
Rudin:*Functional analysis*
Werner: *Funktionalanalysis*
Yosida:*Functional analysis*
E. Zehnder (Mitschrift Chr. Frei): http://n.ethz.ch/student/chfrei/download/fa/
(ps- und pdf-Dateien)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vollständigkeit, Baire-Kategorie

1.1 Ein "nichtlineares" Problem

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, und für jedes $x \in [0,1]$ existiere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Ist f dann in mindestens einem Punkt x_0 stetig? – und liegt damit, durch Iteration des Arguments in Teilintervallen der Länge $\frac{1}{n}, n \in N$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f sogar dicht in $[0,1]$?

Baire fand die geniale Lösung dieses Problems auf dem Umweg über das für die Funktionalanalysis äusserst fruchtbare Konzept der Baire Kategorie .

1.2 Metrische Räume

Sei (M,d) ein metrischer Raum; das heisst $d\colon M\times M \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

i) $d(x,y) \geq 0$, "$=$" gdw. $x = y$ (Definitheit)

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecks-Ungleichung)

Beispiel 1.2.1 *i) Jede Teilmenge eines normierten Raums $(X, ||\cdot||)$ kann in kanonischer Weise als metrischer Raum mit Metrik*

$$d(x,y) = ||x-y||$$

aufgefasst werden; zum Beispiel $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

ii) Sei $S = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}; x_k \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$. Durch

$$d((x_k),(y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

wird eine Metrik auf S erklärt.

Wir wiederholen kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

i) $\Omega \subset M$ heisst **offen**, falls gilt

$$\forall x \in \Omega \exists r > 0 \colon B_r(x) = \{y \in M; d(x,y) < r\} \subset \Omega$$

ii) $A \subset M$ heisst **abgeschlossen**, falls $A^c = M \setminus A$ offen ist.

Für $\Omega \subset M$ sind ferner definiert:

iii) $\overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{G \subset \Omega,\ G \text{ offen}} G$: der **offene Kern** von Ω,

iv) $\overline{\Omega} = \bigcap_{A \supset \Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A$: die **abgeschlossene Hülle** von Ω,

v) $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$: der **Rand** von Ω, welcher $\overline{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega} \cup \partial\Omega$ disjunkt zerlegt.

vi) $\Omega \subset M$ heisst **dicht**, falls $\overline{\Omega} = M$, das heisst, falls

$$B \cap \Omega \neq \emptyset, \forall B = B_r(x) \subset M. \tag{1.2.1}$$

vii) $\Omega \subset M$ heisst **nirgends dicht**, falls $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \emptyset$, das heisst, falls

$$B \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset, \forall B = B_r(x) \subset M. \tag{1.2.2}$$

Für das folgende ist insbesondere von Bedeutung:

Satz 1.2.1 *Sei $U \subset M$. Es sind äquivalent:*

i) U ist offen und dicht;

ii) $A = U^c = M \setminus U$ ist abgeschlossen und nirgends dicht.

Beweis: *i) $\Rightarrow$ ii)*: Sei U offen und dicht, $A = U^c$. A ist abgeschlossen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \setminus \overline{A} = B \setminus A = B \cap U \neq \emptyset.$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei A abgeschlossen und nirgends dicht, $U = A^c$. U ist offen, und für jede Kugel $B = B_r(x) \subset M$ gilt

$$B \cap U = B \setminus A = B \setminus \overline{A} \neq \emptyset.$$

$\square$

Diese Begriffe sind natürlich bereits auf der Stufe eines topologischen Raumes erklärt. Falls (M, d) metrisch ist, so gibt es äquivalente Kriterien mit Folgen in M; zum Beispiel

Satz 1.2.2 *$A \subset M$ ist abgeschlossen, gdw. für alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A und $x \in M$ gilt:*

$$x_k \to x \ (k \to \infty) \Rightarrow x \in A.$$

Ein erst auf der Stufe metrischer Räume definierter Begriff ist der einer Cauchy-Folge und der Begriff der Vollständigkeit.

Definition 1.2.1 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine* **Cauchy-Folge** *in M, falls*

$$d(x_k, x_l) \to 0 \ (k, l \to \infty).$$

Definition 1.2.2 (M, d) *heisst* **vollständig** *, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M konvergiert.*

Beispiel 1.2.2 *i) $C^0([0,1])$ mit der von der Supremumsnorm*

$$||f||_{C^0} = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$

induzierten Metrik ist vollständig.

ii) Alle Banachräume $(L^p(\Omega), C^m(\overline{\Omega}), \ldots)$ sind vollständig.

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ mit kompakten $K_1 \subset K_2 \subset$. Dann ist $C^0(\Omega)$ mit der Metrik

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||f-g||_{C^0(K_j)}}{1 + ||f-g||_{C^0(K_j)}}$$

analog zu Beispiel 1.2.1 ii) vollständig. (Die von d induzierte Topologie auf $C^0(\Omega)$ heisst **compact-open topology***.)*

1.3 Baire-Kategorie

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $M \neq \emptyset$.

Satz 1.3.1 *Falls (M, d) vollständig ist, so gelten die folgenden (äquivalenten) Aussagen*

i) Sei $U_j \subset M$ offen und dicht, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ dicht in M.

ii) Falls $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit abgeschlossenen $A_j, j \in \mathbb{N}$, so gibt es mindestens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_{j_0} \neq \emptyset$.

Beispiel 1.3.1 *Die Beispiele zu Teil ii) des Satzes,*

i) $M = \mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$

und

ii) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$

mit $A_x = \{x\} = \overline{A}_x$ und $\overset{\circ}{A}_x = \emptyset$ zeigen, dass die Abzählbarkeit der Mengen A_j und die Vollständigkeit von M notwendig sind.

Beweis:

i) Aufgrund der Charakterisierung (1.2.1) dichter Mengen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung: Für $x \in M, r > 0$ gilt stets $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$.

Beweis: Seien $x \in M, r > 0, B = B_r(x)$. Konstruiere $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ induktiv, wie folgt.

a) Da U_1 dicht und offen, gilt

$$U_1 \cap B \neq \emptyset, U_1 \cap B \text{ offen.}$$

Wähle $x_1 \in U_1 \cap B, 0 < r_1 < \frac{1}{2}$ mit

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{2r_1}(x_1) \subset U_1 \cap B. \tag{1.3.1}$$

b) Seien $x_1, \ldots, x_{j-1} \in M, r_1, \ldots, r_{j-1}$ bereits bestimmt. Beachte, dass wie oben gilt

$$U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \neq \emptyset, U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \text{ offen.}$$

Wähle $x_j \in U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}), 0 < r_j < 2^{-j}$ mit

$$\overline{B_{r_j}(x_j)} \subset B_{2r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

Dann gilt für alle $j \geq k \in \mathbb{N}$:

$$x_j \in B_{r_j}(x_j) \subset U_j \cap B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset B_{r_{j-1}}(x_{j-1}) \subset \ldots \subset B_{r_k}(x_k) \tag{1.3.3}$$

also insbesondere

$$d(x_j, x_k) \leq r_k < 2^{-k} \to 0 (j \geq k \to \infty);$$

das heisst, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig, existiert

$$x^* = \lim_{j\to\infty} x_j,$$

und nach Grenzübergnag $j \to \infty$ in (1.3.3) folgt mit (1.3.2)

$$x^* \in \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset U_k, \forall k.$$

Insbesondere erhalten wir $x^* \in U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Für $k = 1$ liefert (1.3.1) zudem $x^* \in U_1 \cap B \subset B$, also

$$x^* \in U \cap B \neq \emptyset,$$

wie gewünscht.

i) $\Rightarrow$ ii) (indirekt) Widerspruchsweise nehmen wir an

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$. Setze

$$U_j = A_j^c = M \setminus A_j, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.2.1 ist U_j offen und dicht, $j \in \mathbb{N}$. Nach Annahme gilt jedoch

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = \emptyset$$

im Widerspruch zu i).

(ii) $\Rightarrow$ i): Übung.)

Definition 1.3.1 *(Baire Kategorie)*

i) $A \subset M$ heisst **mager** *oder von* **1. Baire Kategorie** *, falls $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit nirgends dichten Mengen $A_j, j \in \mathbb{N}$; $Kat(A) = 1$.*

ii) $A \subset M$ heisst **fett** *oder von* **2. Baire Kategorie** *, falls A nicht von 1. Baire Kategorie ist; $Kat(A) = 2$.*

iii) $\Omega \subset M$ heisst **residuell**, *falls $\Omega^c = A$ mager ist.*

Beispiel 1.3.2 *i) $M = \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \subset \mathbb{R}$ ist mager.*

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind mager.

Frage: Gibt es überhaupt fette Mengen?

Satz 1.3.2 *(Baire) Sei (M, d) vollständig. Dann gilt:*

i) $Kat(M) = 2$

ii) $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$, und A^c ist dicht in M.

iii) $\emptyset \neq U$ offen $\Rightarrow Kat(U) = 2$.

Beweis:

i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.1 ii).

ii) Falls $Kat(A) = Kat(A^c) = 1$, so wäre $Kat(M) = 1$ gemäss Beispiel 1.3.2 iii), also $Kat(A^c) = 2$. Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$$

mit nirgends dichten $A_j, j \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_j = (\overline{A_j})^c$ offen und dicht, und nach Satz 1.3.1 i) ist

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \right)^c \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c = A^c$$

dicht.

iii) Wäre $Kat(U) = 1$, so wäre gemäss ii) die Menge $U^c = A = \overline{A}$ dicht, also $A = M, U = \emptyset$. $\square$

"Typische" Beispiele magerer, beziehungsweise fetter Mengen sind somit (für $M = \mathbb{R}$) $\mathbb{Q}$, beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beachte, dass $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$. Jedoch scheint es einen Zusammenhang mit dem Lebesgueschen Mass zu geben. Ist diese intuitive Vorstellung richtig?

Fragen: Sind Lebesgue-Nullmengen $A \subset \mathbb{R}$ (im Baireschen Sinne) "mager"? Haben magere Mengen $A \subset \mathbb{R}$ stets verschwindendes Lebesgue-Mass?

Beide Fragen sind mit "Nein" zu beantworten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3.3 *Sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, und für $j \in \mathbb{N}$ sei*

$$U_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]q_k - 2^{-(j+k+1)}, q_k + 2^{-(j+k+1)}[$$

mit

$$\mathcal{L}^1(U_j) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-(j+k)} = 2^{-j}.$$

Die Mengen U_j sind offen und wegen

$$\overline{U_j} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

auch dicht. Also ist $A_j = U_j^c$ nirgends dicht, $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ mager und daher $U = \bigcap_{j=1}^\infty U_j = A^c$ fett nach Satz 1.3.2, jedoch gilt $\mathcal{L}^1(U) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^1(U_j) = 0$.

1.4 Erste Anwendung

Der Satz von Baire ist grundlegend für die Theorie linearer Gleichungen in Banach-Räumen. Als erste Anwendung stellen wir hier jedoch die Lösung des nichtlinearen Problems aus Abschnitt 1 vor.

Satz 1.4.1 *(Baire) Sei (M, d) vollständig, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon M \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, und es existiere der punktweise Limes*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in M$. Dann ist

$$R = \{x; f \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$$

eine residuelle Menge, insbesondere also dicht in M.

Beweis: Für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ setze

$$P_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$$

und weiter

$$R_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^\infty \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon}.$$

Beachte: $R_\varepsilon \supset R_\delta$ für $\delta \leq \varepsilon$.

Behauptung: $U \colon = \bigcap_{j=1}^\infty R_{1/j} = R$, die Menge der Stetigkeitspunkte von f.

Beweis: "$R \subset U$". Sei f in x_0 stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_0 > 0, n_0 = n_0(\varepsilon), r_n > 0$ $(n \geq n_0)$ mit

$$\sup_{x \in B_{r_0}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$$

und

$$\sup_{n \geq n_0} |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

sowie

$$\sup_{x \in B_{r_n}(x_0)} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$$

Dann folgt für $n \geq n_0, r < \min\{r_0, r_n\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B_r(x_0);$$

also $B_r(x_0) \subset P_{n,\varepsilon}, x_0 \in \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon} \subset R_\varepsilon$. Also $x_0 \in U$.

"$U \subset R$". Sei f in x_0 unstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f = \sup_{B_r(x_0)} f - \inf_{B_r(x_0)} f > 3\varepsilon, \forall r > 0.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $r_n > 0$ mit

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n < \varepsilon, \forall r < r_n.$$

Schätze ab für $r < r_n$

$$\begin{aligned} 2 \sup_{B_r(x_0)} |f_n - f| &\geq \sup_{x,y \in B_r(x_0)} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \\ &\geq \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f - \operatorname{osc}_{B_r(x_0)} f_n > 2\varepsilon; \end{aligned}$$

das heisst

$$x_0 \notin \overset{\circ}{P}_{n,\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit $x_0 \notin R_\varepsilon$ für $\varepsilon < \varepsilon_0(x_0)$, daher auch $x_0 \notin U$.

Behauptung: R_ε ist offen und dicht für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis: Offenbar ist R_ε offen, $\varepsilon > 0$. Betrachte für $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$F_{n,\varepsilon} = \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Beachte, dass mit $f_{n+k}(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$ folgt $F_{n,\varepsilon} \subset P_{n,\varepsilon}$. Wegen $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ gilt zudem $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} = M, \forall \varepsilon > 0$. Weiter ist

$$F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x; |f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen, also $F_{n,\varepsilon} = \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon} \cup \partial F_{n,\varepsilon}$ und daher

$$\left(F_{n,\varepsilon} \setminus \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}\right)^\circ = (\partial F_{n,\varepsilon})^\circ = \emptyset.$$

Setze $A_{n,\varepsilon} = \partial F_{n,\varepsilon}$. Dann ist $A_{n,\varepsilon}$ abgeschlossen und nirgends dicht und liefert die magere Menge

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^\infty A_{n,\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^\infty (F_{n,\varepsilon} \setminus \mathring{F}_{n,\varepsilon}) \supset \bigcup_{n=1}^\infty F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{F}_{n,\varepsilon} \supset M \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{P}_{n,\varepsilon} = M \setminus R_\varepsilon.$$

Satz 1.3.2 liefert die Behauptung.

Setze nun

$$U_j = R_{1/j}, A_j = R_{1/j}^c.$$

Dann ist $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ mager, also

$$R = U = \bigcap_{j=1}^\infty U_j = A^c$$

residuell, insbesondere dicht nach Satz 1.3.2 ii). □

Umgekehrt kann man fragen

i) wann sich eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise durch stetige Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ approximieren lässt.

Beispiel: $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nirgends stetig, also nicht punktweise durch stetige f_n approximierbar

ii) ob/unter welchen Bedingungen eine Funktion $f \in L^1([0,1])$ einen Vertreter $\tilde{f}$ mit obiger Eigenschaft besitzt. Kandidaten für (f_n) wären in diesem Falle

a) die Mittel (der durch $f \equiv 0$ ausserhalb forgesetzten Funktion f), mit

$$f_n(x) = n \int_{x-\frac{1}{2n}}^{x+\frac{1}{2n}} f(y)\,dy \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

für fast alle $x \in [0,1]$ und insbesondere in jedem Stetigkeitspunkt, oder

b) die **Fourier-Reihe** der periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion f. *OBdA* sei die Periode auf 2π gestreckt. Setze

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, k \in \mathbb{Z},$$

und

$$f_n(x) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx}.$$

Vergleiche dazu das Konvergenzkriterium von Dini:

Satz 1.4.2 *(Dini) Falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{f(x+t)-f(x)}{t}|\,dt < \infty,$$

so gilt für die obige Fourier-Reihe

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Eine weitere Anwendung liefert

Satz 1.4.3 *(Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit)*
Sei (M,d) vollständig, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, und sei $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **punktweise beschränkt** *in dem Sinne, dass*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda(x)| < \infty, \forall x \in M.$$

Dann gibt es eine offene Kugel $B \subset M$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, x\in B}|f_\lambda(x)| < \infty;$$

das heisst, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist **gleichmässig beschränkt auf** *B.*

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschlossene Menge

$$A_k = \{x \in M; |f_\lambda(x)| \leq k, \forall\lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{\{x; |f_\lambda(x)| \leq k\}}_{\text{abgeschlossen, da } f_\lambda \text{ stetig}}$$

mit $\bigcup_{k=1}^\infty A_k = M$. Da M vollständig, gibt es gemäss Satz 1.3.1 ii) ein k_0 mit $\mathring{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Wähle $B \subset A_{k_0}$. $\square$

Falls die Funktionen f_λ lineare Abbildungen auf einem Vektorraum sind, erhält man aus Satz 1.4.3 ein Kriterium für die gleichmässige Beschränktheit der f_λ auf einer Kugel um 0, das heisst für die gleichmässige Stetigkeit der f_λ. Es liegt daher nahe, nun auch die lineare Struktur einzubeziehen

Kapitel 2

Lineare Abbildungen

2.1 Normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, $||\cdot||\colon X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf X; das heisst,
i) $||x|| \geq 0$, "$= 0$" gdw. $x = 0$ (Definitheit),
ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (positive Homogenität),
iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung).
Mit der von $||\cdot||$ induzierten Metrik

$$d(x, y) = ||x - y||$$

ist X dann auch ein metrischer Raum.

Definition 2.1.1 $(X, ||\cdot||)$ *heisst ein* **Banach Raum** , *falls* X *bezüglich* d *vollständig ist.*

Bemerkung 2.1.1 *i) Die Norm ist (Lipschitz-)stetig auf* X, *da*

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x + y||, \forall x, y \in X.$$

ii) Die Vektorraumoperationen sind ebenfalls stetig (Übung).

Beispiel 2.1.1 *i) Sei* M *eine Menge,* $(X, ||\cdot||_X)$ *ein normierter Raum. Dann ist*

$$B(M, X) = \{f\colon M \to X; \sup_{t \in M} ||f(t)||_X < \infty\}$$

ein Vektorraum mit der Norm

$$||f||_{B(M,X)} = \sup_{t \in M} ||f(t)||_X.$$

ii) $B(M, X)$ *ist vollständig, wenn* X *vollständig ist.*

Beweis:

i) Mit den punktweise definierten Vektorraum-Verknüpfungen

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), (\lambda f)(t) = \lambda f(t), t \in M$$

wird $B(M,X)$ zu einem Vektorraum. Dabei benutzen wir auch die Dreiecks-Ungleichung und die Homogenität der Norm. Die Eigenschaften i) und ii) einer Norm sind trivialerweise erfüllt; bezüglich iii) beachte

$$\begin{aligned} ||f+g||_{B(M,X)} &= \sup_{t\in M} ||f(t)+g(t)||_X \leq \sup_{t\in M} (||f(t)||_X + ||g(t)||_X) \\ &\leq ||f||_{B(M,X)} + ||g||_{B(M,X)}. \end{aligned}$$

ii) Cauchy-Folgen in $B(M,X)$ sind punktweise konvergent. □

Als Anwendung von Beispiel 2.1.1 zeigen wir, dass sich jeder metrische Raum (M,d) "isometrisch" in einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) einbetten lässt.

Seien $(M,d), (M^*, d^*)$ metrische Räume, $\Phi\colon M \to M^*$.

Definition 2.1.2 Φ *heisst* **Isometrie** *, falls gilt*

$$d^*(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x,y), \forall x, y \in M.$$

Satz 2.1.1 *Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (M^*, d^*) und eine Isometrie $\Phi\colon M \to M^*$.*

Bemerkung 2.1.2 *i) Wir bezeichnen in diesem Falle den Raum $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$ als* **Vervollständigung** *von M, (versehen mit der Metrik $\tilde{d} = d^*{}_{|M\times M}$).*

ii) Man kann zeigen, dass die Vervollständigung bis auf Isometrien eindeutig ist.

Beweis von Satz 2.1.1: Wähle $M^* = B(M,\mathbb{R})$ mit der von $||\cdot||_{B(M,\mathbb{R})}$ induzierten Metrik d^*. Nach Beispiel 2.1.1 ist (M^*, d^*) vollständig.

Fixiere ein $x^* \in M$. Definiere nun $\Phi\colon M \to B(M,\mathbb{R})$ durch

$$\Phi\colon x \mapsto f_x(z) = d(x,z) - d(x^*, z).$$

Beachte

$$|f_x(z)| \leq |d(x,z) - d(x^*,z)| \leq d(x,x^*), \forall z \in M;$$

also $f_x \in B(M,\mathbb{R})$. Analog folgt

$$\begin{aligned} ||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} &= \sup_{z\in M} |f_x(z) - f_y(z)| \\ &= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \end{aligned}$$

und

$$||f_x - f_y||_{B(M,\mathbb{R})} = d(x,y),$$

falls man $z = x$ oder $z = y$ wählt. Also ist Φ eine Isometrie. □

Seien $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ Normen auf X.

Definition 2.1.3 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ *heissen* **äquivalent**, *falls mit einer Konstanten* $C > 0$ *gilt*

$$C^{-1}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1, \forall x \in X. \tag{2.1.1}$$

Beispiel 2.1.2 *i) Auf* $\mathbb{R}^n$ *(oder* $\mathbb{C}^n$*) ist jede Norm äquivalent zur euklidischen Norm; also sind je zwei Normen auch zueinander äquivalent.*

Beweis: *Die Einheitssphäre in* $\mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1}\}$$

ist kompakt, jede Norm $||\cdot||_1$ *bezüglich der euklidischen Norm stetig, da für* $x = x_0 + \xi, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *gilt*

$$\begin{aligned}|||x||_1 - ||x_0||_1| \leq ||x - x_0||_1 = ||\sum_{i=1}^n \xi_i e_i||_1 \\ \leq \sum_{i=1}^n ||\xi_i e_i||_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|||e_i||_1 \leq C \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq C||\xi||.\end{aligned}$$

Also existieren

$$\max_{x \in S^{n-1}} ||x||_1 = C_1, \min_{x \in S^{n-1}} ||x||_1 = C_2^{-1} > 0.$$

Mit $C = \max\{C_1, C_2\}$ *folgt* (2.1.1). □

ii) Die Normen auf $C^0([0,1])$,

$$||f||_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, ||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

sind nicht äquivalent, da für $(f_n)_{n \in N}$ *mit*

$$f_n(t) = t^n, 0 \leq t \leq 1$$

gilt

$$||f_n||_1 = 1, ||f_n||_2 = \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Hingegen lässt sich das Ergebnis aus Beispiel 2.1.2 i) auf jeden endlich-dimensionalen Raum übertragen.

Satz 2.1.2 *Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum* X *sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis: Wir führen die Aussage auf den Fall $X = \mathbb{R}^n$, beziehungsweise $X = \mathbb{C}^n$ zurück. *OBdA* sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wähle eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ für X. Dann ist die Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R}^n \to X, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$$

linear und injektiv, mit der Rangformel also auch surjektiv. Seien $||\cdot||_1^X, ||\cdot||_2^X$ Normen auf X. Definiere

$$||x||_1 = ||\Phi(x)||_1^X, x \in \mathbb{R}^n$$

und analog $||x||_2$. Die Eigenschaften i), ii) einer Norm folgen aus der Definitheit und Homogenität von $||\cdot||_i^X$, da Φ linear ist und injektiv. Nach Beispiel 2.1.2 i) gibt es $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} C^{-1}||x||_1 = C^{-1}||\Phi(x)||_1^X \leq ||x||_2 = ||\Phi(x)||_2^X \\ \leq C||x||_1 = C||\Phi(x)||_1^X, \forall x \in X. \end{aligned}$$

Da Φ surjektiv, folgt die Behauptung. □

Satz 2.1.3 *Endlich-dimensionale Teilräume eines normierten Raumes sind vollständig, insbesondere abgeschlossen.*

Beweis: Sei $Y \subset X$ endlich-dimensionaler Teilraum des normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$, $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = n$. Sei $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to Y$ wie im Beweis von Satz 2.1.2, $||x||_1 = ||\Phi(x)||$ die von der Einschränkung von $||\cdot||$ auf Y induzierte Norm in $\mathbb{R}^n$.

Cauchy-Folgen $(y_k) \subset Y$ werden unter Φ^{-1} abgebildet auf Cauchy-Folgen (x_k) im $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$. Wegen Beispiel 2.1.2 i) sind dies auch Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert

$$\lim_{k\to\infty} x_k =: x$$

und $y_k \to y :\, = \Phi(x)$ $(k \to \infty)$. Somit ist Y vollständig.

Abgeschlossenheit erhält man mit dem Folgenkriterium gemäss Satz 1.2.2. □

Für ∞-dimensionale Unterräume ist das Ergebnis der Satz 2.1.3 im allgemeinen nicht richtig.

Beispiel 2.1.3 *Betrachte $C^0([0,2])$ als Unterraum von $(L^1([0,2]), ||\cdot||_{L^1})$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,2])$ mit*

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $L^1([0,2])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1; \end{cases}$$

jedoch gilt $f \notin C^0([0,2])$.

Abstrakt kann man auch wie folgt argumentieren: $C^0([0,1])$ ist ein strikt in $L^1([0,1])$ enthaltener Teilraum,jedoch gilt $L^1([0,1]) = \overline{C^0([0,1])}$.

Wir wiederholen den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen (M,d).

Definition 2.1.4 *$K \subset M$ heisst (folgen-)* **kompakt***, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K eine konvergente Teilfolge besitzt.*

In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt das einfache Kriterium: $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Vergleichbare Kompaktheitskriterien in $C^0(\overline{\Omega})$ oder $L^p(\Omega)$ werden wir später kennenlernen.

In metrischen Räumen ist Folgenkompaktheit ferner äquivalent zur Überdeckungskompaktheit.

Definition 2.1.5 *$K \subset M$ heisst* **überdeckungskompakt***, falls jede offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Letztere "Heine-Borel-Eigenschaft" benutzt man zur Definition von Kompaktheit in topologischen Räumen.

Schliesslich kann man endlich-dimensionale Vektorräume auch wie folgt charakterisieren.

Satz 2.1.4 *Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\dim(X) < \infty$.

ii) Die Einheitssphäre in X,

$$S = \{x \in X; ||x|| = 1\}$$

ist kompakt.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n, \Phi\colon \mathbb{R}^n \to X$ der Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 2.1.2, $||\cdot||_1$ die durch Φ induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\Phi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_1 = 1\} =: S_1.$$

Wegen Beispiel 2.1.2 i) ist $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Φ ist stetig. Damit ist auch $\Phi(S_1) = S$ kompakt.

ii) $\Rightarrow$ i) (indirekt) Sei $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$. Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Falls die Norm auf X von einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induziert wird, das heisst falls

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}, \forall x \in X,$$

so erhält man eine geeignete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, indem man aus einer Folge linear unabhängiger Vektoren y_k mit dem Gram-Schmidtschen [1] Verfahren eine Folge orthonormaler Vektoren erzeugt mit

$$||x_k|| = 1, (x_i, x_k) = 0 \ (i \neq k),$$

also auch

$$||x_i - x_k||^2 = ||x_i||^2 + ||x_k||^2 - 2(x_i, x_k) = 2 \ (i \neq k).$$

[1] siehe zum Beispiel Werner, S. 202

Somit kann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben.

In einem allgemeinen normierten Raum erhält man analog eine geeignete Folge durch Anwendung des folgenden

Lemma 2.1.1 *(Franz Riesz): Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $Y \neq X$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in]0,1[$ ein $x \in X$ mit*

i) $||x|| = 1$,

ii) $d(x, Y) = \inf_{y\in Y} ||x - y|| > 1 - \varepsilon$.

Beweis: Wähle $x^* \in X \setminus Y$. Da $Y = \overline{Y}$, gilt

$$d\colon = d(x^*, Y) = \inf_{y\in Y} ||x^* - y|| > 0.$$

Wähle $y^* \in Y$ mit

$$d \leq ||x^* - y^*|| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Setze

$$x = \frac{x^* - y^*}{||x^* - y^*||}$$

mit $||x|| = 1$ und

$$d(x, Y) = \inf_{y\in \overline{Y}} ||\frac{x^* - y}{||x^* - y^*||}|| = \frac{d}{||x^* - y^*||} > 1 - \varepsilon.$$

□

Beweis von Satz 2.1.4 ii) $\Rightarrow$ i) (vollendet) Seien $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig. $Y_k = \text{span}\{y_l; l \leq k\}, k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.1.3 ist Y_k für jedes k abgeschlossen. Wähle $x_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$ und für $k \geq 2$ wähle $x_k \in Y_k \setminus Y_{k-1}$ mit

$$||x_k|| = 1, d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

gemäss Lemma 2.1.1. Dann gilt für $k > l$ stets

$$||x_k - x_l|| \geq d(x_k, Y_l) \geq d(x_k, Y_{k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Also ist S nicht kompakt. □

2.2 Stetige lineare Abbildungen

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Vektorräume, $A\colon X \to Y$ linear.

Satz 2.2.1 *Es sind äquivalent:*

i) A ist stetig in $0 \in X$;

ii) A ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$;

iii) A ist gleichmässig stetig auf X;

iv) A ist Lipschitz stetig;

v) $\sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y < \infty$.

Beweis: v) $\Rightarrow$ iv) Mit der Linearität von A folgt für $x_1 \neq x_2 \in X$

$$||Ax_1 - Ax_2||_Y = ||A(x_1 - x_2)||_Y = ||x_1 - x_2||_X \; ||A\frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||_X}||_Y$$
$$\leq \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y ||x_1 - x_2||_X.$$

iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) ist klar.

i) $\Rightarrow$ v) (indirekt) Sei $\sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y = \infty$. Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$||x_n||_X \leq 1, 0 < ||Ax_n||_Y \to \infty \; (n \to \infty).$$

Dann gilt

$$z_n = \frac{x_n}{||Ax_n||_Y} \to 0 \text{ in } X \; (n \to \infty);$$

jedoch folgt mit der Linearität von A

$$||Az_n||_Y = 1, n \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit in $0 \in X$. □

Zusammen mit Satz 2.1.2 folgt:

Satz 2.2.2 *Sei X endlich-dimensional, $A\colon X \to Y$ linear. Dann ist A (Lipschitz) stetig.*

Beweis: $||x||_* \colon = ||x||_X + ||Ax||_Y$ definiert eine Norm, die von A induzierte "Graphennorm" auf X. Nach Satz 2.1.2 gibt es $C > 0$ mit

$$||Ax||_Y \leq ||x||_* \leq C||x||, \forall x \in X.$$

□

Satz 2.2.2 gilt nicht mehr, falls X unendlich-dimensional ist.

Beispiel 2.2.1 *Sei $X = Y = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}, ||\cdot||_Y = ||\cdot||_{C^0}, A = id$. Nach Beispiel 2.1.3 gilt*

$$\sup_{||f||_{L^1} \leq 1} ||f||_{C^0} = \infty;$$

also ist A nicht stetig.

Setze

$$L(X,Y) = \{A\colon X \overset{\text{linear}}{\to} Y; A \text{ stetig }\}.$$

$L(X,Y)$ ist ein Vektorraum mit Norm

$$||A||_{L(X,Y)} = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X}.$$

Falls $X = Y$ (mit derselben Norm), so setze

$$L(X,X) = L(X).$$

Satz 2.2.3 *i) Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$. Dann gilt $BA \in L(X,Z)$, und*

$$||BA||_{L(X,Z)} \leq ||A||_{L(X,Y)}||B||_{L(Y,Z)}.$$

ii) Die obige Abbildung $A, B \mapsto BA$ ist stetig.

Beweis:

i) Schätze ab

$$\begin{aligned} ||(BA)x||_Z = ||B(Ax)||_Z &\leq ||B||_{L(Y,Z)}||Ax||_Y \\ &\leq ||B||_{L(Y,Z)}||A||_{L(X,Y)}||x||_X. \end{aligned}$$

ii) Stetigkeit der Verkettung folgt aus

$$BA - B_0A_0 = (B - B_0)A + B_0(A - A_0)$$

mit i). □

Falls $X = Y$, so können wir $L(X)$ wegen Satz 2.2.3 als Algebra auffassen. Insbesondere sind die Potenzen $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k-\text{mal}}$ eines $A \in L(X)$ definiert.

Für die Existenz von **Potenzreihen** benötigen wir die Vollständigkeit.

Satz 2.2.4 *Ist Y in Banach-Raum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banach-Raum.*

Beweis: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, das heisst

$$\sup_{||x||_X \leq 1} ||A_nx - A_lx||_Y \to 0 \ (n, l \to \infty).$$

Dann ist $(A_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge für jedes $x \in X$ mit $||x||_X \leq 1$, wegen der Linearität also auch für beliebiges $x \in X$. Falls Y vollständig ist, existiert der punktweise Limes

$$Ax: = \lim_{n\to\infty} A_nx, x \in X.$$

A ist linear wegen der Linearität von A_n und Stetigkeit der Vektorraum-Operationen, und aus

$$||Ax||_Y = ||\lim_{n\to\infty}(A_nx)||_Y = \lim_{n\to\infty} ||A_nx||_Y \leq \limsup_{n\to\infty} ||A_n||_{L(X,Y)}||x||$$

folgt die Stetigkeit von A.

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} ||Ax - A_nx||_Y &= ||\lim_{l\to\infty}(A_lx - A_nx)||_Y \\ &= \lim_{l\to\infty} ||(A_l - A_n)(x)||_Y \leq \limsup_{l\to\infty} ||A_l - A_n||_{L(X,Y)}||x||_X \end{aligned}$$

und daher nach Übergang zum Supremum bezüglich $||x||_X \leq 1$

$$||A - A_n||_{L(X,Y)} \leq \limsup_{l\to\infty} ||A_l - A_n||_{L(X,Y)} \to 0 \ (n \to \infty).$$

□

Satz 2.2.5 *Sei Y ein Banach-Raum, $A_j \in L(X,Y), j \in \mathbb{N}$, und es gelte*

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_j \in L(X,Y)$.

Beweis: Sei $S_n = \sum_{j=1}^{n} A_j, n \in \mathbb{N}$. Da

$$||S_n - S_l||_{L(X,Y)} \le \sum_{j=l+1}^{n} ||A_j||_{L(X,Y)} \to 0 (n \ge l \to \infty),$$

ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(X,Y)$, nach Satz 2.2.4 also konvergent. □

Beispiel 2.2.2 *i) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert die Reihe* $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in L(X)$.
Beweis: *Mit $||A^k||_{L(X)} \le ||A||^k_{L(X)}, \forall k \in \mathbb{N}_0$, folgt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||\frac{A^k}{k!}||_{L(X)} \le \exp(||A||_{L(X)}) < \infty.$$

□

ii) Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X), ||A||_{L(X)} < 1$. Dann existiert die **Neumann-Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in L(X)$*, und es gilt (mit $1 = A^0 = id$)*

$$(1-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = 1; \tag{2.2.1}$$

das heisst, die Abbildung $1 - A$ ist invertierbar mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1-A)^{-1}.$$

Beweis: *Konvergenz der Reihe $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k, n \in \mathbb{N}$, folgt analog zu i) mit dem Konvergenzkriterium für die geometrische Reihe. Die Identität (2.2.1) folgt aus*

$$(1-A)S_n = S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 + (S_n - S_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

Satz 2.2.6 *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$. Dann existiert*

$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}_{L(X)} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||A^n||^{\frac{1}{n}}_{L(X)} \le ||A||_{L(X)}.$$

r_A heisst **Spektralradius** *von A.*

Beweis: Beachte
$$||A^n||_{L(X)}^{1/n} \leq ||A|_{L(X)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit
$$||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{n>1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon.$$
Für $n \in \mathbb{N}$ schreibe $n = kl + m, m < k$. Es folgt
$$\begin{aligned} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} &\leq ||A^{kl}||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} ||A^m||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \\ &\leq ||A^k||_{L(X)}^{\frac{l}{n}} ||A||_{L(X)}^{\frac{m}{n}} \\ &\to ||A^k||_{L(X)}^{\frac{1}{k}} \leq \inf_{j\in\mathbb{N}} ||A^j||^{\frac{1}{j}} + \varepsilon \ (n \to \infty), \end{aligned}$$
also
$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{n\geq 1} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}}.$$
□

Als Folgerung notieren wir abschliessend:

Satz 2.2.7 *Sei X ein Banach-Raum, $A \in L(X)$ mit $r_A < 1$. Dann konvergiert die Neumann-Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} A^j \in L(X)$, und es gilt*
$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (1 - A)^{-1} \in L(X).$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 2.2.5 mit dem Wurzelkriterium. □

Setze
$$Gl(X) = \{A \in L(X); A \text{ invertierbar und } A^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 2.2.1 *In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, dass für bijektive Abbildungen $A \in L(X)$ eines Banachraums X die Inverse automatisch stetig ist.*

Aus Satz 2.2.7 folgt nun

Satz 2.2.8 *Sei X ein Banach-Raum. Dann ist $Gl(X)$ offen in $L(X)$.*

Beweis: Sei $A_0 \in Gl(X), A \in L(X)$ mit
$$||A - A_0||_{L(X)} < ||A_0^{-1}||_{L(X)}^{-1}.$$
Wir zeigen $A \in Gl(X)$. Schreibe dazu
$$A = A_0 + (A - A_0) = A_0(1 + A_0^{-1}(A - A_0)).$$
Satz 2.2.3 liefert die Abschätzung
$$||A_0^{-1}(A - A_0)||_{L(X)} \leq ||A_0^{-1}||_{L(X)} ||A - A_0||_{L(X)} < 1.$$
Mit Satz 2.2.7 folgt
$$(1 + A_0^{-1}(A - A_0))^{-1} \in L(X),$$
und mit Satz 2.2.3 folgt die Behauptung. □

2.3 Quotientenraum, Produktraum

Sei X ein Vektorraum, $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Definiere die Äquivalenzrelation

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$$

mit Äquivalenzklassen

$$[x] = x + Y.$$

Beachte $[\alpha x] = \alpha[x], [x+y] = [x] + [y]$; das heisst

$$X/Y := \{[x]; x \in X\}$$

ist ein Vektorraum. Es sei π die kanonische Quotientenabbildung

$$\pi \colon X \ni x \mapsto [x] \in X/Y.$$

Satz 2.3.1 *Sei $||\cdot||_X$ Norm auf X, $Y \subset X$ abgeschlossen, $Y \neq X$. Dann ist*

$$||[x]||_{X/Y} := \inf_{y \in Y} ||x+y||_X$$

eine Norm auf X/Y, und π ist stetig mit

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} = 1.$$

Falls $(X, ||\cdot||_X)$ vollständig ist, so auch $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$.

Beweis:

i) Wir zeigen die Dreiecks-Ungleichung; die übrigen Eigenschaften einer Norm sind offensichtlich.

Zu $x_1, x_2 \in X, \varepsilon > 0$ wähle $y_1, y_2 \in Y$ mit

$$||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ||[x_1] + [x_2]||_{X/Y} &= ||[x_1 + x_2]||_{X/Y} \leq ||(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)||_X \\ &\leq ||x_1 - y_1||_X + ||x_2 - y_2||_X \leq ||[x_1]||_{X/Y} + ||[x_2]||_{X/Y} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

ii) Mit $||\pi(x)||_{X/Y} = ||[x]||_{X/Y} \leq ||x||_X$ folgt sofort $||\pi||_{L(X,X/Y)} \leq 1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x = x_\varepsilon \in X \setminus Y$ gemäss dem Lemma 2.1.1 von Riesz mit

$$||x||_X = 1, \operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Beachte die Beziehung

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||_X = ||[x].||_{X/Y}$$

Es folgt

$$||\pi||_{L(X,X/Y)} \geq \frac{||[x]||_{X/Y}}{||x||_X} > 1 - \varepsilon.$$

□

Analog zu $\mathbb{R}^n$ kann man für Vektorräume $(X_i, ||\cdot||_i), 1 \leq i \leq n$, den Produktraum $X = \prod_{i=1}^n X_i$ definieren mit Elementen

$$x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in X_i \ (1 \leq i \leq n).$$

Wie in $\mathbb{R}^n$ kann man aus den Normen $||\cdot||_i$ der X_i verschiedene Normen für X ableiten, zum Beispiel, für $1 \leq p < \infty$, die Norm

$$||x||_{p,X} := \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||_i^p \right)^{1/p},$$

oder die Norm

$$||x||_{\infty,X} := \max_i ||x_i||_i.$$

Diese sind wegen Beispiel 2.1.2 alle äquivalent, und die Projektionen

$$\pi_i \colon X \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in X_i$$

sind stetig, $1 \leq i \leq n$. X ist vollständig, falls alle X_i dies sind.

Kapitel 3

Prinzipien der Funktionalanalysis

3.1 Gleichmässige Beschränktheit

Wie angekündigt, liefert der Satz 1.4.3 von Baire im Kontext linearer Abbildungen auch Information "im Grossen". Seien X, Y normierte Räume.

Satz 3.1.1 *(Banach-Steinhaus): Sei X vollständig, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $L(X,Y)$ punktweise beschränkt, das heisst*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda x||_Y < \infty, \forall x \in X.$$

Dann folgt

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} < \infty;$$

das heisst $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist gleichmässig beschränkt.

Beweis: Für $\lambda \in \Lambda$ definiere die stetige Abbildung $f_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\lambda(x) = ||A_\lambda x||_Y, x \in X.$$

Nach Annahme ist $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt.
Da X vollständig ist, existiert nach Satz 1.4.3 eine Kugel $B = B_r(x_0) \subset X$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B} |f_\lambda(z)| < \infty.$$

Es folgt für $||x||_X < 1$:

$$\begin{aligned}
||A_\lambda x||_Y &= \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx) - A_\lambda(x_0)||_Y \\
&\leq \frac{1}{r}||A_\lambda(x_0 + rx)||_Y + \frac{1}{r}||A_\lambda x_0||_Y \\
&\leq \frac{1}{r} \sup_{\lambda\in\Lambda, z\in B_r(x_0)} |f_\lambda(z)| + \frac{1}{r}\sup_{\lambda\in\Lambda}||A_\lambda x_0||_Y =: M;
\end{aligned}$$

gleichmässig in $\lambda \in \Lambda$ und $x \in X$ mit $||x||_X \leq 1$; also

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} ||A_\lambda||_{L(X,Y)} \leq M.$$

$\square$

Die Vollständigkeit von X ist wichtig, wie das folgende Beispiel 3.1.1 zeigt.

Anwendung 3.1.1 *Sei X vollständig, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ punktweise gegen $A\colon X \to Y$ konvergent. Dann ist A linear und stetig mit*

$$||A||_{L(X,Y)} \leq \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty.$$

Beweis: Nach Satz 3.1.1 gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} ||A_j||_{L(X,Y)} < \infty$. Wähle eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$||A_j||_{L(X,Y)} \underset{(j\to\infty, j\in\Lambda)}{\to} \liminf_{j\to\infty} ||A_j||_{L(X,Y)} =: M < \infty.$$

Diese Teilfolge konvergiert natürlich ebenfalls punktweise gegen A. Offenbar ist A linear, und es gilt

$$||Ax||_Y = \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j x||_Y \leq \lim_{j\to\infty, j\in\Lambda} ||A_j||_{L(X,Y)} ||x||_X = M||x||_X$$

für alle $x \in X$. $\square$

Beispiel 3.1.1 *Sei $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_X = ||\cdot||_{L^1}$. $A_j f\colon = j\int_{1-1/j}^1 f(t)\,dt, j \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt*

$$|A_j f| \leq j||f||_{L^1}, j \in \mathbb{N};$$

also ist $A_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter gilt

$$A_j f \underset{(j\to\infty)}{\to} Af\colon = f(1), \forall f \in X;$$

jedoch ist $A\colon X \to \mathbb{R}$ unstetig. (Wähle $f_n(t) = t^n$ mit $f_n \to 0$ in $L^1([0,1])$ und $Af_n = \frac{n}{n+1}(1-(1-1/n)^{n+1}) \to 1 - e^{-1}$ für $n \to \infty$.)

3.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y normierte Räume, $A\colon X \to Y$ linear.

Definition 3.2.1 *A heisst* **offen**, *falls das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ offen ist in Y.*

Satz 3.2.1 *(Satz von der offenen Abbildung): Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

i) Ist A surjektiv, so ist A offen.

ii) Ist A bijektiv, so gilt $A^{-1} \in L(Y,X)$.

Beweis: i) Wir führen den Beweis in 3 Schritten.

Behauptung 1: $\exists r > 0\colon B_{2r}(0;Y) \subset \overline{A(B_1(0;X))}$.

Beweis: Da A surjektiv, folgt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0;X)).$$

Da Y vollständig, gibt es nach Satz 1.3.1 ii) ein k_0 mit

$$\overset{\circ}{\overline{A(B_{k_0}(0;X))}} \neq \emptyset,$$

und es gibt $y_0 = A(x_0) \in Y, r_0 > 0$ mit

$$B_{r_0}(y_0,Y) \subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))}.$$

Sei $l_0 \geq ||x_0||_X, l_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus

$$B_{r_0}(y_0;Y) = Ax_0 + B_{r_0}(0;Y)$$

mit der Linearität von A

$$\begin{aligned} B_{r_0}(0;Y) &\subset \overline{A(B_{k_0}(0;X))} - Ax_0 \\ &= \overline{A(B_{k_0}(0;X) - x_0)} \subset \overline{A(B_{k_0+l_0}(0;X))} \\ &= (k_0 + l_0)\overline{A(B_1(0;X))}. \end{aligned}$$

Wähle $r = \frac{r_0}{2(k_0+l_0)}$.

Behauptung 2: $B_r(0;Y) \subset A(B_1(0;X))$.

Beweis: Fixiere $y \in B_r(0;Y)$. Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$\sum_{k=1}^{n} Ax_k \to y \ (n \to \infty).$$

Da X vollständig, existiert $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_1(0;X)$, und mit der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = y.$$

Beachte, dass nach Behauptung 1 gilt:

$$B_{sr}(0;Y) \subset \overline{A(B_{s/2}(0;X))}, \forall s > 0.$$

Wähle $x_1 \in B_{1/2}(0;X)$ mit

$$||Ax_1 - y||_Y < \frac{r}{2}.$$

Setze $y_1 = y - Ax_1 \in B_{r/2}(0;Y)$.

Seien für $k \geq 1$ Punkte $x_1, \ldots, x_k$ sowie $y_1, \ldots, y_k$ bereits bestimmt mit

$$||x_l||_X < 2^{-l}, y_l = y_{l-1} - Ax_l \in B_{2^{-l}r}(0;Y), 2xs8ik, \leq l \leq k.$$

Wähle $x_{k+1} \in B_{2^{-k-1}}(0;X)$, so dass

$$y_{k+1} \colon = y_k - Ax_{k+1} \in B_{2^{-k-1}r}(0;Y).$$

Dann folgt $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||_X < 1$ und

$$y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k = y_1 - \sum_{k=2}^{n} Ax_k = \ldots = y_n \overset{(n\to\infty)}{\to} 0,$$

wie gewünscht.

Behauptung 3: A ist offen.

Beweis: Sei $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$, $y_0 = Ax_0$. Wähle $s > 0$ mit $B_s(x_0;X) \subset U$. Dann folgt mit Behauptung 2 sofort

$$\begin{aligned} B_{rs}(y_0;Y) &= y_0 + B_{rs}(0;Y) \subset Ax_0 + A(B_s(0;X)) \\ &= A(B_s(x_0;X)) \subset A(U). \end{aligned}$$

i) $\Rightarrow$ ii) Falls A bijektiv und offen, so ist A^{-1} offenbar stetig. □

Beispiel 3.2.1 *i) Sei $X = Y$ mit Normen $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$, und sei X vollständig bezüglich $||\cdot||_1$. Weiter gelte mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$*

$$||x||_2 \le C||x||_1, \forall x \in X. \tag{3.2.1}$$

Ist X auch vollständig bezüglich $||\cdot||_2$, so sind die Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ äquivalent.

Beweis: Betrachte $A = id \colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$. Wegen (3.2.1) ist A stetig. Falls $(X, ||\cdot||_2)$ vollständig, so folgt mit Satz 3.2.1 auch die Stetigkeit von A^{-1}; das heisst $||x||_1 \le C'||x||_2, \forall x \in X$.

ii) Betrachte insbesondere $X = C^0([0,1]), ||\cdot||_1 = ||\cdot||_{C^0}, ||\cdot||_2 = ||\cdot||_{L^1}$. $A = id$ ist stetig aber nicht offen; sonst wären die Normen $||\cdot||_{C^0}$ und $||\cdot||_{L^1}$ auf $C^0([0,1])$ äquivalent.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Vollständigkeit von Y in Satz 3.2.1 nötig ist. Analog sieht man ein, dass auch die Vollständigkeit von X im allgemeinen notwendig ist. Betrachte dazu das Beispiel

iii) Sei $X = Y = l^2, ||\cdot||_2 = ||\cdot||_{l^2}$, und definiere eine Norm $||\cdot||_1$ auf X, wie folgt: Erweitere das System linear unabhängiger Vektoren $e_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}, i = 1,2,3,\ldots$ zu einer Hamel-Basis $(b_\iota)_{\iota\in I}$ mit $||b_\iota||_{l^2} = 1, \forall \iota \in I$. Jedes $x \in X$ hat genau eine Darstellung

$$x = \sum_{\iota\in I} \alpha_\iota b_\iota,$$

wobei nur **endlich** *viele $\alpha_\iota \neq 0$. Setze*

$$||x||_1 = \sum_{\iota\in I} |\alpha_\iota|, \forall x = \sum_{\iota\in I} \alpha_\iota b_\iota \in X.$$

Beachte, dass für $x = \sum_\iota \alpha_\iota b_\iota$ stets gilt

$$||x||_{L^2} \le \sum_\iota |\alpha_\iota| ||b_\iota||_{l^2} = ||x||_1;$$

das heisst $A = id\colon (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ *ist stetig. Jedoch gilt für* $x_k = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}}_{k\text{-mal}}, 0, \dots) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} e_i$

$$||x_k||_{l^2} = 1, ||x_k||_1 = \sqrt{k}, k \in \mathbb{N};$$

also sind die Normen $||\cdot||_1$ *und* $||\cdot||_{l^2}$ *nicht äquivalent,* A^{-1} *also nicht stetig und damit* A *nicht offen.*

Beispiel 3.2.2 *Sei* $(X, ||\cdot||_X)$ *Banach-Raum,* $Y \subset X$ *abgeschlossen,* $Y \neq X$*,* $\pi\colon X \to X/Y$ *die kanonische Projektion.* π *ist stetig und surjektiv* $(X/Y, ||\cdot||_{X/Y})$ *vollständig nach Satz 2.3.1. Nach Satz 3.2.1 ist* π *daher offen. Vergleiche Satz 2.3.1.*

3.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y normierte Vektorräume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, wobei $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum ist.

Betrachte den **Graph von** A, also den linearen Raum

$$\Gamma_A = \{(x, Ax); x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Definition 3.3.1 *A heisst* **abgeschlossen**, *falls* Γ_A *abgeschlossen ist in* $X \times Y$*.*

Dabei versehen wir $X \times Y$ *in üblicher Weise mit einer Norm, zum Beispiel mit der Norm*

$$||(x, y)||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y, \forall x \in X, y \in Y.$$

Beispiel 3.3.1 *Falls* $A \in L(X, Y)$ *mit* $D(A) = X$*, so ist* A *abgeschlossen.*

Beweis: Betrachte eine Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in Γ_A mit

$$x_k \to x, y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Da A stetig ist, folgt $y = \lim_{k\to\infty} Ax_k = Ax$; das heisst $(x, y) \in \Gamma_A$. Also ist Γ_A abgeschlossen, und damit A.

Falls X und Y vollständig sind, so ist für lineare Abbildungen $A\colon X \to Y$ die Stetigkeit sogar äquivalent zur Abgeschlossenheit.

Satz 3.3.1 *(Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien* X, Y *Banach-Räume,* $A\colon X \to Y$ *linear. Dann sind äquivalent:*

i) $A \in L(X, Y)$*;*

ii) A *ist abgeschlossen.*

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) siehe Beispiel 3.3.1.

ii) $\Rightarrow$ i) Betrachte Γ_A, versehen mit der von der Norm $||\cdot||_{X\times Y}$ induzierten Norm. Falls X, Y vollständig sind, so gilt dies auch für $X \times Y$. Ist daher Γ_A abgeschlossen in $X \times Y$, so ist $(\Gamma_A, ||\cdot||_{X\times Y})$ ein Banach-Raum.

Die Projektionen

$$\pi_X : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto x \in X, \pi_Y : \Gamma_A \ni (x, Ax) \mapsto Ax \in Y$$

sind stetig, $\pi_X : \Gamma_A \to X$ zudem surjektiv und injektiv. Nach dem Satz 3.2.1 von der offenen Abbildung folgt $\pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma(A))$, und damit

$$A = \pi_Y \circ \pi_X^{-1} \in L(X, Y).$$

□

Bemerkung 3.3.1 *Satz 3.3.1 vereinfacht den Nachweis der Stetigkeit einer linearen Abbildung $A: X \to Y$ erheblich. Statt der* **zwei** *Bedingungen*

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} x \Rightarrow \begin{cases} Ax_k \to y \ (k \to \infty) \\ y = Ax \end{cases}$$

genügt es, die **eine** *Bedingung zu prüfen*

$$x_k \to x, Ax_k \to y \ (k \to \infty) \Rightarrow Ax = y.$$

Beispiel 3.3.2 *(Hellinger-Töplitz): Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum, $A: H \to H$ linear und symmetrisch; das heisst*

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H, \forall x, y \in H.$$

Dann ist A stetig.

Beweis: Wir zeigen, Γ_A ist abgeschlossen. Betrachte $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$x_k \to x, y_k = Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $z \in H$

$$(y, z)_H \underset{(k\to\infty)}{\leftarrow} (y_k, z)_H = (Ax_k, z)_H = (x_k, Az)_H \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, Az)_H = (Ax, z)_H;$$

das heisst

$$(Ax - y, z)_H = 0, \forall z \in H.$$

Wähle $z = Ax - y$. Es folgt $Ax = y$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Γ_A kann auch abgeschlossen sein, wenn $D(A)$ ein echter Teilraum von X ist, der Operator A also "unbeschränkt" ist.

Beispiel 3.3.3 *Sei $X = C^0([0,1])$, versehen mit der Supremumsnorm, $A = \frac{d}{dt}$ mit $D(A) = C^1([0,1]) \subset X$.*

Behauptung 1: *$A: D(A) \subset X \to X$ ist nicht stetig.*

Beweis: Betrachte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0,1])$ mit $f_n(t) = t^n, Af_n = nf_{n-1}$, und

$$||f_n||_{C^0} = 1, ||Af_n||_{C^0} = n||f_{n-1}||_{C^0} = n, n \in \mathbb{N};$$

also

$$\sup_{f \in D(A), ||f||_{C^0} \le 1} ||Af||_{C^0} = \infty.$$

Behauptung 2: *A ist abgeschlossen.*

Beweis: Falls für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([0,1])$ gilt

$$f_n \overset{C^0}{\to} f, g_n = \frac{df_n}{dt} \overset{C^0}{\to} g \ (n \to \infty),$$

so folgt mit einem elementaren Satz der Analysis $g = \frac{df}{dt} = Af$; das heisst, Γ_A ist abgeschlossen. □

Im Satz 3.2.1 ii) von der offenen Abbildung können wir nun die Annahme der Stetigkeit von A durch die Annahme der Abgeschlossenheit ersetzen und diesen Satz auf unbeschränkte Operatoren erweitern.

Satz 3.3.2 *(Satz von der stetigen Inversen): Seien X, Y Banach-Räume, $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, abgeschlossen, injektiv und surjektiv. Dann gibt es ein $B = A^{-1} \in L(Y, X)$ mit $AB = id_{|_Y}, BA = id_{|_{D(A)}}$.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.3.1 ist jetzt die stetige Projektion $\pi_Y : \Gamma(A) \to Y$ bijektiv, also $B\colon = \pi_X \circ \pi_Y^{-1} \in L(Y, X)$, und $B = A^{-1}\colon Y \to D(A)$. □

Beispiel 3.3.4 *Für den Operator A aus Beispiel 3.3.3 wähle als neuen Definitionsbereich*

$$D(A) = C_0^1([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]); f(0) = 0\}.$$

Dann ist $A = \frac{d}{dt}\colon D(A) \subset C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ surjektiv und injektiv mit stetiger Inversen

$$B\colon f \mapsto F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

3.4 Abschliessbare Operatoren

Seien X, Y normierte Vektorräume, $\Gamma \subset X \times Y$ ein linearer Unterraum.

Definition 3.4.1 *Γ heisst ein* **linearer Graph** *, falls gilt*

$$(x, y_1) \in \Gamma, (x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2,$$

oder, dazu äquivalent, falls gilt

$$(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0.$$

Bemerkung 3.4.1 *Falls $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear, so ist Γ_A offenbar ein linearer Graph.*

Umgekehrt induziert ein linearer Graph $\Gamma \subset X \times Y$ genau eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \subset X \to Y$ mit $\Gamma = \Gamma_A$, gegeben durch

$$D(A) = \pi_X(\Gamma), Ax = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap \Gamma), x \in D(A).$$

Seien $A\colon D(A) \subset X \to Y, B\colon D(B) \subset X \to Y$ linear mit Graphen $\Gamma_A, \Gamma_B \subset X \times Y$.

Definition 3.4.2 *B heisst* **Erweiterung** *von A, $B \supset A$, falls $\Gamma_A \subset \Gamma_B$, oder – dazu äquivalent – falls*

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } B_{|_{D(A)}} = A.$$

Definition 3.4.3 *A heisst* **abschliessbar**, *falls $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist. Der zugehörige Operator $\overline{A} \supset A$ mit $\Gamma_{\overline{A}} = \overline{\Gamma_A} \supset \Gamma_A$ heisst* **Abschluss** *von A.*

Bemerkung 3.4.2 *i) Falls A abschliessbar ist, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung (im Sinne der Inklusion der Graphen) von A.*
ii) Es gilt $D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$, genauer

$$D(\overline{A}) = \{x \in X; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A); y \in Y\colon (x_k, Ax_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} (x, y)\};$$

im Allgemeinen gilt $D(\overline{A}) \neq \overline{D(A)}$; vergleiche Beispiel 3.3.3 oder Beispiel 3.4.3 in diesem Abschnitt.

Satz 3.4.1 *A ist abschliessbar genau dann, wenn für $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_A$ gilt:*

$$x_k \underset{(k\to\infty)}{\to} 0, y_k = Ax_k \underset{(k\to\infty)}{\to} y \Rightarrow y = 0.$$

Beweis: A ist abschliessbar genau dann, wenn $\overline{\Gamma_A}$ ein linearer Graph ist und dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$(0, y) \in \overline{\Gamma_A} \Rightarrow y = 0.$$

□

Beispiel 3.4.1 *Sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ linear und stetig. Dann ist A abschliessbar.*

Beweis: Sei $(x_k, Ax_k = y_k) \in \Gamma_A$ mit $x_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$. Da A stetig, folgt

$$||Ax_k||_Y \le \sup_{\substack{0\neq x\in D(A)\\ ||x||_X\le 1}} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X} ||x_k||_X \to 0 \ (k \to \infty),$$

also $Ax_k \to 0 \ (k \to \infty)$. □

Nicht jeder Operator ist abschliessbar.

Beispiel 3.4.2 *Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, A die Abbildung*

$$A\colon D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\} \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Für

$$f_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}, k \in \mathbb{N},$$

gilt $f_k \in D(A), ||f_k||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \ (k \to \infty)$, *jedoch gilt andererseits*

$$Af_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also ist A nicht abschliessbar nach Satz 3.4.1.

Die wichtigste Klasse abschliessbarer Operatoren sind lineare Differentialoperatoren.

Beispiel 3.4.3 $\Delta\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *ist abschliessbar.*

Beweis: Sei $((u_k, f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Gamma_\Delta \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit

$$u_k \overset{L^2}{\to} 0, f_k = \Delta u_k \overset{L^2}{\to} f \ (k \to \infty).$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, alle $k \in \mathbb{N}$ nach partieller Integration die Gleichung

$$\int_\Omega f_k \varphi \, dx = \int_\Omega \Delta u_k \varphi \, dx = \int_\Omega u_k \Delta\varphi \, dx.$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L^2(\Omega)$, folgt $f = 0$; also ist Δ abschliessbar nach Satz 3.4.1. □

Allgemein betrachten wir Operatoren

$$A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$Au = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x) D^\alpha u, \ u \in C_0^\infty(\Omega),$$

mit Multi-Indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ vom Gewicht $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, und mit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, 1 \le j \le n.$$

Die Koeffizientenfunktionen a_α seien der Einfachheit halber von der Klasse $C^N(\overline{\Omega})$ vorausgesetzt, und $p < \infty$.

Satz 3.4.2 *Sei* $p < \infty$. *Dann ist der oben definierte Operator*

$$A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

abschliessbar.

Beweis: Wir argumentieren wie in Beispiel 3.4.3. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to 0$ in $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $f_k\colon = Au_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ für $k \to \infty$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nach partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_k\varphi\,dx = \int_\Omega Au_k\varphi\,dx &= \sum_{|\alpha|\le N}\int_\Omega a_\alpha(x)D^\alpha u_k\varphi\,dx\\ &= \sum_{|\alpha|\le N}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_k D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi)\,dx,\ \ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = 0, \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit dem sogenannten "Fundamentallemma der Variationsrechnung", Satz 3.4.3, folgt $f = 0$; das heisst A abschliessbar. □

Was ist $\overline{A}$? Was ist $D(\overline{A})$? Diese Frage führt auf die sogenannten **Sobolev-Räume**. Zum Beispiel ist $D(\overline{\Delta}) \subset L^2(\Omega)$ der Raum

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n\colon |\alpha| \le 2\}.$$

Satz 3.4.3 *("Fundamentallemma der Variationsrechnung")*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Falls

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = 0, \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

so ist $f = 0$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.4.3 *Die Annahme $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist zum Beispiel erfüllt, falls $f \in L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1,\infty]$.*

Beweis: (indirekt) Annahme: $f \ne 0$. Wähle einen Lebesgue-Punkt $x_0 \in \Omega$ mit

$$f(x_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu(B_r(x_0))}\int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx \ne 0.$$

Wähle $r > 0$ mit $\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) < r$ und

$$\int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx \ne 0.$$

Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(B_r(x_0)) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$0 \le \varphi_k \le 1, \varphi_k \underset{(k\to\infty)}{\to} \chi_{B_r(x_0)}\ \mu\text{-fast überall.}$$

Falls $r = 1, x_0 = 0$ wähle z. B. $\varphi_k(x) = e^{-\frac{1/k}{1-|x|^2}}$, falls $|x| < 1$, $\varphi_k(x) = 0$ sonst.

Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$0 = \int_\Omega f\varphi_k\,dx \to \int_\Omega f\chi_{B_r(x_0)}\,dx = \int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx \ne 0 \quad (k\to\infty). \qquad \square$$

Die Bedingung $p < \infty$ wird im Beweis von Satz 3.4.2 nicht benötigt. Jedoch erhält man als Abschluss des Graphen von $A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ dieselbe Menge wie für den Abschluss des Graphen von $A\colon C_0^\infty(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$.

Kapitel 4

Der Satz von Hahn-Banach, Konvexität

4.1 Der Satz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Siehe Satz 4.1.3 für den komplexen Fall.)

Definition 4.1.1 *Ein $p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst* **sublinear**, *falls gilt*
i) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x \in X, \alpha \geq 0.$
ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X.$

Beispiel 4.1.1 *Jede Norm auf X ist sublinear.*

Satz 4.1.1 *(Hahn-Banach): Sei M ein linearer Teilraum von X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in M. \tag{4.1.1}$$

Dann existiert eine lineare Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F_{|M} = f$ und

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

Beweis:
i) OBdA sei $M \neq X$; sonst wähle $F = f$. Wähle $x_1 \notin M$ und setze

$$M_1 = \{x + tx_1; x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte, dass für $x, y \in M$ wegen Linearität von f und Sublinearität von p stets gilt

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

also auch

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y), \forall x, y \in M. \tag{4.1.3}$$

Es folgt

$$\alpha :\ = \sup_{x \in M} (f(x) - p(x - x_1)) < \infty,$$

und

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1), \forall x \in M.$$

Weiter liefert (4.1.3) nach Übergang zum Supremum bezüglich $x \in M$

$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_1), \forall y \in M.$$

Definiere $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha, \forall x \in M, t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ linear, $f_{1|M} = f$, und es gilt

$$f_1(x \pm x_1) = f(x) \pm \alpha \leq p(x \pm x_1), \forall x \in M. \tag{4.1.4}$$

Nach Multiplikation von (4.1.4) mit $t > 0$ und mit $t^{-1}x$ anstelle von x erhalten wir

$$f_1(x \pm tx_1) = f(x) \pm t\alpha \leq p(x \pm tx_1), \forall x \in M, t > 0,$$

also die Bedingung (4.1.1) auf dem Raum M_1.

ii) Mit transfiniter Induktion können wir uns nun eine lineare Fortsetzung g von f auf einem maximalen linearen Unterraum N von X verschaffen. Wir benutzen dazu das **Zornsche Lemma**. (Dies ist ein zum Auswahlaxiom oder zum Wohlordnungssatz äquivalentes Axiom; vergleiche Analysis I.)

Zornsches Lemma: *Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ nicht leer, partiell geordnet, und jede linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$ besitze eine obere Schranke. Dann besitzt $\mathcal{P}$ ein maximales Element.*

Setze

$$\mathcal{P} = \{(N, g); N \subset X \text{ linear}, M \subset N, g \text{ linear}, g_{|M} = f, g \leq p \text{ auf } N\}$$

und für $(N, g), (L, h) \in \mathcal{P}$ setze

$$(N, g) \leq (L, h) :\ \Leftrightarrow N \subset L, h_{|N} = g.$$

Offenbar ist $(\mathcal{P}, \leq)$ partiell geordnet, $(M, f) \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sei $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$ linear geordnet. Setze

$$N = \bigcup_{\iota \in I} N_\iota$$

und für $x \in N$ setze

$$g(x) = g_\iota(x), \text{ falls } x \in N_\iota.$$

Beachte $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in N$.

N ist ein linearer Unterraum von X, g ist wohldefiniert und linear. Sei nämlich $x \in N_\iota \cap N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ für $\iota, \kappa \in I$; dann gilt $g_{\kappa|_{N_\iota}} = g_\iota$, also $g_\iota(x) = g_\kappa(x)$. Weiter gilt für $x \in N_\iota$, $y \in N_\kappa$ mit $N_\iota \subset N_\kappa$ auch $x, y \in N_\kappa$ und daher

$$g(x + y) = g_\kappa(x + y) = g_\kappa(x) + g_\kappa(y) = g(x) + g(y).$$

Schliesslich ist (N, g) obere Schranke für $((N_\iota, g_\iota))_{\iota \in I}$, da für jedes $\iota \in I$ gilt

$$N_\iota \subset N \text{ und } g_{|N_\iota} = g_\iota.$$

Das Zornsche Lemma liefert nun ein (bezüglich $\leq$) maximales $(N, g) \in \mathcal{P}$, wie gewünscht.

Es gilt $N = X$, sonst liefert i) ein $(N_1, g_1) \in \mathcal{P}$ mit $(N, g) < (N_1, g_1)$ im Widerspruch zur Maximalität von (N, g). Setze $F = g$. □

Sei nun X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 4.1.2 *$p\colon X \to \mathbb{R}$ heisst $\mathbb{C}$-sublinear, falls gilt*

i) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$,

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

Bemerkung 4.1.1 *Aus i), ii) folgt im kmplexen Fall zuätzlich die Bedingung*

iii) $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.

Beweis: Für $x, y \in X$ schätze ab

$$p(y) = p(x + y - x) \leq p(x) + p(y - x) \leq p(x) + p(y) + p(-x) = p(y) + 2p(x).$$

□

Satz 4.1.2 *Sei X ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum, $M \subset X$ ein $\mathbb{C}$-linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit*

$$|f(x)| \leq p(x), \forall x \in M, \tag{4.1.5}$$

für ein $\mathbb{C}$-sublineares p. Dann gibt es eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{C}$ mit $F_{|M} = f$ und

$$|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X.$$

Beweis: Betrachte $f_1 = \mathit{Re}\ f\colon M \to \mathbb{R}$. Beachte, f_1 ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt (4.1.5). Weiter gilt für $x \in M$ mit $f = f_1 + i f_2$:

$$\begin{aligned} f(ix) = i f(x) &= -f_2(x) + i f_1(x) \\ &= f_1(ix) + i f_2(ix); \end{aligned}$$

also

$$f_2(x) = -f_1(ix), \forall x \in M.$$

Sei $F_1\colon X \to \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von f_1 gemäss Satz 4.1.1 mit $F_{1|M} = f_1$ und

$$F_1(x) \leq p(x), \forall x \in X. \tag{4.1.6}$$

Setze

$$F(x) = F_1(x) - i F_1(ix), x \in M.$$

F ist $\mathbb{R}$-linear und wegen $F(ix) = iF(x)$ auch $\mathbb{C}$-linear mit $F_{|M} = f$.

Schliesslich zeigen wir, dass F auch (4.1.5) erfüllt.

Behauptung: $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$.

Beweis: Sei $x \in X$. Wähle $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F_1(\alpha x).$$

Dann folgt aus (4.1.6)

$$|F(x)| = F_1(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x),$$

wie gewünscht. □

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber stets den reellen Fall.

Satz 4.1.1 gestattet es insbesondere, stetige lineare Abbildungen auf einem Unterraum M eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||_X)$ auf ganz X zu erweitern, mit derselben Abbildungsnorm.

Satz 4.1.3 *(Dominierte Fortsetzung): Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $f\colon M \to \mathbb{R}$ linear und stetig.*

Dann gibt es $F \in L(X;\mathbb{R})$ mit $F_{|M} = f$ und

$$||F||_{L(X;\mathbb{R})} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{x \in M; ||x||_X \leq 1} |f(x)|.$$

Beweis: Definiere $p\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) = ||x||_X \cdot ||f||_{L(M;\mathbb{R})}.$$

p ist sublinear, $f \leq p$ auf M. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.1. □

4.2 Dualraum

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 4.2.1 *$X^* \colon = L(X;\mathbb{R})$ heisst* **Dualraum** *von X.*

Notation: Für $x^* \in X^*$, $x \in X$ schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}.$$

Beachte, dass gemäss Beispiel 2.1.1 der Raum X^* stets ein Banachraum ist, unabhängig davon, ob dies für X gilt.

Wie "reichhaltig" ist X^*?

Satz 4.2.1 *Zu jedem $x \in X$ gibt es $x^* \in X^*$ mit*

$$\langle x^*, x \rangle_{X^* \times X} = ||x||_X^2 = ||x^*||_{X^*}^2.$$

Beweis: Betrachte $M = \mathrm{span}\{x\}$. Setze $f(tx) = t||x||_X^2$ mit $f \in L(M;\mathbb{R})$,

$$||f||_{L(M;\mathbb{R})} = \sup_{||tx||_X \leq 1} |f(tx)| = ||x||_X.$$

Setze f zu $x^* \in L(X;\mathbb{R})$ fort. Offenbar gilt

$$||x^*||_{X^*} = ||f||_{L(M;\mathbb{R})} = ||x||_X, \ \langle x^*, x\rangle_{X^* \times X} = f(x) = ||x||_X^2.$$

□

Insbesondere erhalten wir die duale Charaketrisierung der Norm.

Satz 4.2.2 *Es gilt*
i) $||x||_X = \sup_{x^* \in X^*, ||x^*||_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x\rangle|, \forall x \in X$;
ii) $||x^*||_{X^*} = \sup_{x \in X, ||x||_X \leq 1} |\langle x^*, x\rangle|, \forall x^* \in X$.
Das Supremum in i) wird stets sogar angenommen.

Beweis: i) Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 4.2.1.
ii) Dies ist die Definition der Norm in X^*. □
Weiter kann man verschiedene Punkte $x \neq y$ in X durch ein $l \in X^*$ "trennen".

Satz 4.2.3 *Seien* $x; y \in X, x \neq y$. *Dann gibt es* $l \in X^*$ *mit* $l(x) \neq l(y)$.

Beweis: Wähle l gemäss Satz 4.2.1 zum Vektor $y - x \in X$ mit

$$l(x - y) = l(x) - l(y) = ||x - y||_X^2 > 0.$$

□

Man kann sogar Punkte von (abgeschlossenen) Unterräumen trennen.

Satz 4.2.4 *Sei* $M \subset X$ *ein abgeschlossener linearer Unterraum,* $M \neq X$, *und sei* $x_0 \notin M$ *mit*

$$d = \mathrm{dist}(x_0, M) = \inf_{x \in M} ||x_0 - x||_X > 0.$$

Dann gibt es $l \in X^*$ *mit* $l_{|_M} = 0$ *und*

$$||\, l||_{X^*} = 1, \ l(x_0) = d.$$

Beweis: Setze

$$M_0 = \{x + tx_0; \ x \in M, t \in \mathbb{R}\},$$

und definiere die lineare Abbildung $f \colon M_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x + tx_0) = td.$$

Dann gilt: $f_{|_M} = 0$, $f(x_0) = d$.
Behauptung: $||f||_{L(M_0,\mathbb{R})} = 1$.
Beweis: Für $y = x + tx_0 \in M_0$ mit $t \neq 0$ gilt

$$|f(y)| = |t|d \leq |t|||x_0 - (\frac{-x}{t})||_X = ||tx_0 + x||_X = ||y||,$$

also $||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} \leq 1$.

Umgekehrt wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $x = x_\varepsilon \in M$ mit

$$d \leq ||x_0 - x||_X < d + \varepsilon.$$

Es folgt für $y = x_0 - x \in M_0$

$$f(y) = d \geq \frac{d}{d+\varepsilon}||y||_X; \tag{4.2.1}$$

das heisst

$$||f||_{L(M_0;\mathbb{R})} = \sup_{0 \neq y \in M_0} \frac{|f(y)|}{||y||_X} \geq \frac{d}{d+\varepsilon}.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Wähle $l = F$, die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.3. □

Bemerkung 4.2.1 *Aus* (4.2.1) *folgt sogar für jedes $f \in X^*$ mit $f_{|_M} = 0$ und $|f(x_0)| \geq d$ die Abschätzung $||f||_{X^*} \geq 1$. Somit erfüllt das in Satz 4.2.4 konstruierte l die Bedingung*

$$d = \operatorname{dist}(x_0, M) = l(x_0) = \sup_{\substack{f_{|_M}=0 \\ ||f||_{X^*} \leq 1}} |f(x_0)|;$$

das heisst, das Supremum wird für $f = l$ angenommen.

Sei $A \subset X$.

Definition 4.2.2 *Der* **Annihilator** *von A ist die Menge*

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f_{|_A} = 0\}.$$

Bemerkung 4.2.2 *Offenbar gilt $A^\perp = \operatorname{span}(A)^\perp$, wobei $\operatorname{span}(A)$ die lineare Hülle von A ist.*

Satz 4.2.5 *Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum, $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent*

i) $x_0 \in \overline{M}$;

ii) $f(x_0) = 0,\ \forall f \in M^\perp$.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Sei $f \in M^\perp$, $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ mit $x_k \in M$. Es folgt: $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $x_0 \notin \overline{M}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l_{|_{\overline{M}}} = 0$, $l(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$.

□

Beispiel 4.2.1 *Insbesondere gilt für jeden linearen Unterraum $M \subset X$:*

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir den Dualraum eines normierten Raumes und dessen Trennungseigenschaften genauer.

4.3 Dualität im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum (über $\mathbb{R}$). Für $y \in H$ sei $l_y \in H^*$ die Abbildung

$$l_y(x) = (y, x)_H, \forall x \in H.$$

Auf diese Weise ist eine Abbildung

$$J\colon H \ni y \mapsto l_y \in H^*$$

erklärt.

Satz 4.3.1 *J ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist J linear. Weiter gilt für $y \in H$ mit Cauchy-Schwarz

$$||l_y||_{H^*} = \sup_{x\in H, ||x||_H \le 1} |l_y(x)| = \sup_{x\in H, ||x||_H \le 1} |(y,x)_H| \le ||y||_H.$$

Durch Einsetzen von $x = \frac{y}{||y||_H}$ erhält man sogar die Gleichheit der Norm. □

Tatsächlich ist J sogar ein Isomorphismus, insbesondere surjektiv.

Satz 4.3.2 *(Rieszscher Darstellungssatz) Zu jedem $l \in H^*$ gibt es genau ein $y \in H$ mit*

$$l(x) = (y, x)_H = l_y(x), \forall x \in H.$$

Beweis: Sei $\alpha = ||l||_{H^*} \ge 0$; oBdA sei $\alpha > 0$. Nach Satz 4.2.2 ii) gibt es $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H mit

$$||y_k||_H = 1,\ l(y_k) \to \alpha\ (k \to \infty).$$

Behauptung 1: $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis: Benutze die Parallelogramm-Identität

$$||x+y||_H^2 + ||x-y||_H^2 = 2(||x||_H^2 + ||y||_H^2),\ \forall x, y \in H.$$

Mit $x = y_k, y = y_l$ folgt

$$||\frac{y_k + y_l}{2}||_H^2 = 1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2,\ \forall k, l \in \mathbb{N}. \tag{4.3.1}$$

Mit Fehler $o(1) \to 0\,(k, l \to \infty)$ gilt somit

$$\begin{aligned} \alpha + o(1) = \frac{1}{2}(l(y_k) + l(y_l)) = l\left(\frac{y_k + y_l}{2}\right) &\le ||l||_{H^*} ||\frac{y_k + y_l}{2}||_H \\ &= \alpha\sqrt{1 - ||\frac{y_k - y_l}{2}||_H^2}; \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{k,l\to\infty} ||y_k - y_l||_H = 0,$$

wie gewünscht.

Da H vollständig ist, existiert

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k \in H, \ ||y||_H = 1.$$

Behauptung 2: $l = l_{\alpha y}$.

Beweis: OBdA $\alpha = 1$. Wegen Stetigkeit von l gilt

$$l(y) = \lim_{k\to\infty} l(y_k) = ||l||_{H^*} = 1 = ||y||_H^2 = l_y(y). \tag{4.3.2}$$

Sei

$$X = y^\perp = \{x \in H; \ (y,x)_H = 0\}$$

der zu $\text{span}\{y\}$ orthogonale Unterraum von H. Sei $x \in X$ mit $||x||_H = 1$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$||y + \varepsilon x||_H^2 = ||y||_H^2 + 2\varepsilon(y,x)_H + \varepsilon^2||x||_H^2 = 1 + \varepsilon^2.$$

Setze

$$y_\varepsilon = \frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

mit

$$||y_\varepsilon||_H = 1, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Da gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$l(y_\varepsilon) \le 1 = l(y) = l(y_0),$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(y_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(l(y) + \varepsilon l(x)) = l(x);$$

das heisst

$$l_{|y^\perp} = 0 = l_{y|y^\perp}.$$

Mit (4.3.2) folgt die Behauptung und der Satz. □

Bemerkung 4.3.1 *Bedingung* (4.3.1) *besagt, dass die* 1*-Kugel in* H **gleichmässig** *strikt konvex ist.*

Mittels J können wir daher den Dualraum H^* von H mit H "identifizieren".

Eine wichtige Anwendung von Satz 4.3.2 liefert der folgende Satz.

Satz 4.3.3 *(Lax-Milgram) Sei* $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ *bilinear und stetig mit*

$$|a(x,y)| \le \Lambda ||x||_H ||y||_H, \ \forall x, y \in H.$$

Mit einer Konstanten $\lambda > 0$ *gelte weiter*

$$a(x,x) \ge \lambda ||x||_H^2, \ \forall x \in H.$$

Dann gibt es eine stetige Bijektion $A \in L(H)$ *mit*

$$a(x,y) = (Ax, y)_H, \ \forall x, y \in H,$$

und es gilt

$$||A||_{L(H)} \le \Lambda, \ ||A^{-1}||_{L(H)} \le \lambda^{-1}.$$

Bemerkung 4.3.2 *Die Bilinearform a muss nicht symmetrisch sein.*

Beweis: Für alle $x \in H$ ist

$$l_x : y \mapsto a(x,y)$$

linear und

$$||l_x||_{H^*} = \sup_{y \in H, ||y||_H \leq 1} |a(x,y)| \leq \Lambda ||x||_H < \infty.$$

Nach Satz 4.3.2 existiert $Ax := J^{-1} l_x \in H$ mit

$$a(x,y) = l_x(y) = (Ax, y)_H, \ \forall y \in H.$$

Offenbar ist A linear und wegen

$$||Ax||_H = ||l_x||_{H^*} \leq \Lambda ||x||_H$$

gilt $A \in L(H)$, $||A||_{L(H)} \leq \Lambda$.

Behauptung 1: A ist injektiv.

Beweis: Für $x \in H$ gilt.

$$(Ax, x)_H = a(x,x) \geq \lambda ||x||_H^2.$$

Mit

$$(Ax, x)_H \leq ||Ax||_H ||x||_H$$

folgt

$$||Ax||_H \geq \lambda ||x||_H;$$

insbesondere erhalten wir $Ax \neq 0$, falls $x \neq 0$.

Behauptung 2: $Im(A) = A(H)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H mit

$$Ax_k \to y \ (k \to \infty).$$

Schätze ab

$$\begin{aligned} \lambda ||x_k - x_l||_H^2 &\leq a(x_k - x_l, x_k - x_l) \\ &= (Ax_k - Ax_l, x_k - x_l)_H = o(1) ||x_k - x_l||_H, \end{aligned}$$

wobei $o(1) \to 0 \, (k, l \to \infty)$. Es folgt

$$||x_k - x_l||_H \to 0 \, (k, l \to \infty).$$

Sei $x = \lim_{k \to \infty} x_k$. Da $A \in L(H)$, erhalten wir

$$Ax = \lim_{k \to \infty} Ax_k = y;$$

das heisst, $Im(A)$ ist abgeschlossen.

Behauptung 3: A ist surjektiv.

Beweis: Sei widerspruchsweise $M := Im(A) \neq H$. Wähle $x_0 \in H \setminus M$, $l \in H^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit

$$l(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0, \ l_{|_M} = 0.$$

Sei $y = J^{-1}l \neq 0$. Da $Ay \in M$, folgt mit

$$0 < \lambda ||y||_H^2 \leq a(y,y) = (Ay,y)_H = l(Ay) = 0.$$

der gewünschte Widerspruch.

Somit ist A bijektiv, und nach Satz 3.2.1 ii) (Satz von der offenen Abbildung) gilt $A^{-1} \in L(H)$.

Zur Abschätzung der Norm betrachte $x \in H$. Setze $z = A^{-1}x$ und schätze ab

$$\lambda ||z||_H^2 \leq a(z,z) = (Az,z)_H = (x,z)_H \leq ||x||_H ||z||_H;$$

also folgt

$$||A^{-1}x||_H = ||z||_H \leq \lambda^{-1}||x||, \ \forall x \in H;$$

das heisst,

$$||A^{-1}||_{L(H)} \leq \lambda^{-1}.$$

□

Als weiter Anwendung zeigen wir, dass in einem Hilbert-Raum jeder abgeschlossene lineare Unterraum komplementiert ist.

Satz 4.3.4 *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, $M \neq H$, und sei $x_0 \in H \setminus M$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $x_0 = x + y$ mit $x \in M$, $y \perp M$ und*

$$||y||_H = \inf_{x \in M} ||x_0 - x||_H = \mathrm{dist}(x_0, M) = d.$$

Beweis: Sei

$$M_0 = \{x + tx_0;\ x \in M, t \in \mathbb{R}\},$$

und sei $l \in M_0^*$ mit

$$l_{|M} = 0,\ l(x_0) = d,\ ||l||_{M_0^*} = 1.$$

Beachte, dass $(M_0, (\cdot,\cdot)_H)$ ebenfalls ein Hilbertraum ist mit Dualität J. Setze

$$y = dJ^{-1}l \in M_0 \subset H$$

mit $||y||_H = d||l||_{M_0^*} = d$ und

$$(y,x)_H = d\,l(x) = 0,\ \forall x \in M.$$

Für $x = x_0 - y$ gilt zudem

$$l(x) = l(x_0) - l(y) = d - d = 0;$$

das heisst $x \in M = \ker l \cap M_0, x_0 = x + y$.

Die Zerlegung ist eindeutig. Falls nämlich $x_0 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $x_{1,2} \in M$, $y_1, y_2 \perp M$, so folgt $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M \cap M^\perp = \{0\}$, also $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.
□

Bemerkung 4.3.3 *Insbesondere ist zu jedem abgeschlossenen linearen Unterraum $M \subset H$ der abgeschlossene Raum*

$$M^\perp = \{y \in H; (y,x)_H = 0, \forall x \in M\} = \bigcap_{x \in M} \ker l_x$$

ein topologisches Komplement.

4.4 Der Dualraum von $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$ für ein Radonmass μ auf $\mathbb{R}^n$, q der zu p konjugierte Exponent $1 < q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir formulieren den Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz 4.4.1 *$L^p(\Omega)^*$ ist isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$.*

Zum Beweis konstruieren wir eine lineare Isometrie $J\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ und zeigen anschliessend mit Hilfe der gleichmässigen Konvexität der Norm in $L^p(\Omega)$ analog zu unserem Vorgehen im Beweis von Satz 4.3.2 deren Surjektivität.

Für $g \in L^q(\Omega)$ sei $l_g \in L^p(\Omega)^*$ die lineare Abbildung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f g \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeit von l_g folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left| \int_\Omega f g \, d\mu \right| \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}. \tag{4.4.1}$$

Lemma 4.4.1 *$J\colon L^q(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^p(\Omega)^*$ ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist J linear. Weiter folgt aus (4.4.1) die Abschätzung

$$||l_g||_{L^p(\Omega)^*} = \sup_{||f||_{L^p} \leq 1} \left| \int_\Omega f g \, d\mu \right| \leq ||g||_{L^q(\Omega)};$$

das heisst, J ist stetig mit

$$||J||_{L(L^q(\Omega); L^p(\Omega)^*)} \leq 1.$$

i) Sei $1 < p < \infty$. In diesem Fall ist $q < \infty$, und es gilt $p = \frac{q}{q-1}$. Zu $g \in L^q(\Omega)$ wähle $f = g|g|^{q-2} \in L^p(\Omega)$ als Vergleichsfunktion mit $||f||_{L^p(\Omega)} = ||g||^{q-1}_{L^q(\Omega)}$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} |l_g(f)| &= \int_\Omega |g|^q \, d\mu = ||g||^q_{L^q} \leq ||l_g||_{L^{p*}} ||f||_{L^p} \\ &= ||l_g||_{L^{p*}} ||g||^{q-1}_{L^q}; \end{aligned}$$

das heisst

$$||l_g||_{L^{p*}} \geq ||g||_{L^q},$$

also

$$||l_g||_{L^{p*}} = ||g||_{L^q},$$

und

$$||J||_{L(L^q(\Omega), L^p(\Omega)^*)} = 1.$$

ii) Betrachte nun $p = 1$, $q = \infty$. Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $x \in \Omega$ Lebesguepunkt von g mit

$$|g(x)| = \lim_{r \to 0} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - \varepsilon.$$

Wähle $r > 0$ mit $r < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ und

$$\alpha : = \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g \, d\mu \right| \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Setze $f = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \chi_{B_r(x)} \in L^1(\Omega)$. Beachte

$$||f||_{L^1} = 1, \ |l_g(f)| = \alpha \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty} - 2\varepsilon.$$

Nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$||l_g||_{L^{1*}} \geq ||g||_{L^\infty}$$

und damit

$$||l_g||_{L^{1*}} = ||g||_{L^\infty},$$

wie gewünscht. □

Lemma 4.4.2 *J ist surjektiv.*

Beweis: i) Betrachte zunächst den Fall $1 < p < \infty$. Sei $l \in L^p(\Omega)^*$. Wähle eine "Maximalfolge" $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $||f_k||_{L^p} = 1$ und

$$l(f_k)_{(k \to \infty)} \to ||l||_{L^{p*}} =: \alpha.$$

Behauptung 1: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich genau gleich wie Behauptung 1 im Beweis von Satz 4.3.2 aus dem folgenden Satz 4.4.2 über die gleichmässige Konvexität von $L^p(\Omega)$. (Einen Beweis findet man zum Beispiel in **Adams**: Sobolev spaces, 2.29 Corollary.)

Satz 4.4.2 *Sei $1 < p < \infty$, und seien $u, \nu \in L^p(\Omega)$, mit $||u||_{L^p} = ||\nu||_{L^p} = 1$ und $\varepsilon : = ||u - \nu||_{L^p} > 0$.*

i) Falls $2 \leq p < \infty$, so gilt

$$||\frac{u + \nu}{2}||_{L^p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p};$$

ii) Falls $1 < p \leq 2$, so gilt mit $q = \frac{p}{p-1}$

$$||\frac{u + \nu}{2}||_{L^p} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existiert

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \in L^p(\Omega),$$

und es gilt

$$||f||_{L^p} = 1,\ l(f) = ||l||_{L^{p*}} = \alpha.$$

Setze $g = f|f|^{p-2} \in L^q(\Omega)$ mit $||g||_{L^q} = 1$.

Behauptung 2: $l = \alpha l_g = l_{\alpha g}$.

Beweis: Für $\varphi \in L^p(\Omega)$, $|\varepsilon| \ll 1$ sei

$$f_\varepsilon = \frac{f+\varepsilon\varphi}{||f+\varepsilon\varphi||_{L^p}},\ ||f_\varepsilon||_{L^p} = 1.$$

Da $l(f_\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ maximal, folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} l(f_\varepsilon) = l(\varphi) - l(f)\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f+\varepsilon\varphi||_{L^p},$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}||f+\varepsilon\varphi||_{L^p} &= \frac{1}{p}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_\Omega |f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu \\ &= \frac{1}{p}\int \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}|f+\varepsilon\varphi|^p\,d\mu = \int_\Omega \varphi f|f|^{p-2}\,d\mu = \int_\Omega \varphi g\,d\mu.\end{aligned}$$

Das heisst,

$$l(\varphi) = l(f)l_g(\varphi) = \alpha l_g(\varphi),\ \forall\varphi \in L^p(\Omega).$$

□

ii) Sei nun $p = 1$. Zur Vereinfachung nehmen wir an $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $l \in L^1(\Omega)^*$. Da $\mu(\Omega) < \infty$, gilt für alle $s > 1$ die topologische Einbettung $i_s\colon L^s(\Omega) \to L^1(\Omega)$ mit

$$||i_s||_{L(L^s,L^1)} \le (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{s}} \underset{(s\to 1)}{\to} 1,$$

also auch $l = l \circ i_s \in L^s(\Omega)^*$ mit

$$||l||_{L^s(\Omega)^*} \underset{(s\to 1)}{\to} ||l||_{L^1(\Omega)^*}.$$

Nach i) besitzt l als Element von $L^s(\Omega)^*$ eine Darstellung $l = l_g$ mit $g = g_r \in L^r(\Omega), \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$; insbesondere gilt

$$l(\varphi) = l_{g_r}(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_r\,d\mu,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Es folgt für $1 < s < s'$ und zugehörige $1 < r' < r < \infty$

$$\int_\Omega \varphi g_r\,d\mu = l(\varphi) = \int_\Omega \varphi g_{r'}\,d\mu,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega);$$

insbesondere

$$\int_\Omega (g_r - g_{r'})\varphi\,d\mu = 0,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit Satz 3.4.3 erhalten wir $g_r = g_{r'} =: g \in \bigcap_{r<\infty} L^r(\Omega)$ mit

$$||g||_{L^r} = ||g_r||_{L^r} = ||l_{g_r}||_{L^{s*}} = ||l||_{L^{s*}}$$

für alle $s > 1$ und zugehörige r, wobei $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Mit $s \downarrow 1$ folgt $r \uparrow \infty$ und

$$\lim_{r\to\infty} ||g||_{L^r} = \lim_{s\to 1} ||l||_{L^{s*}} = ||l||_{L^{1*}};$$

das heisst, $g \in L^\infty(\Omega)$, und $l = l_g$. □

Bemerkung 4.4.1 *Alternativ kann man Lemma 4.4.2 mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym beweisen.*

Bemerkung 4.4.2 $L^1(\Omega) \neq L^\infty(\Omega)^*$, *wie das folgende Beispiel zeigt.*

Beispiel 4.4.1 *Sei* $x_0 \in \Omega$, *und sei* $\delta_{x_0}: C^0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ *das Dirac-Funktional*

$$\delta_{x_0}(f) = f(x_0),\ \forall f \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Sei l *eine Fortsetzung von* δ_{x_0} *auf* $L^\infty(\Omega)$ *gemäss Satz 4.1.1 (Hahn-Banach). Dann gilt* $l \neq l_g, \forall g \in L^1(\Omega)$.

Beweis: Nimm an, $l = l_g$. OBdA sei $x_0 = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$. Fixiere $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi \equiv 1 \text{ auf } B_{1/2}(0).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx) \in C_0^\infty(B_1(0)) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \overset{(k\to\infty)}{\to} 0$ μ-fast überall. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$1 = \delta_{x_0}(\varphi_k) = l(\varphi_k) = l_g(\varphi_k) = \int_\Omega g\varphi_k\,dx \to 0\ (k \to \infty).$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. □

4.5 Trennungssätze für konvexe Mengen, Extremalpunkte

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz 4.5.1 *(Trennungssatz): Seien* $A, B \subset X$ *nicht leer, disjunkt und konvex. Dann gilt:*

i) Falls A *offen ist, so gibt es* $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit*

$$l(a) < \lambda \leq l(b),\ \forall a \in A, b \in B.$$

ii) Ist A *kompakt und* B *abgeschlossen, so gibt es* $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\sup_{a\in A} l(a) < \lambda < \inf_{b\in B} l(b).$$

Bemerkung 4.5.1 *Gemäss Satz 4.5.1 kann man disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene $H = \{x \in X;\ l(x) = \lambda\}$ trennen.*

Beweis von Satz 4.5.1 i) Fixiere $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Setze $x_0 = b_0 - a_0$, $C = A - B + x_0$. Dann ist C konvex, offen und nicht leer mit $0 \in C$. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt weiter $x_0 \notin C$. Sei $p\colon X \to \mathbb{R}$ das **Minkowski-Funktional** mit

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda C\}.$$

Die Funktion p ist sublinear (Übung), und mit der Konstanten $M = 2R^{-1}$, wobei $R > 0$ mit $B_R(0) \subset C$ gewählt ist, folgt

$$p(x) \le M||x||_X,\ \forall x \in X.$$

Da C offen, gilt $C = \{x;\ p(x) < 1\}$. Weiter erhalten wir aus $x_0 \notin C$, dass

$$p(x_0) \ge 1.$$

Definiere $f\colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Beachte

$$f(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0),\ \forall t \ge 0,$$
$$f(tx_0) = t < 0 \le p(tx_0),\ \forall t < 0.$$

Sei l die Fortsetzung von f gemäss Satz 4.1.1 mit

$$l(tx_0) = t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ l(x) \le p(x),\ \forall x \in X.$$

Für alle $x \in X$ gilt dann

$$|l(x)| = \max\{l(x), l(-x)\} \le \max\{p(x), p(-x)\} \le M||x||_X;$$

also $l \in X^*$. Weiter gilt für $a \in A$, $b \in B$

$$l(a) - l(b) = l(a - b + x_0) - l(x_0) < 0,$$

da $l(x_0) = 1$ und da $l(x) \le p(x) < 1$ für $x = a - b + x_0 \in C$.

ii) Mit der folgenden Beobachtung lässt sich ii) auf i) zurückführen.

Behauptung 1: Seien A, B wie in ii). Dann gibt es $r > 0$ mit $U_r(A) \cap B = \emptyset$, wobei

$$U_r(A) = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

offen, konvex und nicht leer.

Beweis: Offenbar ist $U_r(A)$ für jedes $r > 0$ offen, konvex und nicht leer, da $A \ne \emptyset$. Nimm an, für $r_k \downarrow 0$ gibt es $a_k \in A$, $b_k \in B_{r_k}(a_k) \cap B$, $k \in \mathbb{N}$. Da A kompakt, konvergiert eine Teilfolge $a_k \to a\,(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$, wobei $a \in A$. Da B abgeschlossen, und

$$||b_k - a||_X \le ||b_k - a_k||_X + ||a_k - a||_X \le r_k + ||a_k - a||_X \overset{(k\to\infty)}{\to} 0,$$

folgt andererseits $a = \lim_{k\to\infty} b_k \in B$; also $A \cap B \ne 0$, und die Behauptung folgt.

Wähle nun $r > 0$ wie in Behauptung 1, $l \in X^*$ gemäss i) zu $A' = U_r(A)$ und B. Es folgt

$$\max_{a \in A} l(a) < \sup_{x \in U_r(A)} l(x) \leq \inf_{b \in B} l(b),$$

wie gewünscht. □

Sei $K \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $M \subset K$.

Definition 4.5.1 *i) M heisst* **extremale Teilmenge von** K *, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in K$ und $0 < \alpha < 1$ gilt*

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M \Rightarrow x_0, x_1 \in M.$$

ii) Falls $M = \{x\}$ extremale Teilmenge ist, so heisst x ein **extremaler Punkt von** K *.*

Beispiel 4.5.1 *i) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $||\cdot||_X$ die euklidische Norm, K die Vollkugel $K = B_1(0) = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist jeder Randpunkt von K extremal.*

ii) Sei $X = \mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm

$$||(x,y)||_X = \max\{|x|, |y|\},$$

und sei K die Menge

$$K = B_1(0) = \{(x,y);\ -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Dann sind die Seiten von K extremal, zum Beispiel

$$F = \{(x,1); -1 \leq x \leq 1\}.$$

Die Extremalpunkte von K sind genau die Punkte $(\pm 1, \pm 1)$.

Lemma 4.5.1 *Sei $M \subset K$ extremale Teilmenge von K, $L \subset M$ extremale Teilmenge von M. Dann ist L extremale Teilmenge von K.*

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in L.$$

Da $L \subset M$, gehört x_α zu M; da weiter M extremal in K ist, folgt $x_0, x_1 \in M$. Da schliesslich L extremal in M, liegen x_0 und x_1 sogar in L; also ist L extremal in K. □

Lemma 4.5.2 *Sei $K \subset X$ kompakt, $l \in X^*$, $\lambda = \min_{x \in K} l(x)$. Dann ist*

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}$$

extremale Teilmenge von K.

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$ und

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in K_\lambda;$$

das heisst,

$$l(x_\alpha) = \alpha l(x_1) + (1-\alpha)l(x_0) = \lambda.$$

Da $l(x_0) \geq \lambda$, $l(x_1) \geq \lambda$, folgt $l(x_0) = \lambda = l(x_1)$; also $x_0, x_1 \in K_\lambda$. □

Satz 4.5.2 *(Krein-Milman): Sei $K \subset X$ nicht leer, kompakt und konvex. Dann besitzt K einen extremalen Punkt.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ die Familie

$$\mathcal{M} = \{M \subset K;\ \emptyset \neq M \text{ kompakt, extremal in } K\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$L \leq M \Leftrightarrow M \subset L,\ \forall L, M \in \mathcal{M}.$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas.

Offenbar gilt $K \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ linear geordnete Teilmenge in $\mathcal{M}$. Setze $M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$. M ist kompakt und nicht leer.

Behauptung 1: $M \in \mathcal{M}, M \subset M_\iota,\ \forall \iota \in I$.

Beweis: Seien $x_0, x_1 \in K$, $0 < \alpha < 1$, und es gelte

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \in M = \bigcap_{\iota \in I} M_\iota.$$

Dann gilt $x_\alpha \in M_\iota$ für beliebiges $\iota \in I$. Da M_ι extremal in K, folgt $x_0, x_1 \in M_\iota$ für alle ι; das heisst, $x_0, x_1 \in M$. □

Gemäss dem Zornschen Lemma gibt es ein minimales Element $M \in \mathcal{M}$. Sei $x \in M$.

Behauptung 2: $M = \{x\}$.

Beweis: Falls M ein weiteres Element $y \neq x$ enthält, wähle $l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$ gemäss Satz 4.2.3. Setze $\lambda = \min_{m \in M} l(m)$. Gemäss Lemma 4.5.2 ist

$$M_\lambda = \{m \in M; l(m) = \lambda\} \subset M$$

extremal in M, nach Lemma 4.5.1 also auch in K. Weiter gilt $M_\lambda \neq \emptyset$, und M_λ ist kompakt, also $M_\lambda \in \mathcal{M}$. Schliesslich gilt $M_\lambda \subset M$, jedoch $M_\lambda \neq M$, da wegen $l(x) \neq l(y)$ entweder $x \notin M_\lambda$ oder $y \notin M_\lambda$, im Widerspruch zur Minimalität von M. □

Definition 4.5.2 *Für $A \subset X$ sei*

$$\overline{\text{conv}}(A) = \bigcap_{A \subset B;\ B \text{ konvex und abgeschlossen}} B$$

die abgeschlossene **konvexe Hülle** *von A.*

Satz 4.5.3 *(Krein-Milman): Sei K kompakt und konvex, $E \subset K$ die Menge der Extremalpunkte von K. Dann gilt $K = \overline{\text{conv}}(E)$.*

Beweis: (indirekt). Sei $x_0 \in K \setminus \overline{\text{conv}}(E)$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 ii) mit $A = \{x_0\}, B = \overline{\text{conv}}(E)$ und

$$\inf_{x \in \overline{\text{conv}}(E)} l(x) > l(x_0) \geq \min_{x \in K} l(x) = \lambda. \tag{4.5.1}$$

Setze

$$K_\lambda = \{x \in K;\ l(x) = \lambda\}.$$

Da $K \neq \emptyset$, folgt $K_\lambda \neq \emptyset$, und K_λ ist kompakt und konvex. Nach Satz 4.5.2 besitzt K_λ einen extremalen Punkt y_0. Dieser ist gemäss Lemma 4.5.1 und 4.5.2 extremal auch in K; also $y_0 \in E \subset \overline{\text{conv}}(E)$, im Widerspruch zu (4.5.1). □

4.6 Schwache Konvergenz und Konvexität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$.

Definition 4.6.1 *Die Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach gegen** x, *oder* $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$, *falls für alle* $l \in X^*$ *gilt:*

$$l(x_k) \to l(x) \ (k \to \infty).$$

Bemerkung 4.6.1 *i) Der schwache Limes* x *ist eindeutig bestimmt wegen Satz 4.2.3. Wir schreiben daher* $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$.

ii) Falls $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, *so auch* $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$.

Satz 4.6.1 *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *mit* $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$. *Dann ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt. Weiter gilt*

$$||x||_X \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

Beweis: Die Abbildungen $A_k \in L(X^*)$ mit

$$A_k(l) = l(x_k), \ l \in X^*, \ k \in \mathbb{N}$$

sind punktweise beschränkt. Da X^* vollständig ist, folgt mit Satz 4.2.2 und Satz 3.1.1 die gleichmässige Beschränkheit der Normen

$$||A_k||_{L(X^*)} = \sup_{l\in X^*,\ ||l||_{X^*}\leq 1} |l(x_k)| = ||x_k||_X \leq C < \infty.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.2 mit

$$||l||_{X^*} = 1, \ l(x) = ||x||_X.$$

Es folgt

$$||x||_X = l(x) = \liminf_{k\to\infty} l(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||_X.$$

□

Bemerkung 4.6.2 *i) Die von den Mengen*

$$\Omega_{l,U} = l^{-1}(U), \ l \in X^*, \ U \subset \mathbb{R} \text{ offen}$$

induzierte Topologie heisst **schwache Topologie** τ_w *auf* X. *Offenbar ist die schwache Konvergenz die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie.*

ii) Die schwache Topologie ist im Allgemeinen nicht metrisierbar; das heisst, sie wird von keiner Metrik auf X *induziert. Man muss daher zum Beispiel zwischen den Begriffen schwach abgeschlossenen (weakly closed) und schwach Folgen-abgeschlossen (weakly sequentially closed) unterscheiden.*

iii) Da $l \in X^*$ *stetig, ist jedes* $\Omega_{l,U}$ *auch offen in der Standardtopologie* τ; *das heisst,* $\tau_w \subset \tau$.

Für $\Omega \subset X$ sei

$$\overline{\Omega}_w = w - \mathrm{clos}(\Omega) = \bigcap_{A \supset \Omega;\ A \text{ schwach abgeschlossen}} A.$$

die schwach abgeschlossene Hülle von Ω.

Bemerkung 4.6.3 *i) $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_w$.*
ii) Falls $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$ für $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$, so folgt $x \in \overline{\Omega}_w$.

Beweis: i) Nach Bemerkung 4.6.2 iii) gilt $\tau_w \subset \tau$, eine schwach abgeschlossene Menge ist somit auch (stark) abgeschlossen. Es folgt

$$\overline{\Omega}_w = \bigcap_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ schwach abgeschlossen}}} \supset \bigcap_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ abgeschlossen}}} A = \overline{\Omega}.$$

ii) Andernfalls könnte man x durch endlich viele $l_1, \ldots, l_N \in X^*$ von $\overline{\Omega}_w$ – und daher von der Folge (x_k) – trennen. □

Satz 4.6.2 *Sei $\Omega \subset X$ konvex. Dann gilt*

$$\overline{\Omega}_w = \overline{\Omega}.$$

Beweis: (indirekt). Nimm an $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_w$. Sei $x_0 \in \overline{\Omega}_w \setminus \overline{\Omega}$. Setze $A = \{x_0\}$, $B = \overline{\Omega}$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.5.1 mit

$$l(x_0) < \inf_{x \in B} l(x) \leq \inf_{x \in \Omega} l(x).$$

Es folgt $x_0 \notin \overline{\Omega}_w$ im Widerspruch zur Wahl von x_0. □

Satz 4.6.3 *Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent mit $x_k \overset{w}{\to} x$ $(k \to \infty)$. Dann gibt es eine Folge von Konvexkombinationen $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit*

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ \ 0 \leq a_{kl} \leq 1,\ \ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

und

$$y_l \to x\ (l \to \infty).$$

Beweis: Setze $K = \overline{\mathrm{conv}}(\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\})$. Nach Satz 4.6.2 gilt $K = \overline{K} = \overline{K}_w$; mit Bemerkung 4.6.3 ii) folgt $x \in K$. □

Bemerkung 4.6.4 *Die schwache Topologie τ_w und τ unterscheiden sich nur, falls $\dim X = \infty$; in diesem Fall enthält jede Menge $\Omega_{l,U}$ – also auch jede schwach offene Menge! – einen offenen affinen Unterraum. Eine Konsequenz daraus sieht man im nachstehenden Beispiel.*

Beispiel 4.6.1 *Sei* $\dim X = \infty$. *Der schwache Abschluss der Menge*

$$A = \{x \in X; ||x||_X = 1\}.$$

ist die Vollkugel

$$\overline{A}_w = B_1(0; X) = \{x \in X;\ ||x||_X \leq 1\}.$$

Beweis: "$\overline{A}_w \subset B_1(0;X)$": Nach Satz 4.6.2 gilt $\overline{A}_w \subset \overline{\operatorname{conv}(A)} = B_1(0;X)$.

"$\overline{A}_w \supset B_1(0;X)$": Sei $x \in X$ mit $||x||_X < 1$, $\Omega \in \tau_w$ eine Umgebung von x. Nach Bemerkung 4.6.4 enthält Ω einen offenen affinen Unterraum durch x; jeder derartige Raum schneidet jedoch A. Insbesondere folgt $\Omega \cap A \neq \emptyset$, und $x \in \overline{A}_w$.
□

Kapitel 5

Reflexivität, Separabilität und Schwache Kompaktheit

5.1 Reflexivität

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*.

Definition 5.1.1 *Der Raum* $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$ *heisst* **Bidualraum von** X *.*

Beispiel 5.1.1 *Für* $1 < p < \infty$ *ist* $L^p(\Omega)^{**}$ *nach Satz 4.4.1 isometrisch isomorph zu* $L^p(\Omega)$ *via die Abbildung* $L^p(\Omega) \ni g \mapsto l_g \in L^q(\Omega)^* \cong L^p(\Omega)$*, wobei* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $l_g \colon f \mapsto \int_\Omega fg\,d\mu$, $\forall f \in L^q(\Omega)$*.*

Allgemein können wir X ein kanonischer Weise in X^{**} einbetten mittels $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, wobei

$$\mathcal{I}x(l) \colon = l(x),\ \forall l \in X^*,\ x \in X. \tag{5.1.1}$$

Satz 5.1.1 $\mathcal{I}$ *ist eine lineare Isometrie.*

Beweis: Offenbar ist $\mathcal{I}$ linear. Für $x \in X$, $l \in X^*$, schätze ab

$$|\mathcal{I}x(l)| = |l(x)| \le ||l||_{X^*}||x||_X;$$

also

$$||\mathcal{I}x||_{X^{**}} \le ||x||_X,\ \forall x \in X.$$

Wählt man zu vorgegebenem $x \in X$, $x \neq 0$, ein $x^* \in X^*$ gemäss Satz 4.2.1 mit

$$\langle x^*, x\rangle_{X^* \times X} = ||x||_X^2 = ||x^*||_{X^*}^2,$$

so erhält man durch Wahl von $l = \frac{x^*}{||x^*||_{X^*}}$ mit $||l||_{X^*} = 1$ andererseits

$$||\mathcal{I}x||_{X^{**}} \ge |\mathcal{I}x(l)| = |l(x)| = ||x||_X,$$

wie gewünscht. $\square$

Definition 5.1.2 *X heisst* **reflexiv** *, falls die durch* (5.1.1) *definierte Abbildung $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$ surjektiv ist.*

Beispiel 5.1.2 *i) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind (wegen der Rangformel) reflexiv (für eine beliebige Norm).*

ii) Jeder Hilbert-Raum $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ist reflexiv.

iii) $L^p(\Omega)$ ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$.

iv) $L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beweis: ii) Sei $J\colon H \to H^*$ die in Abschnitt 4.3 konstruierte Isometrie mit

$$J(x)(y) = (x,y)_H, \ \forall y \in H. \tag{5.1.2}$$

H^* ist wiederum Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(J(x), J(y))_{H^*} = (x,y)_H, \ \forall l = J(x), \ k = J(y) \in H^*. \tag{5.1.3}$$

Sei $J^*\colon H^* \to H^{**}$ der isometrische Isomorphismus analog zu (5.1.2). Dann gilt $\mathcal{I} = J^* \circ J$, denn

$$\begin{aligned}\mathcal{I}y(J(x)) &\overset{(5.1.1)}{=} J(x)(y) \overset{(5.1.2)}{=} (x,y)_H \overset{(5.1.3)}{=} (J(x), J(y))_{H^*} = (J(y), J(x))_{H^*}\\ &\overset{(5.1.2)}{=} J^*(J(y))(J(x)), \ \forall x, y \in H.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

iv) $\mathcal{I}\colon L^1(\Omega) \ni g \mapsto lg \in (L^\infty(\Omega))^*$ ist gemäss Beispiel 4.4.1 nicht surjektiv. □

Bemerkung 5.1.1 *Falls X reflexiv ist, so ist X auch vollständig. Somit liefert $\overline{\mathcal{I}(X)} \subset X^{**}$ eine kanonische Vervollständigung für jeden normierten Raum X; vergleiche Satz 2.1.1.*

Beweis: X^{**} ist nach Beispiel 2.1.1 vollständig. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Dann ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X^{**}. Sei $z = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}x_k \in X^{**}$. Da X reflexiv, folgt $z = \mathcal{I}x$ für ein $x \in X$, und $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, da $\mathcal{I}$ isometrisch.
□

Ist $L^\infty(\Omega)$ reflexiv oder nicht? – Wir beantworten diese Frage in einem allgemeinen Kontext.

Satz 5.1.2 *i) Falls X reflexiv ist, so gilt dies auch für X^*.*

ii) Falls X^* reflexiv ist und X vollständig, so ist auch X reflexiv.

Beweis:

i) (Übung)

ii) (indirekt) Seien $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^*\colon X^* \to (X^*)^{**}$ die kanonischen Isometrien gemäss (5.1.1). Widerspruchsweise nehmen wir an $\mathcal{I}(X) \neq X^{**}$. Da X vollständig ist, ist $M := \mathcal{I}(X)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Wähle

$x^{**} \in X^{**} \setminus \mathcal{I}(X)$ und dazu $l^{**} \in (X^{**})^* = (X^*)^{**}$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l^{**}(x^{**}) = 1$, $l^{**}_{|M} = 0$. Da $\mathcal{I}^*$ surjektiv, gilt $l^{**} = \mathcal{I}^*(l)$ für ein $l \in X^*$; also

$$0 = l^{**}(\mathcal{I}x)) = \mathcal{I}^*(l)(\mathcal{I}(x)) = \mathcal{I}(x)(l) = l(x), \ \forall x \in X.$$

Es folgt $l = 0$, $\mathcal{I}(l) = l^{**} = 0$. □

Beispiel 5.1.3 $L^\infty(\Omega)$ *ist nicht reflexiv.*

Beweis: $L^1(\Omega)$ ist vollständig mit Dualraum $(L^1(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$, jedoch gemäss Beispiel 5.1.3 iv) nicht treflexiv.

Satz 5.1.3 *Sei X reflexiv, $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist auch Y reflexiv.*

Beweis: Sei $\xi \colon X^* \to Y^*$ die Einschränkungsabbildung, definiert durch

$$\xi(l)(y) = l(y), \ \forall y \in Y,$$

mit

$$||\xi(l)||_{Y^*} \leq ||l||_{X^*}, \ \forall l \in X^*.$$

Sei analog $\eta \colon Y^{**} \to X^{**}$ gegeben durch

$$\eta(y^{**})(l) = y^{**}(\xi(l)), \ \forall l \in X^*,$$

mit

$$||\eta(y^{**})||_{X^{**}} \leq ||y^{**}||_{Y^{**}} ||\xi||_{L(X^*,Y^*)} \leq ||y^{**}||_{Y^{**}}, \ \forall y^{**} \in Y^{**}.$$

Seien weiter $\mathcal{I} \colon X \to X^{**}$, $\mathcal{I}^Y \colon Y \to Y^{**}$ die kanonischen Isometrien. Nach Annahme ist $\mathcal{I}$ surjektiv.

Behauptung 1: $\mathcal{I}^{-1}(\eta(Y^{**})) \subset Y$.

Beweis: Sei $y^{**} \in Y^{**}$, und nimm an $x = \mathcal{I}^{-1}(\eta(y^{**})) \notin Y$. Wähle $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $l(x) \neq 0$, $l_{|Y} = 0$. Da $l_{|Y} = 0$, folgt $\xi(l) = 0$; also

$$0 = y^{**}(\xi(l)) = \eta(y^{**})(l) = \mathcal{I}x(l) = l(x) \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Sei nun $y^{**} \in Y^{**}$. Nach Behauptung 1 gilt $y := \mathcal{I}^{-1}(\eta(y^{**})) \in Y$. Für $f \in Y^*$ sei $l \in X^*$ eine beliebige Fortsetzung gemäss Satz 4.1.3 mit $l_{|Y} = f$; das heisst, $\xi(l) = f$. Es folgt

$$y^{**}(f) = y^{**}(\xi(l)) = \eta(y^{**})(l) = \mathcal{I}y(l) = l(y) \overset{(y \in Y)}{=} f(y) = \mathcal{I}^Y y(f)$$

für alle $f \in Y^*$; das heisst $\mathcal{I}^Y$ ist surjektiv. □

5.2 Separabilität

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.2.1 *M heisst* **separabel**, *falls es eine abzählbare Teilmenge $D \subset M$ gibt mit $\overline{D} = M$.*

Beispiel 5.2.1 *i) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, falls d die von einer Norm induzierte Metrik ist.*

ii) $C^0([0,1])$ ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel, analog gilt dies auch für $C^0(\overline{\Omega})$ für eine beliebige offene Menge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

iii) $L^p(\Omega)$ ist für $1 \leq p < \infty$ separabel.

iv) $L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Betrachte dazu die Familie $f_s = \chi_{[0,s]}, 0 < s \leq 1$ mit

$$||f_s - f_t||_{L^\infty} = ||\chi_{]s,t]}||_{L^\infty} = 1, \ \forall 0 < s < t \leq 1. \tag{5.2.1}$$

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht. Für $0 < s \leq 1$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$||f_s - g_k||_{L^\infty} < 1/2. \tag{5.2.2}$$

Wegen (5.2.1) kann (5.2.2) für festes k nur für höchstens ein $s = s(k)$ gelten. Dies liefert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \ni k \mapsto s(k) \in]0,1]$, was jedoch unmöglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.5.2 und Satz 3.5.2, Analysis III.)

Satz 5.2.1 *Sei M separabel, $A \subset M$. Dann ist A separabel (bezüglich der induzierten Metrik $d_{|_{A\times A}}$).*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in M, $a_0 \in A$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap B_{1/2l}(x_k) \neq \emptyset$$

wähle $a_{kl} \in A \cap B_{1/2l}(x_k)$, $a_{kl} = a_0$ sonst. Dann gilt

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_{1/2l}(x_k)) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/l}(a_{kl});$$

also ist $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ dicht. □

Wir verknüpfen nun Separabilität und lineare Struktur.

Satz 5.2.2 *Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

i) Ist X^* separabel, so ist X separabel.

ii) Ist X separabel und reflexiv, dann ist X^* separabel.

Beweis:

i) Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^*. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $||x_k||_X = 1$ und

$$l_k(x_k) \geq ||l_k||_{X^*} - 1/k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$M = \overline{\text{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

M ist separabel. Die Aussage i) folgt daher aus

Behauptung: $M = X$.

Beweis: (indirekt) Sei $X \neq M$, und seien $x_0 \in X \setminus M$ und dazu $l \in X^*$ gemäss Satz 4.2.4 gewählt mit

$$l(x_0) = 1,\ l_{|M} = 0.$$

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $l = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} l_k$. Es folgt

$$0 \neq ||l||_{X^*} = \lim_{k\to\infty,\ k\in\Lambda} ||l_k||_{X^*} \leq \limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} l_k(x_k),$$

jedoch gilt

$$|l_k(x_k)| = |(l_k - l)(x_k)| \leq ||l_k - l||_{X^*} ||x_k||_X \to 0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

ii) Mit X ist auch $X^{**} = \mathcal{I}(X)$ separabel. Falls nämlich $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in X, so liegt $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X^{**}. Mit i) folgt Separabilität von X^*. □

5.3 Schwache Folgenkompaktheit

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dualraum X^*, Bidualraum X^{**} und kanonischer Isometrie $\mathcal{I}\colon X \to X^{**}$. Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^*, $l \in X^*$.

Definition 5.3.1 $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert schwach*** *gegen* l, $l_k \overset{w^*}{\to} l\ (k \to \infty)$, *falls*

$$l_k(x) \underset{(k\to\infty)}{\to} l(x),\ \forall x \in X. \tag{5.3.1}$$

Somit haben wir auf X^* nun drei Konvergenzbegriffe:

i) Normkonvergenz $l_k \to l\ (k \to \infty)$;

ii) schwache Konvergenz $l_k \overset{w}{\to} l\ (k \to \infty)$ im Sinne

$$z(l_k) \underset{(k\to\infty)}{\to} z(l),\ \forall z \in X^{**} \tag{5.3.2}$$

iii) schwache* Konvergenz $l_k \overset{w^*}{\to} l\ (k \to \infty)$ im Sinne von (5.3.1), das heisst im Sinne von (5.3.2), jedoch nur für alle $z \in \mathcal{I}(X)$.

Bemerkung 5.3.1 *i) Falls X reflexiv, so sind schwache und schwache* Konvergenz äquivalent.*

ii) Im allgemeinen gilt: $l_k \underset{(k\to\infty)}{\to} l \ \Rightarrow\ l_k \underset{(k\to\infty)}{\overset{w}{\to}} l \ \Rightarrow\ l_k \underset{k\to\infty}{\overset{w^*}{\to}} l.$

iii) Die schwache Konvergenz ist Konvergenz bezüglich der von den Mengen*

$$\Omega_{x,U} = \{l \in X^*;\ l(x) \subset U\} = \mathcal{I}^{-1}(x)(U),\ \ x \in X,\ U \subset \mathbb{R}\ \textit{offen},$$

erzeugten schwachen Topologie τ_{w^*}. Offenbar gilt $\tau_{w^*} \subset \tau_w$, also ist τ_{w^*} gröber als τ_w und daher im allgemeinen nicht metrisierbar. Abgeschlossenheit, beziehungsweise Kompaktheit können daher nicht äquivalent mit dem Folgenkriterium umschrieben werden. Schwach* abgeschlossene Mengen sind analog zu Abschnitt 4.6 stets auch abgeschlossen bezüglich schwacher* Konvergenz und sind schwach abgeschlossen, sowie stark abgeschlossen.*

Nach dem *Satz von Tychonov* ist die abgeschlossene 1-Kugel in X^* stets schwach* kompakt. Für die Anwendungen, die wir unten besprechen, wird jedoch Folgenkompaktheit benötigt.

Satz 5.3.1 *(Banach-Alaoglu) Sei X separabel, $(l_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ beschränkt. Dann gibt es $l \in X^*$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Wähle Teilfolgen $\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots \supset \Lambda_j \supset \ldots \supset \Lambda$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_k(x_j) \to a_j =: l(x_j) \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda_j).$$

Behauptung 1: l lässt sich zu $l \in X^*$ erweitern.

Beweis: l ist linear auf $M = \operatorname{span}\{x_j;\ j \in \mathbb{N}\}$, und

$$|l(x)| = \lim_{k\to\infty\ k\in\Lambda} |l_k(x)| \le \limsup_{k\to\infty} ||l_k||_{X^*} ||x||_X,\ \forall x \in M.$$

Also ist l stetig fortsetzbar auf $X = \overline{M}$.

Behauptung 2: $l_k \overset{w^*}{\rightharpoonup} l \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$

Beweis: Sei $x \in X$, $x = \lim_{j\to\infty,\ j\in K} x_j$, wobei $K \subset \mathbb{N}$. Für $j, k \in \mathbb{N}$ schätze ab

$$\begin{aligned} |l_k(x) - l(x)| &\le |l_k(x - x_j)| + |l(x - x_j)| + |l_k(x_j) - l(x_j)| \\ &\le (\sup_k ||l_k||_{X^*} + ||l||_{X^*})||x - x_j||_X + |l_k(x_j) - l(x_j)|. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $k \to \infty$ für festes $j \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} |l_k(x) - l(x)| \le C||x - x_j||_X.$$

Mit $j \to \infty$ folgt $l_k(x) \to l(x)$ $(k \to \infty)$, wie gewünscht. □

Beispiel 5.3.1 *i) $X = L^1(\Omega)$ ist separabel, $X^* \cong L^\infty(\Omega)$ gemäss Satz 4.4.1. Falls $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so existiert nach Satz 5.3.1eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f_k g \, d\mu \to \int_\Omega f g \, d\mu \ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $g \in L^1(\Omega)$.

ii) $X = L^\infty([0,1])$ ist nicht separabel. Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 5.3.1 in diesem Fall nicht gilt.

Für $0 < \varepsilon \leq 1$ sei $T_\varepsilon \in X^*$ gegeben durch

$$T_\varepsilon f = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f\,dx,\ \ f \in L^\infty([0,1]).$$

Offenbar gilt

$$||T_\varepsilon||_{X^*} \leq \sup_{||f||_{L^\infty}\leq 1} |T_\varepsilon f| \leq 1,$$

jedoch ist die Menge $\{T_\varepsilon;\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ nicht schwach relativ folgenkompakt.*

Beweis: (indirekt). Nimm an, für eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und ein $T \in X^*$ gelte

$$T_{\varepsilon_k} \overset{w^*}{\rightharpoonup} T\ (k \to \infty).$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, dass gilt

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \to 0\ (k \to \infty).$$

Wähle

$$f = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \chi_{[\varepsilon_{k+1},\varepsilon_k[} \in L^\infty([0,1])$$

mit $||f||_{L^\infty} = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon_k} f &= \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{l=k}^\infty (-1)^l(\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}) \\ &= (-1)^k\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_{k+1}} f\,dx; \end{aligned}$$

das heisst,

$$|T_{\varepsilon_k} f - (-1)^k| \leq \frac{1}{\varepsilon_k}\left(\varepsilon_{k+1} + \int_0^{\varepsilon_{k+1}} |f|\,dx\right) \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Die Folge $(T_{\varepsilon_k} f)_{k\in\mathbb{N}}$ häuft sich somit bei 1 und -1, ist daher divergent. □

Die Annahme der Separabilität kann in reflexiven Räumen entfallen. Ausserdem können wir mittels $\mathcal{I}$ Konvergenzaussagen in $X^{**} = (X^*)^*$ zurückziehen und erhalten so schwache Folgenkompaktheit im ursprünglichen Raum ("schwaches Bolzano-Weierstrass Theorem").

Satz 5.3.2 *(Eberlein-Šmulyan) Sei X reflexiv, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt. Dann existiert $x \in X$ und eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit*

$$x_k \overset{w}{\rightharpoonup} x\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Beweis: Betrachte

$$Y = \overline{\mathrm{span}\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Offenbar ist Y separabel und nach Satz 5.1.3 reflexiv. Nach Satz 5.2.2 ist auch Y^* separabel. Sei $\mathcal{I}\colon Y \to Y^{**}$ die kanonische Isometrie.

Nach Satz 5.3.1 ist $(\mathcal{I}x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y^{**} = \mathcal{I}Y$ schwach* folgenkompakt; das heisst, für eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $x \in Y$ gilt

$$(\mathcal{I}x_k)(l) = l(x_k) \underset{(k\to\infty,\ k\in\Lambda)}{\to} (\mathcal{I}x)(l) = l(x),\ \forall l \in Y^*.$$

Für jedes $l \in X^*$ gehört die Einschränkung $l_{|Y}$ zu Y^*. Da weiter $x_k, x \in Y$, folgt

$$l(x_k) \to l(x)\ (k \to \infty, k \in \Lambda)$$

für alle $l \in X^*$; das heisst, $x_k \overset{w}{\to} x\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. □

Beispiel 5.3.2 *i) Satz 5.3.2 ist insbesondere anwendbar, falls X ein Hilbert-Raum ist.*

ii) Sei $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Nach Satz 4.4.1 ist $X = L^p(\Omega)$ reflexiv. Daher liefert Satz 5.3.2 eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in L^p(\Omega)$ mit $f_k \overset{w^*}{\to} f\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$; das heisst mit $q = \frac{p}{p-1}$ gilt für $k \to \infty,\ k \in \Lambda$:

$$\int_\Omega f_k g\, d\mu \to \int_\Omega fg\, d\mu,\ \forall g \in L^q(\Omega).$$

Als weitere Anwendung von Satz 5.3.2 beweisen wir das folgende Approximationstheorem.

Satz 5.3.3 *(Approximationstheorem) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen, $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es $m_0 \in M$ mit*

$$||x_0 - m_0||_X = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{m\in M} ||x_0 - m||_X.$$

Bemerkung 5.3.2 *Satz 5.3.3 ist insbesondere anwendbar, falls M ein nicht trivialer abgeschlossener linearer Unterraum von X ist; vergleiche Satz 4.2.2. Wir können m_0 als "Fusspunkt des Lotes" von x_0 auf M auffassen.*

Beweis: Sei $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine "Minimalfolge" mit

$$||x_0 - m_k||_X \to \operatorname{dist}(x_0, M)\ (k \to \infty).$$

Die Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach Satz 5.3.2 gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und ein $m_0 \in X$ mit

$$m_k \overset{w}{\to} m_0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda).$$

Da M abgeschlossen und konvex ist, ist M nach Satz 4.6.2 auch schwach abgeschlossen, somit auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz, und $m_0 \in M$. Schliesslich folgt mit Satz 4.6.1

$$||x_0 - m_0||_X \le \liminf_{k\to\infty, k\in\Lambda} ||x_0 - m_k|| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

□

5.4 Variationsrechnung

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $M \subset X$, $F\colon M \to \mathbb{R}$.

Definition 5.4.1 *Die Funktion F ist* **schwach folgen-unterhalb-stetig** *(kurz: w.s.l.s.c. oder weakly sequentially lower semi-continuous) in $x_0 \in M$, falls für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ gilt*

$$F(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} F(x_k).$$

Kürzer schreiben wir auch

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \xrightarrow{w} x_0,\ x\in M} F(x).$$

Beispiel 5.4.1 *i) Die Norm $F(x) = ||x||_X$ ist w.s.l.s.c. auf X gemäss Satz 4.6.1.*

ii) Sei $F\colon M \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, wobei $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist F auf M w.s.l.s.c.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \xrightarrow{w} x_0$. Wähle eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit

$$F(x_l) \to \liminf_{k\to\infty} F(x_k) =: \alpha_0 \ (l \to \infty,\ l \in \Lambda).$$

OBdA dürfen wir annehmen, dass $\Lambda = \mathbb{N}$.

Nach Satz 4.6.3 gibt es Konvexkombinationen

$$y_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kl} x_k,\ 0 \leq a_{kl} \leq 1,\ \sum_{k=1}^{l} a_{kl} = 1$$

mit $y_l \to x_0$ $(l \to \infty)$, und $(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset M$, da M konvex. Für beliebiges $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 4.6.2 und Bemerkung 4.6.3 die Beziehung $x_0 \in \overline{\text{conv}\{x_k;\, k \geq k_0\}}$. Für ein festes $k_0 \in \mathbb{N}$ dürfen wir daher annehmen, dass

$$a_{kl} = 0,\ \forall k \leq k_0.$$

Mit der Konvexität von F folgt

$$F(y_l) \leq \sum_{k=k_0}^{l} a_{kl} F(x_k) \leq \sup_{k\geq k_0} F(x_k),\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Nach Grenzübergang $l \to \infty$ erhalten wir

$$F(x_0) = \lim_{l\to\infty} F(y_l) \leq \sup_{k\geq k_0} F(x_k).$$

Mit $k_0 \to \infty$ folgt schliesslich

$$F(x_0) \leq \limsup_{k\to\infty} F(x_k) = \alpha_0.$$

□

Definition 5.4.2 *$F\colon M \to \mathbb{R}$ heisst* **koerziv** *auf M bezüglich $||\cdot||_X$, falls gilt*

$$F(x) \to \infty \quad (||x||_X \to \infty,\, x \in M).$$

Satz 5.4.1 *(Variationsprinzip) Sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer und schwach folgen-abgeschlossen, $F\colon M \to \mathbb{R}$ koerziv und w.s.l.s.c. Dann existiert $x_0 \in M$ mit*

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x).$$

Beweis: Betrachte eine Minimalfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$F(x_k) \to \inf_{x\in M} F(x) =: \alpha_0 \ (k \to \infty).$$

Da F koerziv, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Satz 5.3.2 besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $x_k \xrightarrow{w} x_0$ $(k \to \infty, k \in \Lambda)$.

Da M schwach folgen-abgeschlossen, folgt $x_0 \in M$, und

$$F(x_0) \le \liminf_{k\to\infty, k\in\Lambda} F(x_k) = \alpha_0,$$

da F w.s.l.s.c. □

Bemerkung 5.4.1 *Falls M konvex, F strikt konvex, so kann F höchstens eine Minimalstelle in M besitzen.*

Beweis: Seien $x_0 \neq x_1 \in M$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x) = F(x_1).$$

Für $0 < t < 1$ gilt $x_t = tx_1 + (1-t)x_0 \in M$, und mit

$$F(x_t) < tF(x_1) + (1-t)F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x)$$

erhalten wir den gewünschten Widerspruch. □

Kapitel 6

Auflösung linearer Gleichungen, Spektraltheorie

6.1 Duale Operatoren

Seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Dualraum X^*, beziehungsweise Y^*, $A\colon D_A \subset X \to Y$ linear mit $\overline{D_A} = X$.

Definition 6.1.1 *Der zu A* **duale Operator** $A^*\colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^*} = \{y^* \in Y^*;\ l_{y^*}\colon D_A \ni x \mapsto \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} \text{ ist stetig }\},$$

und für $y^* \in D_{A^*}$ ist $A^*y^* \in X^*$ die eindeutige Fortsetzung von l_{y^*} auf X.

Bemerkung 6.1.1 *i) A^* hat die Eigenschaft*

$$\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y},\ \forall x \in D_A,\ y^* \in D_{A^*}. \tag{6.1.1}$$

ii) Auch falls A nicht dicht definiert ist, kann man **formal** *zu A* **duale Operatoren** *durch* (6.1.1) *charakterisieren, jedoch sind diese dann nicht eindeutig.*

Satz 6.1.1 *Für $A \in L(X,Y)$ gilt $A^* \in L(Y^*, X^*)$, und*

$$||A||_{L(X,Y)} = ||A^*||_{L(Y^*,X^*)}.$$

Beweis: Für $y^* \in Y^*$, $x \in X$ gilt

$$|\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| \le ||y^*||_{Y^*}||A||_{L(X,Y)}||x||_X;$$

das heisst, $y^* \in D_{A^*}$, und

$$\begin{aligned}\sup_{||y^*||_{Y^*}\le 1} ||A^*y^*||_{X^*} &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle A^*y^*, x\rangle_{X^*\times X}| \\ &= \sup_{||x||_X\le 1,\ ||y^*||_{Y^*}\le 1} |\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y}| = ||A||_{L(X,Y)}\end{aligned}$$

gemäss Satz 4.2.2. □

Beispiel 6.1.1 *Seien $1 < p, q < \infty$ konjugiert mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte $X = Y = L^p(\Omega)$ mit Dualraum $X^* = Y^* = L^q(\Omega)$. Sei*

$$A = \Delta \colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega).$$

Dann gilt $D_{A^*} \supset C_0^\infty(\Omega)$, da für alle $g \in C_0^\infty(\Omega)$ die Abbildung

$$l_g(\Delta f) = \int_\Omega g \Delta f \, d\mu = \int_\Omega \Delta g f \, d\mu = l_{\Delta g}(f)$$

mit

$$|l_{\Delta g}(f)| \leq ||\Delta g||_{L^q} ||f||_{L^p}, \ \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

sich stetig auf $L^p(\Omega)$ fortsetzen lässt, und

$$A^* g = \Delta g, \ \forall g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Satz 6.1.2 *Sei $A \colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert. Dann folgt*
i) $A^* \colon D_{A^*} \subset Y^* \to X^*$ ist abgeschlossen.
ii) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Beweis: i) Betrachte $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{A^*}$ mit

$$y_k^* \to y^* \text{ in } Y^*, \ x_k^* := A^* y_k^* \to x^* \text{ in } X^* \ (k \to \infty).$$

Es folgt für alle $x \in D_A$:

$$\begin{aligned} \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} &= \lim_{k \to \infty} \langle y_k^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \lim_{k \to \infty} \langle A^* y_k^*, x \rangle_{X^* \times X} = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}. \end{aligned}$$

Also ist $y^* \in D_{A^*}$ mit $A^* y^* = x^*$; das heisst, A^* ist abgeschlossen.
ii) Sei $A \subset B$; das heisst $D_A \subset D_B$, $B_{|_{D(A)}} = A$. Sei $y^* \in D_{B^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_A \subset D_B$

$$\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = \langle y^*, Bx \rangle_{Y^* \times Y} = \langle B^* y^*, x \rangle_{X^* \times X};$$

das heisst $y^* \in D_{A^*}$, $A^* y^* = B^* y^*$.

6.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Auflösbarkeit der Gleichung

$$Ax = y \tag{6.2.1}$$

zu vorgegebenem y aufgrund der Eigenschaften von A^* entscheiden.

Satz 6.2.1 *(Banach : Closed range theorem) Seien X, Y Banach-Räume, der lineare Operator $A\colon D_A \subset X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen, mit dualem Operator A^*. Dann sind äquivalent:*

i) $im(A)$ ist abgeschlossen in Y;

ii) $im(A^*)$ ist abgeschlossen in X^*;

iii) $im(A) = \ker(A^*)^\perp = \{y \in Y;\ \langle y^*, y\rangle_{Y^*,Y} = 0,\ \forall y^* \in \ker(A^*)\}$;

iv) $im(A^*) = \ker(A)^\perp = \{x^* \in X^*;\ \langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = 0,\ \forall x \in \ker(A)\}$.

Wir beweisen nur die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iii). Der vollständige Beweis ist recht aufwendig und anspruchsvoll. So beweist Werner den Satz nur für beschränkte Operatoren; auch der Beweis von Kato gilt nur in diesem Fall. (Die von Kato durchgeführte Reduktion auf den Fall beschränkter Operatoren enthält einen Fehler.) Einen Beweis für den allgemeinen Fall findet man zum Beispiel bei Brezis.

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 6.2.1 *i) Sei $M \subset X$. Dann ist $M^\perp \subset X^*$ abgeschlossen (sogar schwach* folgenabgeschlossen).*

ii) Sei $L \subset X^*$. Dann ist $L^\perp \subset X$ abgeschlossen (sogar schwach folgenabgeschlossen).

Beweis: ii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\perp$ mit $x_k \overset{w}{\to} x \in X$ $(k \to \infty)$. Für beliebiges $x^* \in L$ erhalten wir

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = \lim_{k\to\infty} \langle x^*, x_k\rangle_{X^*\times X} = 0;$$

das heisst, $x \in L^\perp$.

i) analog. □

Beweis von Satz 6.2.1:

iii) $\Rightarrow$ i) folgt unmittelbar aus Lemma 6.2.1.

i) $\Rightarrow$ iii) Offenbar gilt $im(A) \subset \ker(A^*)^\perp$. Die umgekehrte Inklusion beweisen wir indirekt. Sei $y \in \ker(A^*)^\perp \setminus im(A)$. Da $im(A)$ nach Voraussetzung abgeschlossen, gibt es $y^* \in Y^*$ gemäss Satz 4.2.4 mit $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} \neq 0$ und $y^*_{|im(A)} = 0$. Letztere Bedingung besagt, dass

$$\langle y^*, Ax\rangle_{Y^*\times Y} = 0,\ \forall x \in D_A.$$

Es folgt $y^* \in D_{A^*}$ und $A^*y^* = 0$; also $y^* \in \ker(A^*)$. Da $y \in \ker(A^*)^\perp$, erhalten wir $\langle y^*, y\rangle_{Y^*\times Y} = 0$ und somit den gewünschten Widerspruch. □

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren $A\colon D_A \subset X \to Y$ mit abgeschlossenem Bild ist die Gleichung (6.2.1) somit zu vorgegebenem $y \in Y$ genau dann durch ein $x \in D_A$ auflösbar, wenn alle linearen Funktionale im Kern von A^* auf y verschwinden. Wir sagen dann, die Gleichung (6.2.1) **ist "normal" lösbar**.

Satz 6.2.2 *Für $A\colon D_A \subset X \to Y$ wie in Satz 6.2.1 sind äquivalent:*

i) A ist surjektiv;

ii) A^* ist injektiv, $im(A^*)$ ist abgeschlossen;

iii) $\exists c_0 > 0\, \forall y^* \in D_{A^*} : c_0 ||y^*||_{Y^*} \le ||A^* y^*||_{X^*}$.

Beweis: i) $\Leftrightarrow$ ii) folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1.

ii) $\Rightarrow$ iii) A^* ist abgeschlossener Operator $A^* \colon D_{A^*} \subset Y^* \to im(A^*)$, wobei $im(A^*)$ als abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raums ebenfalls ein Banach-Raum ist. Die Behauptung folgt somit aus Satz 3.3.2.

iii) $\Rightarrow$ ii) Offenbar ist A^* mit iii) injektiv. Sei $x_k^* = A^* y_k^*$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in $im(A^*)$ mit $x_k^* \to x^*$ $(k \to \infty)$. Wegen iii) ist dann auch $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Sei $y^* = \lim_{k\to\infty} y_k^*$. Da A^* abgeschlossen, folgt $y^* \in D_{A^*}, x^* = A^* y^*$; das heisst, $im(A^*)$ ist abgeschlossen. □

Wann ist das Bild eines Operators abgeschlossen? Eine wichtige Klasse sind die sogenannten **Fredholm Operatoren** $A = id - T$ auf einem Banach-Raum X, wobei T kompakt.

Definition 6.2.1 *Ein Operator $T \in L(X)$ heisst* **kompakt**, *falls $\overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt ist.*

Lemma 6.2.2 *Sei $T \in L(X)$ kompakt. Falls $x_k \xrightarrow{w} x$ $(k \to \infty)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ $(k \to \infty)$.*

Beweis: Nach Satz 4.6.1 ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ also relativ kompakt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $y_k = Tx_k \to y$ $(k \to \infty,\ k \in \Lambda)$. Zu $l \in \mathbb{N}$ wähle $z_l \in \overline{\mathrm{conv}\{x_k;\ k \ge l,\ k \in \Lambda\}}$,

$$z_l = \sum_{k \ge l,\ k \in \Lambda} a_{kl} x_k,\ 0 \le a_{kl} \le 1,\ \sum_{k \ge l,\ k \in \Lambda} a_{kl} = 1,$$

mit

$$z_l = \sum_{k \ge l,\ k \in \Lambda} a_{kl} x_k \to x\ (l \to \infty).$$

Es folgt

$$Tz_l = \sum_{k \ge l} a_{kl} y_k \to y = Tx\ (l \to \infty).$$

Aus der Eindeutigkeit des Häufungspunkts $y = Tx$ folgt die Konvergenz der ganzen Folge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Satz 6.2.3 *Sei X ein Banach-Raum, $T \in L(X)$ kompakt. Dann ist $im\,(id - T)$ abgeschlossen.*

Beweis: Setze $M = \ker(id - T)$. Da $\overline{B_1(0;M)} = \overline{T(B_1(0,M))} \subset \overline{T(B_1(0;X))}$ kompakt, ist M endlich-dimensional nach Satz 2.1.4.

Sei $L = \overline{L}$ ein topologisches Komplement von M. Setze

$$Sx = x - Tx, x \in L.$$

Dann ist S injektiv, $im(S) = im(id - T)$.

Behauptung 1: $\exists r > 0\ \forall x \in L\colon r||x||_X \leq ||Sx||_X$.

Beweis: (indirekt) Andernfalls gibt es $x_k \in L$ mit

$$k||Sx_k||_X \leq ||x_k||_X = 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für eine geeignete Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$:

$$Sx_k = x_k - Tx_k \to 0,\ Tx_k \to x_0\ (k \to \infty,\ k \in \Lambda);$$

das heisst,

$$x_k \to x_0 \in L\ (k \to \infty;\ k \in \Lambda),$$

und $Sx_0 = 0, ||x_0||_X = 1$. Der Widerspruch ergibt die Behauptung.

Sei $y_k = Sx_k \to y\ (k \to \infty)$, $x_k \in L$. Mit Behauptung 1 folgt, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in L. Da L abgeschlossen ist, existiert $x = \lim_{k\in\mathbb{N}} x_k \in L$ mit $y = Sx$; das heisst $im(S) = im(id - T)$ ist abgeschlossen. □

Beispiel 6.2.1 *Kompakte Operatoren erhält man oft in der Form von Integraloperatoren.*

6.3 Adjungierter Operator im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit kanonischem Isomorphismus $\mathcal{I}\colon H \to H^*$, wobei

$$\langle y^*, x\rangle_{H^*\times H} = (\mathcal{I}^{-1}y^*, x)_H, \forall x \in H, y^* \in H^*. \tag{6.3.1}$$

Sei weiter $A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit dualem Operator $A^*\colon D_{A^*} \subset H^* \to H^*$.

Definition 6.3.1 *Der zu A* **adjungierte Operator** $A^T\colon D_{A^T} \subset H \to H$ *hat den Definitionsbereich*

$$D_{A^T} = \{y \in H; l_y\colon D_A \ni x \mapsto (y, Ax)_H \textit{ ist stetig }\}$$

und $A^T y = \mathcal{I}^{-1} l_y$ für alle $y \in D_{A^T}$; das heisst

$$(A^T y, x)_H = l_y(x) = (y, Ax)_H,\ \forall x \in D_A,\ y \in D_{A^T}. \tag{6.3.2}$$

Bemerkung 6.3.1 *Offenbar hängen A^T und A^* wie folgt zusammen:*

i) $y^* \in D_{A^*} \Leftrightarrow y = \mathcal{I}^{-1}y^* \in D_{A^T}$, und weiter

ii) $A^T\mathcal{I}^{-1}y^* = \mathcal{I}^{-1}(A^*y^*),\ \forall y^* \in D_{A^*}$;

das heisst,

$$A^T = \mathcal{I}^{-1} \circ A^* \circ \mathcal{I}. \tag{6.3.3}$$

Beispiel 6.3.1 *Sei $H = R^n$ mit Skalarprodukt*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

und sei $A \in L(H)$ gegeben mit

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ 1 \le i \le n;$$

das heisst, A hat die Matrixdarstellung

$$a = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(y, Ax) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = (A^T y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

mit

$$(A^T y)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i,\ 1 \le j \le n,$$

und A^T hat die Matrixdarstellung

$$a^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notation: Im weiteren schreiben wir – im Einklang mit der Lehrbuchliteratur – anstelle von A^T wieder A^*, wobei wir H und H^* implizit mittels $\mathcal{I}$ identifizieren. Die Gleichung, welche A^* auf einem Hilbert-Raum charakterisiert, ist also stets (6.3.2) – mit A^* anstelle von A^T.

Definition 6.3.2 *i) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ heisst* **symmetrisch** *, falls $A \subset A^*$, das heisst, falls $D_A \subset D_{A^*}$ und falls gilt*

$$(Ay, x)_H = (y, Ax)_H,\ \forall x, y \in D_A.$$

ii) Ein Operator $A\colon D_A \subset H \to H$ heisst **selbstadjungiert** *, falls $A = A^*$, das heisst, falls A symmetrisch ist mit $D_A = D_{A^*}$.*

Bemerkung 6.3.2 *Ein symmetrischer Operator wird auch als* **formal selbstadjungiert** *bezeichnet.*

Beispiel 6.3.2 *Sei $A \in L(H)$ symmetrisch. Dann ist A selbstadjungiert, da mit $H = D_A \subset D_{A^*} \subset H$ notwendig $D_A = D_{A^*} = H$.*

Beispiel 6.3.3 *Wir betrachten die Erweiterungen A_1, A_2, A_3 des Laplace-Operators $A_\infty\colon C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $A_\infty u = \Delta u$ für $u \in C_0^\infty(\Omega)$, auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, wobei*

$$\begin{aligned} D_{A_1} &= C^2(\overline{\Omega}), \\ D_{A_2} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 \ \textit{auf}\ \partial\Omega\}, \\ D_{A_3} &= \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n} \ \textit{auf}\ \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_\infty \subsetneq A_3 \subsetneq A_2 \subsetneq A_1$, *nach Satz 6.1.1 also*

$$A_1^* \subset A_2^* \subset A_3^* \subset A_\infty^*.$$

Weiter gilt nach partieller Integration

$$(v, A_i u)_{L^2} = \int_\Omega v \Delta u \, d\mu = \int_\Omega \Delta v \cdot u \, d\mu = (A_i v, u)_{L^2} \tag{6.3.4}$$

für alle $u, v \in D_{A_i}$, *falls* $i = 2, 3$ *oder* $i = \infty$; *das heisst,* A_2, A_3 *und* A_∞ *sind symmetrisch.*

Zudem gilt (6.3.4) *auch für* $u \in D_{A_3}$, $v \in D_{A_1}$; *das heisst,*

$$D_{A_1} \subset D_{A_3^*}, \; A_1 \subset A_3^*.$$

Somit ist $A_3^* \supset A_1 \supsetneq A_3$ *eine echte Erweiterung von* A_3.

Bemerkung 6.3.3 *Eine selbstadjungierte Erweiterung des Laplace-Operators erhalten wir im Sobolev-Raum* $H_0^1(\Omega)$, *dem Abschluss von* $C_0^\infty(\Omega)$ *bezüglich der Norm*

$$||u||_{H^1}^2 = \int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2) \, d\mu, \; u \in C_0^\infty(\Omega).$$

6.4 Spektrum und Resolvente

Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$, $A \colon D_A \subset X \to X$ linear.

Definition 6.4.1 *Die* **Resolventenmenge** *von* A *ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\; (\lambda \cdot id - A) \colon D_A \to X \text{ ist bijektiv mit } (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)\}.$$

Bemerkung 6.4.1 *i) Falls* $\rho(A) \neq \emptyset$, *so ist* A *abgeschlossen.*

ii) Ist A *abgeschlossen,* $\lambda \cdot id - A$ *bijektiv, so folgt* $\lambda \in \rho(A)$, *da* $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$ *gemäss Satz 3.3.2.*

Beweis: i) Sei $\lambda \in \rho(A)$, also $(\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X)$. Dann ist $(\lambda \cdot id - A)^{-1}$ abgeschlossen; das heisst, die Menge

$$M = \{(x, y) \in X \times X;\; x = (\lambda \cdot id - A)^{-1} y, \, y \in X\}$$

ist abgeschlossen. Jedoch gilt offenbar

$$M = \Gamma_{(\lambda \cdot id - A)} = \{(x, \lambda x - Ax);\; x \in D_A\},$$

und die Abgeschlossenheit von M impliziert diejenige von A. □

Definition 6.4.2 *Die* **Resolvente** *von* A *ist die Abbildung* $R \colon \rho(A) \to L(X)$ *mit*

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R_\lambda = (\lambda \cdot id - A)^{-1} \in L(X).$$

Satz 6.4.1 *Falls* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*, so gilt:*

i) $R_\lambda A \subset AR_\lambda = \lambda R_\lambda - id \in L(X)$*;*

ii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$*;*

iii) $R_\lambda \cdot R_\mu = R_\mu \cdot R_\lambda$*.*

Beweis: i) Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$x = (\lambda \cdot id - A) R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - AR_\lambda x, \ \forall x \in X,$$

beziehungsweise

$$x = R_\lambda(\lambda \cdot id - A)x = \lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax, \forall x \in D_A,$$

also $R_\lambda Ax = AR_\lambda x, \ \forall x \in D_A$; das heisst,

$$R_\lambda A \subset AR_\lambda.$$

ii) Schreibe

$$\begin{aligned} R_\lambda &= R_\lambda \cdot id = R_\lambda(\mu \cdot id - A) R_\mu \\ &= R_\lambda((\mu - \lambda) \cdot id + (\lambda \cdot id - A)) R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu + R_\lambda(\lambda \cdot id - A) R_\mu \end{aligned}$$

und beachte, dass $R_\lambda(\lambda \cdot id - A) = id$ auf $D_A = im(R_\mu)$.

iii) folgt unmittelbar aus ii). □

Bemerkung 6.4.2 *Mit Satz 6.4.1 ii) folgt, dass* R *auf* $\rho(A)$ *komplex differenzierbar ist mit* $\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2$*.*

Definition 6.4.3 *Das* **Spektrum** *von* A *ist die Menge* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$*. Insbesondere enthält* $\sigma(A)$ *die Menge*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda \cdot id - A \textit{ nicht injektiv}\}$$

der **Eigenwerte** *von* A *mit* **Eigenraum**

$$\ker(\lambda \cdot id - A) = \{x \in D_A; \ Ax = \lambda x\} \neq \{0\}.$$

$\sigma_p(A)$ *heisst das* **Punktspektrum** *von* A*.*

Beispiel 6.4.1 *Sei* $X = \mathbb{C}^n$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Wegen der Rangformel sind äquivalent:*

i) $\lambda \cdot id - A$ *ist injektiv,*

ii) $\lambda \cdot id - A$ *ist surjektiv;*

das heisst $\sigma(A) = \sigma_p(A)$*. Nach Darstellung von* A *durch eine quadratische Matrix gilt überdies die Äquivalenz von i), ii) zu*

iii) $\det(\lambda \cdot id - A) \neq 0$.

Somit enthält $\sigma_p(A)$ *höchstens* n *Punkte, und* $\rho(A)$ *ist nicht leer und liegt sogar dicht in* $\mathbb{C}$*.*

Analog gilt für einen kompakten, selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ die Äquivalenz von i) und ii) gemäss Satz 6.2.1 und Satz 6.2.3; vergleiche dazu den Satz von Riesz-Schander.

Beispiel 6.4.2 *Für den Shift-Operator* $S\colon l^2 \to l^2$ *mit*

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

gilt $0 \in \sigma(S)$, $0 \notin \sigma_p(S)$.

Beweis: S ist nicht surjektiv, offenbar aber injektiv.

Satz 6.4.2 *Sei* $A \in L(X)$. *Dann ist* $\rho(A) \neq \emptyset \neq \sigma(A)$, *und es gilt:*

i) $|z| > r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z \in \rho(A)$;

ii) $r_A = \sup_{z\in\sigma(A)} |z|$.

Beweis: i) Sei $|z| > r_A$. Setze $\tilde{A} = z^{-1}A \in L(X)$ mit $r_{\tilde{A}} < 1$. Aus Satz 2.2.7 folgt Invertierbarkeit von $id - \tilde{A}$ und

$$\begin{aligned} R_z = (z - A)^{-1} = z^{-1}(id - \tilde{A})^{-1} &= z^{-1} \sum_{n\geq 0} \tilde{A}^n \\ &= z^{-1} \cdot id + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \ldots \in L(X). \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

ii) Mit i) folgt zunächst $r_A \geq \sup_{z\in\sigma(A)\cup\{0\}} |z| =: \sigma_0$.

Behauptung 1: $r_A \leq \sigma_0$.

Beweis: Für $|z| > r_A$ entwickle R_z gemäss (6.4.1). Gliedweise Integration über $\partial B_r(0) \subset \mathbb{C}$, $r > r_A$, liefert

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n (z - A)^{-1}\, dz, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.4.2}$$

Offenbar ist (6.4.2) äquivalent zu

$$l(A^n x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} z^n\, l(R_z x)\, dz, \ \forall n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, l \in X^*. \tag{6.4.3}$$

Mit Bemerkung 6.4.2 folgt, dass die Abbildung

$$\rho(A) \ni z \mapsto l(R_z x) \in \mathbb{C} \tag{6.4.4}$$

für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ holomorph ist; somit gilt (6.4.3), also auch (6.4.2), für jedes $r > \sigma_0$.

Für $r > \sigma_0$ setze

$$M(r) = \max\{||R_z||_{L(X)};\ |z| = r\}.$$

Aus (6.4.2) folgt mit der Minkowski Ungleichung

$$||A^n||_{L(X)} \leq r^{n+1} M(r),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

also
$$r_A = \lim_{n\to\infty} ||A^n||_{L(X)}^{\frac{1}{n}} \le r.$$
Da $r > \sigma_0$ beliebig war, folgt $r_A \le \sigma_0$. □

Behauptung 2: $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Beweis: (indirekt) Nimm an, $\sigma(A) = \emptyset$, $\rho(A) = \mathbb{C}$. Wegen Bemerkung 6.4.2 ist dann die Funktion
$$f(z) = l(R_z x),\ z \in \mathbb{C}$$
für jedes $x \in X$, $l \in X^*$ analytisch, und (6.4.1) ergibt
$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \le C \cdot \lim_{|z|\to\infty} |z|^{-1} ||(1 - z^{-1}A)^{-1}||_{L(X)} = 0.$$
Mit dem Satz von Liouville folgt $f(z) = 0$, $\forall z$. Da l und x beliebig gewählt waren, erhalten wir $R_z = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ im Widerspruch zu der Gleichung
$$(z - A)R_z x = x,\ \forall x \in X,\ z \in \rho(A).$$
□

Satz 6.4.3 *Sei $A\colon D_A \subset X \to X$, $z_0 \in \rho(A)$. Dann enthält $\rho(A)$ die offene Kreisscheibe*
$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| ||(z_0 - A)^{-1}||_{L(X)} < 1\}.$$
Insbesondere ist $\rho(A)$ offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen und
$$||(z - A)^{-1}||_{L(X)} \ge \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))},\ \forall z \in \rho(A).$$

Beweis: Schreibe, mit $R_{z_0} = (z_0 - A)^{-1} \in L(X)$:
$$(z - A) = (z - z_0) + (z_0 - A) = (1 + (z - z_0)R_{z_0})(z_0 - A).$$
Falls $z \in D$, so ist $1 - (z_0 - z)R_{z_0}$ gemäss Satz 2.2.7 invertierbar mit
$$(1 + (z - z_0)R_{z_0})^{-1} = \sum_{n\ge 0} (z_0 - z)^n R_{z_0}^n,$$
also auch $(z - A)^{-1} \in L(X)$; vergleiche Satz 2.2.8. □

6.5 Spektraltheorie im Hilbertraum

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ mit hermiteschem Skalarprodukt
$$(x, y)_H = \overline{(y, x)_H},\ \forall x, y \in H,$$
$A\colon D_A \subset H \to H$ dicht definiert mit adjungiertem Operator A^*.

Welche Aussagen über das Spektrum von A kann man machen, falls A symmetrisch ist oder selbstadjungiert?

Satz 6.5.1 *Sei A symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte reell, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$, $0 \neq x \in \ker(\lambda \cdot id - A)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda ||x||_H^2 &= (Ax, x)_H = (A^* x, x)_H \\ &= (x, Ax)_H = \overline{(Ax, x)_H} = \overline{\lambda} ||x||_H^2;\end{aligned}$$

also $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Gilt dieselbe Aussage für das gesamte Spektrum? – Betrachte dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 6.5.1 *Sei $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ mit Skalarprodukt*

$$(f, g)_{L^2} = \int_0^1 f\overline{g}\, dt, \ \ f, g \in H,$$

und sei $A_\infty = i\frac{d}{dt} \colon C_0^\infty([0,1]; \mathbb{C}) \subset H \to H$. Betrachte die folgenden Erweiterungen A_k von A_∞, $k = 1, \ldots, 4$, wobei

$$\begin{aligned}D_{A_1} &= H^1([0,1]; \mathbb{C}) := \{f \in L^2;\ f \textit{ ist absolut stetig mit } f' \in L^2\}, \\ D_{A_2} &= \{f \in H^1;\ f(0) = f(1)\} \textit{ (periodische Randbedingung)}, \\ D_{A_3} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0 = f(1)\} \textit{(Dirichlet Randbedingung}, \\ D_{A_4} &= \{f \in H^1;\ f(0) = 0\}.\end{aligned}$$

Natürlich setzen wir $A_k f = if'$ für $f \in D_{A_k}$. D_{A_1} ist dann offenbar der **maximale** Definitionsbereich, und es gilt $A_\infty \underset{\neq}{\subset} A_3 \underset{\neq}{\subset} A_2 \underset{\neq}{\subset} A_1$, $A_\infty \underset{\neq}{\subset} A_4$.

Behauptung 1: $A_3 \subset A_1^* \subset A_2^* = A_2 \subset A_3^*$; das heisst, A_3 ist symmetrisch, A_2 selbstadjungiert.

Beweis: Die Aussage $A_3 \subset A_1^*$ folgt analog zu Beispiel 6.3.3. Es genügt daher, $A_2^* \subset A_2$ zu zeigen; alles weitere folgt aus Satz 6.1.1.

Sei $f \in D_{A_2^*}$. Für $g \in D_{A_2}$ erhalten wir

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = (f, A_2 g)_{L^2} = -i \int_0^1 f\overline{g}'\, dt = i \int_0^1 f'\overline{g}\, dt - i(f\overline{g})|_{t=0}^1. \tag{6.5.1}$$

Insbesondere erhalten wir wegen $C_0^\infty([0,1]) \subset D_{A_2}$:

$$\begin{aligned}||f'||_{L^2} &= \sup\{|\int_0^1 f'\overline{g}\, dt|;\ g \in C_0^\infty, ||g||_{L^2} \leq 1\} \\ &\leq \sup_{||g||_{L^2} \leq 1} (A_2^* f, g)_{L^2} = ||A_2^* f||_{L^2};\end{aligned}$$

das heisst $D_{A_2^*} \subset H^1$, und $A_2^* f = if'$.

Es folgt weiter

$$(A_2^* f, g)_{L^2} = i \int_0^1 f'\overline{g}\, dt;$$

mit (6.5.1) also

$$(f\overline{g})|_0^1 = (f(1) - f(0))\overline{g}(1) = 0, \ \forall g \in D_{A_2}.$$

Da $\overline{g}(1)$ beliebig ist, erhalten wir $f(0) = f(1)$, also $f \in D_{A_2}$. □

Behauptung 2: Es gilt

i) $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \mathbb{C}$, $\rho(A_1) = \emptyset$;

ii) $\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = 2\pi\mathbb{Z}$, $\overline{\rho(A_2)} = \mathbb{C}$;

iii) $\sigma(A_3) = \mathbb{C}$, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$, $\rho(A_3) = \emptyset$;

iv) $\sigma(A_4) = \emptyset$, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$.

Beweis: i) Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f = e^{-i\lambda t} \in \ker(\lambda - A_1) \subset D_{A_1}$.

ii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt analog, dass $f = e^{-2\pi i k t} \in D_{A_2} \cap \ker(2\pi k - A_2)$; das heisst, $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_p(A_2) \subset \sigma(A_2)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $g \in L^2$ erhält man mit der Variation-der-Konstanten-Formel die Darstellung aller Lösungen f der Gleichung

$$\left(\lambda - i\frac{d}{dt}\right) f = \lambda f - i f' = g. \tag{6.5.2}$$

Die allgemeine Lösung von (6.5.2) hat die Form

$$f(t) = a e^{-i\lambda t} + \int_0^t e^{i\lambda(s-t)} g(s)\, ds, \;\; a \in \mathbb{C}. \tag{6.5.3}$$

Falls $f \in D_{A_2}$, so ist $a \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$f(0) = a = f(1) = a e^{-i\lambda} + \int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds; \tag{6.5.4}$$

das heisst,

$$a = (1 - e^{-i\lambda})^{-1} \int_0^1 e^{i\lambda(s-1)} g(s)\, ds.$$

Es folgt $f \in L^2$ mit

$$||f||_{L^2} \leq |a| + ||g||_{L^2} \leq \left(\frac{1}{|1 - e^{-i\lambda}|} + 1\right) ||g||_{L^2}.$$

iii) Falls $A_3 f = i f' = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so folgt $f(t) = a e^{-i\lambda t}$ und $a = 0$, falls $f \in D_{A_3}$; das heisst, $\sigma_p(A_3) = \emptyset$.

Andererseits ist $\lambda \cdot id - A_3$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ surjektiv. Für $g(s) = e^{-i\lambda s}$ folgt nämlich mit (6.5.3) und (6.5.4) für jede Lösung $f \in D_{A_3}$ von (6.5.2) zunächst $a = 0$ und

$$f(t) = e^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds = t e^{-i\lambda t},$$

also $f(1) = e^{-i\lambda} \neq 0$.

iv) Wie im Falle von A_3 erhalten wir aus (6.5.3) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ die Darstellung

$$f(t) = e^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} g(s)\, ds \in D_{A_3}$$

einer Lösung von (6.5.2); das heisst, $\rho(A_4) = \mathbb{C}$. □

Symmetrische Operatoren können demnach durchaus imaginäre Spektralanteile besitzen, jedoch gilt:

Lemma 6.5.1 *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Abschätzung*

$$||(z-A)u||_H \geq |Im(z)|||u||_H, \ u \in D_A;$$

das heisst, für $z \notin \mathbb{R}$ ist $(z-A)$ stets injektiv. Falls $(z-A)$ zusätzlich surjektiv ist, so folgt $z \in \rho(A)$ und

$$||(z-A)^{-1}||_{L(H)} \leq \frac{1}{|Im(z)|}.$$

Beweis: Für $u \in D_A$ gilt wegen $A \subset A^*$

$$(u, Au)_H = (Au, u)_H = \overline{(u, Au)_H} \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für alle $u \in D_A$ die Abschätzung

$$|Im(z)|||u||_H^2 = |Im(u,(z-A)u)_H| \leq |(u,(z-A)u)_H| \leq ||u||_H||(z-A)u||_H,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 6.5.1 illustriert sehr schön den folgenden Satz, welcher die selbstadjungierten Operatoren durch ihr Spektrum charakterisiert.

Satz 6.5.2 *Sei $A \subset A^*$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) $A = A^*$;

ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;

iii) $z - A$ ist surjektiv für je ein z mit $Im(z) > 0$ und eines mit $Im(z) < 0$.

Beweis: Wir zeigen iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii).

iii) "$\Rightarrow$ ii)": Sei $z_0 - A$ surjektiv, $Im(z_0) > 0$. Mit Lemma 6.5.1 folgt $z_0 \in \rho(A)$, und Satz 6.4.3 liefert zusammen mit Lemma 6.5.1

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \mathcal{I}m(z_0)\} \subset \rho(A).$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C};\ Im(z) > 0\}$ lässt sich iterativ durch derartige Kreisscheiben überdecken. Analog erhalten wir $\{z \in \mathbb{C};\ Im(z) < 0\} \subset \rho(A)$.

ii) "$\Rightarrow$ i)": Sei $u \in D_{A^*}$. Da $\pm i \in \rho(A)$ nach Annahme, existiert $v \in D_A$ mit

$$(A^* - i)u = (A - i)v = (A^* - i)v,$$

letzteres wegen $A \subset A^*$. Es folgt $(u - v) \in \ker(A^* - i)$. Wähle nun $w \in D_A$ mit $(A + i)w = u - v$. Es folgt

$$||u - v||_H^2 = (u - v, (A + i)w)_H = ((A^* - i)(u - v), w)_H = 0;$$

das heisst, $u = v \in D_A$.

"i) $\Rightarrow$ iii)": Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Behauptung 1: $im(z - A)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $v_k = (z - A)u_k \to v$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ insbesondere symmetrisch ist, folgt mit Lemma 6.5.1 die Abschätzung

$$||u_k - u_l||_H \leq \frac{1}{|Im(z)|}||v_k - v_l|| \to 0 \ (k, l \to \infty);$$

das heisst, $u_k \to u$ $(k \to \infty)$. Da $A = A^*$ abgeschlossen ist, folgt $u \in D_A$, und $v = (z - A)u \in im(z - A)$. Der Raum $im(z - A)$ ist somit abgeschlossen.

Behauptung 2: $z - A$ ist surjektiv.

Beweis: Nach Behauptung 1 ist der Raum $M := im(z - A)$ abgeschlossen. Nimm an, $M \neq H$. Wähle $v \in M^{\perp} \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$(v, (z - A)u)_H = 0, \ \forall u \in D_A;$$

das heisst,

$$(v, Au)_H = \overline{z}(v, u)_H, \ \forall u \in D_A.$$

Die Abbildung $D_A \ni u \mapsto (v, Au)_H$ ist somit stetig, und $v \in D_{A^*} = D_A$ mit

$$Av = A^*v = \overline{z}v.$$

Mit Lemma 6.5.1 folgt jedoch

$$|Im(z)|||v||_H^2 \leq ||(\overline{z} - A)v||_H = 0,$$

und wir erhalten $v = 0$ im Widerspruch zur Wahl von v. □