

# Analysis III

Vorlesung im Sommersemester 2007

Michael Struwe

Aktualisierte Version vom 18.4.2008

# Contents

<b>1</b>	<b><math>\sigma</math>-Algebren und Masse</b>	<b>4</b>
1.1	Der abstrakte Rahmen . . . . .	4
1.2	Konstruktion von Massen . . . . .	7
1.3	Das Lebesgue-Mass . . . . .	10
1.4	Grenzen der Messbarkeit . . . . .	15
1.5	Lebesgue-Stieltjes Mass . . . . .	17
1.6	Hausdorffmass . . . . .	21
1.7	Radonmasse . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Messbare Funktionen</b>	<b>28</b>
2.1	Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	28
2.2	Die Sätze von Lusin und Egoroff . . . . .	32
2.3	Masskonvergenz . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Integration</b>	<b>36</b>
3.1	Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	36
3.2	Konvergenzsätze . . . . .	43
3.3	Absolutstetigkeit des Integrals . . . . .	46
3.4	Der Satz von Vitali . . . . .	48
3.5	Die Räume $L^p(\Omega, \mu), 1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Produktmasse, Mehrfache Integrale</b>	<b>58</b>
4.1	Der Satz von Fubini . . . . .	58
4.2	Faltung . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Differentiation von Massen</b>	<b>70</b>
5.1	Differenzierbarkeit des Lebesgue-Integrals . . . . .	70
5.2	Differentiation von Radon-Massen . . . . .	73
5.3	Differentiation absolut stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ . . . . .	78
5.4	Lebesgue-Zerlegung . . . . .	83
5.5	Der Satz von Radon-Nikodym . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>90</b>
6.1	Ein wenig Funktionalanalysis . . . . .	90
6.2	Alternativer Beweis von Satz 5.4.1 . . . . .	91
6.3	Masstheoretische Begriffe in der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	93

# Motivation

Warum benötigen wir einen feineren Massbegriff als denjenigen, den wir mit dem Jordanschen Mass bereits zur Verfügung haben? – Als “Geometer” sind wir vielleicht daran interessiert, möglichst viele Mengen auf natürliche Weise “messen” zu können. Wichtiger aber ist der “funktionalanalytische” Aspekt. Wir wollen, zum Beispiel, den Raum  $C^0([a, b])$  mit der Norm

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(t)| dt$$

zu einem vollständigen normierten Raum erweitern. Vollständigkeit wird insbesondere für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes benötigt.

Für beide Vorhaben benötigen wir ein Mass, mit dem wir auch **abzählbare** Vereinigungen messbarer Mengen messen können. Das Jordansche Mass kann dies nicht, wie das folgende Beispiel einer verallgemeinerten Cantor-Menge zeigt.

**Beispiel:** Entferne aus dem Intervall  $I^{(0)} = [0, 1]$  ein zentriertes Teilintervall der Länge  $\gamma_1$ , aus den entstehenden Teilintervallen  $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}$  jeweils ein zentriertes Teilintervall der Länge  $\gamma_2$ , u.s.w., wobei  $\gamma_k \leq 3^{-k}, k \in \mathbb{N}$ .

Sei  $G$  die Vereinigung aller Zentralintervalle,  $C = [0, 1] \setminus G$ . Dann ist  $C$  abgeschlossen, nirgends dicht und es gilt

$$\underline{\mu}(C) = 0, \quad \overline{\mu}(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \gamma_k,$$

wobei  $\underline{\mu}$ , bzw.  $\overline{\mu}$  das innere, bzw. äussere Jordansche Mass bezeichnen. Somit ist  $C$  und damit auch  $[0, 1] \setminus C$  nicht Jordan-messbar, falls für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\gamma_k < 3^{-k}$ . Mit  $C$  ist auch  $[0, 1] \setminus C$  nicht messbar; das heisst, es gibt sogar offene, nicht Jordan-messbare Teilmengen von  $\mathbb{R}$ !

**Literatur:** Die Vorlesung stützt sich hauptsächlich auf die folgenden neueren Lehrbücher zur Masstheorie:

Amann-Escher: *Analysis III*, Birkhäuser,  
Evans-Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press,  
Wheeden-Zygmund: *Measure and integral*, Dekker.

In diesen Büchern wird der klassische Stoff aus verschiedenen Richtungen und mit unterschiedlichen Zielsetzungen beleuchtet. Daneben gibt es noch eine Vielzahl weiterer Texte und Lehrbücher.

**Dank:** Ich danke den Studierenden meiner Vorlesung im Sommersemester 2002 für die aufmerksame Fehlersuche in der ersten Version dieses Skripts. Den Studierenden meiner Vorlesung im Sommersemester 2007, insbesondere Frau Sabrina Gross, möchte ich ebenfalls danken für weitere Anregungen und wertvolle Hinweise, welche in die nun vorliegende aktualisierte Fassung eingegangen sind.

# 1 $\sigma$ -Algebren und Masse

## 1.1 Der abstrakte Rahmen

Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $2^X$  die Potenzmenge von  $X$ .

**Definition 1.1.1** Eine Abbildung  $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  heisst ein **Mass** auf  $X$ , falls gilt:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- ii)  $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ , sofern  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

**Bemerkung 1.1.1** Eigenschaft ii) impliziert insbesondere die  $\sigma$ -**Subadditivität**

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

**Bemerkung 1.1.2** Weiter folgt die **Monotonie** des Masses

$$\mu(A) \leq \mu(B), \text{ falls } A \subset B.$$

**Beweis:** In ii) wähle  $A_1 = B$ ,  $A_k = \emptyset$  für  $k \geq 2$  und beachte i). □

**Bemerkung 1.1.3** Das äussere Jordansche “Mass” auf  $\mathbb{R}$  ist kein Mass gemäss dieser Definition. Betrachte dazu

$$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k; k \in \mathbb{N}\}, \quad A_k = \{q_k\}, k \in \mathbb{N},$$

mit  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  und

$$\bar{\mu}(A) = 1 \not\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

**Definition 1.1.2** (Carathéodory)  $A \subset X$  heisst  $\mu$ -**messbar**, falls für alle  $B \subset X$  gilt

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad (1.1.1)$$

**Bemerkung 1.1.4** Wegen der Subadditivität des Masses ist (1.1.1) äquivalent zur Bedingung

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad (1.1.2)$$

**Bemerkung 1.1.5** Manche Autoren bezeichnen eine  $\sigma$ -subadditive Mengenfunktion zunächst als **usseres Mass**, deren Einschränkung auf die Familie der messbaren Mengen als **Mass**.

**Definition 1.1.3** Eine Familie  $\mathcal{A} \subset 2^X$  heisst **Algebra**, falls gilt

- i)  $X \in \mathcal{A}$ ,

ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$ ,

iii)  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^m A_k \in \mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}$  heisst  $\sigma$ -Algebra, falls iii) auch für abzählbare Vereinigungen gilt.

**Bemerkung 1.1.6** Ist  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -Algebra, so gilt auch

iv)  $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .

**Beweis:** Mit ii), iii) folgt dies sofort aus der Darstellung  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \right)^c$  nach de Morgan.

**Satz 1.1.1** Sei  $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  ein Mass. Dann ist

$$\Sigma = \{A \subset X; A \text{ ist } \mu\text{-messbar}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra.

**Beweis:** i)  $X \in \Sigma$ , da für  $B \subset X$  gilt

$$\mu(B \cap X) + \mu(B \setminus X) = \mu(B) + \mu(\emptyset) = \mu(B).$$

ii) Für  $A \in \Sigma$  folgt  $A^c \in \Sigma$ , da für  $B \subset X$  gilt

$$B \cap A^c = B \setminus A, \quad B \setminus A^c = B \cap A,$$

also

$$\mu(B \cap A^c) + \mu(B \setminus A^c) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu(B).$$

iii) Seien  $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ . Mit Induktion nach  $m$  zeigen wir  $\bigcup_{k=1}^m A_k \in \Sigma$ .  
 $m = 1$ : o.k.

$m - 1 \Rightarrow m$ : Sei  $A = \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$ . Nach Induktionsannahme ist  $A$   $\mu$ -messbar. Für  $B \subset X$  gilt daher  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ . Da auch  $A_m$  bzgl.  $\mu$  messbar ist, gilt andererseits

$$\mu(B \setminus A) = \mu((B \setminus A) \cap A_m) + \mu((B \setminus A) \setminus A_m).$$

Mit  $B \cap (A \cup A_m) = (B \cap A) \cup ((B \setminus A) \cap A_m)$  folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu((B \setminus A) \cap A_m) + \mu((B \setminus A) \setminus A_m) \\ &\geq \mu(B \cap (A \cup A_m)) + \mu(B \setminus (A \cup A_m)); \end{aligned}$$

also ist  $\bigcup_{k=1}^m A_k = A \cup A_m$  nach Bemerkung 1.1.4 messbar.

iv) Seien  $A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen,  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ . OBdA sei  $A_k \cap A_l = \emptyset$  ( $k \neq l$ ). (Sonst betrachte  $\tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1, \tilde{A}_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ , etc.,

mit  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .) Da jedes  $A_l$  messbar, gilt für alle  $m$  die Identität

$$\begin{aligned} \mu(B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) &= \mu((B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) \cap A_m) + \mu((B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) \setminus A_m) \\ &= \mu(B \cap A_m) + \mu(B \cap \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k) = \dots = \sum_{k=1}^m \mu(B \cap A_k). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Mit der Monotonie von  $\mu$  (nach Bemerkung 1.1.2) und iii) folgt

$$\mu(B) = \mu(B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) + \mu(B \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k) \geq \sum_{k=1}^m \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A).$$

Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  und  $\sigma$ -Subadditivität liefern:

$$\mu(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A);$$

also ist  $A$  messbar nach Bemerkung 1.1.4. □

**Definition 1.1.4** Falls  $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  ein Mass auf  $X, \Sigma$  die  $\sigma$ -Algebra der  $\mu$ -messbaren Mengen, so heisst  $(X, \Sigma, \mu)$  ein **Massraum**.

**Satz 1.1.2** Seien  $A_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}$ . Dann gelten die folgenden Beziehungen.

- i)  $A_k \cap A_l = \emptyset (k \neq l) \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$  ( $\sigma$ -Additivität).
- ii)  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ .
- iii)  $A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ .

**Beweis:** i) Aus (1.1.3) folgt mit  $B = X$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^m \mu(A_k). \quad (1.1.4)$$

Mit Monotonie und  $\sigma$ -Subadditivität folgt

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

ii) Zerlege disjunkt  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$ , wobei  $\tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_k = A_k \setminus A_{k-1}, k \geq 2$ . Mit i) und (1.1.4) folgt:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).$$

iii) Betrachte  $\tilde{A}_k = A_1 \setminus A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\emptyset = \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \dots$ . Beachte

$$\mu(A_1) = \mu(\tilde{A}_k) + \mu(A_k), k \in \mathbb{N}.$$

Mit i) und Bemerkung 1.1.6 folgt

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A}_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\right) \\ &= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \end{aligned}$$

□

**Definition 1.1.5**  $N \subset X$  heisst  $\mu$ -Nullmenge, falls  $\mu(N) = 0$ .

**Satz 1.1.3** Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge. Dann ist  $N$  bezüglich  $\mu$  messbar.

**Beweis:** Für beliebiges  $B \subset X$  gilt

$$\mu(B \cap N) + \mu(B \setminus N) \leq \mu(N) + \mu(B) = \mu(B).$$

Die Behauptung folgt mit Bemerkung 1.1.4. □

## 1.2 Konstruktion von Massen

Sei  $X \neq \emptyset$  beliebig.

**Definition 1.2.1**  $\mathcal{K} \subset 2^X$  heisst **Überdeckungsklasse** für  $X$ , falls

i)  $\emptyset \in \mathcal{K}$ ,

ii)  $\exists (K_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}: X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ .

**Beispiel 1.2.1** Die offenen Intervalle  $I = \prod_{k=1}^n ]a_k, b_k[$  mit  $a_k \leq b_k \in \mathbb{R}$  bilden eine Überdeckungsklasse für  $X = \mathbb{R}^n$ , desgleichen die abgeschlossenen oder die halboffenen Intervalle; vergleiche Definition 1.3.1.

**Satz 1.2.1** Sei  $\mathcal{K}$  eine Überdeckungsklasse für  $X$ ,  $\lambda: \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Dann wird durch

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_j); K_j \in \mathcal{K}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right\} \quad (1.2.1)$$

ein Mass auf  $X$  definiert.

**Beweis:** Offenbar ist  $\mu$  wohldefiniert,  $\mu \geq 0$ ,  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Sei  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Zu  $\varepsilon > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$  wähle  $(K_{jk})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$  mit  $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{jk}$  und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_{jk}) < \mu(A_k) + 2^{-k} \varepsilon.$$

Da  $A$  von den abzählbar vielen Mengen  $K_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$ , überdeckt wird, folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda(K_{jk}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu$ .  $\square$

Falls  $\lambda$  aus Satz 1.2.1 bereits eine endlich additive Mengenfunktion ist auf einer Algebra  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , so stellt sich die Frage, ob das von  $\lambda$  induzierte Mass  $\mu$  eine  $\sigma$ -additive Erweiterung von  $\lambda$  definiert. Notwendig dafür ist offenbar die folgende Bedingung.

**Definition 1.2.2** Sei  $\mathcal{A} \subset 2^X$  eine Algebra.  $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  heisst ein **Prämass**, falls gilt:

i)  $\lambda(\emptyset) = 0$ ,

ii)  $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$  für jedes  $A \in \mathcal{A}$ , welches eine disjunkte Zerlegung

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ besitzt mit } A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}.$$

$\lambda$  heisst  **$\sigma$ -endlich**, falls eine  $\ddot{U}$ bersdeckung  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$  existiert mit  $S_k \in \mathcal{A}$  und  $\lambda(S_k) < \infty$  für alle  $k$ . (OBdA dürfen wir  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjunkt annehmen; verfare sonst wie im Beweis von Satz 1.1.2, Teil ii.)

**Bemerkung 1.2.1** Jede Algebra  $\mathcal{A}$  ist eine  $\ddot{U}$ berdeckungsklasse, da nach Definition stets  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .

Aus einem Prämass  $\lambda$  erhalten wir wie oben ein Mass  $\mu$ , indem wir setzen:

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{A} \right\}. \quad (1.2.2)$$

Wie im Beweis von Satz 1.1.2, Teil ii) kann man für jedes  $A$  und jede  $\ddot{U}$ berdeckung  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  stets eine verfeinerte  $\ddot{U}$ berdeckung mit disjunkten Mengen  $\tilde{A}_k \in \mathcal{A}$  finden.

**Satz 1.2.2** (Carathéodory-Hahn Erweiterungssatz) Es sei  $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämass auf  $X$ ,  $\mu$  wie in (1.2.2) erklärt. Dann gilt:

i)  $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  ist ein Mass;

ii)  $\mu(A) = \lambda(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ ;

iii) Jedes  $A \in \mathcal{A}$  ist  $\mu$ -messbar.

**Beweis:** i) Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.2.1 und Bemerkung 1.2.1.

ii) Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Offenbar gilt

$$\mu(A) \leq \lambda(A).$$

Für die Umkehrung sei  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ,  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjunkt mit  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .  
 Setze  $\tilde{A}_k = A_k \cap A \in \mathcal{A}$ . Offenbar ist  $(\tilde{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjunkt mit  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$ . Da  $\lambda$   
 Prämass, folgt

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\tilde{A}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  folgt

$$\lambda(A) \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{A} \right\} = \mu(A).$$

iii) Sei  $A \in \mathcal{A}$ , und sei  $B \subset X$  beliebig. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $B_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  
 $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Da  $A, B_k \in \mathcal{A}$ , gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$\lambda(B_k) = \lambda(B_k \cap A) + \lambda(B_k \setminus A).$$

Mit  $B \cap A \subset \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A) \right)$ ,  $B \setminus A \subset \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus A) \right)$  folgt nach Definition von  $\mu$

$$\begin{aligned} \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \setminus A) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung aus Bemerkung 1.1.4. □

**Satz 1.2.3** Sei  $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  wie in Satz 1.2.2 zusätzlich  $\sigma$ -endlich,  $\mu$  das von  
 $\lambda$  induzierte Mass,  $\Sigma$  die  $\sigma$ -Algebra der  $\mu$ -messbaren Mengen, und sei  $\tilde{\mu}: 2^X \rightarrow$   
 $[0, \infty]$  ein Mass mit  $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \lambda$ . Dann gilt  $\tilde{\mu}|_{\Sigma} = \mu$ ; das heisst, die Carathéodory-  
 Hahn Erweiterung ist eindeutig.

**Beweis:** Sei  $A \in \Sigma$ ,  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  mit  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Mit der  $\sigma$ -Subadditivität  
 von  $\tilde{\mu}$  folgt:

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

nach Übergang zum Infimum bezüglich  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  also

$$\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A).$$

Umgekehrt sei zunächst  $A \subset S \in \mathcal{A}$  mit  $\lambda(S) < \infty$ . Die vorige Rechnung liefert

$$\tilde{\mu}(S \setminus A) \leq \mu(S \setminus A),$$

da  $A \in \Sigma$ ,  $S \in \mathcal{A} \subset \Sigma$  also

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A) &\leq \mu(A) + \mu(S \setminus A) = \mu(S) \\ &= \lambda(S) = \tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A).\end{aligned}$$

Damit gilt überall Gleichheit, und  $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ .

Im Allgemeinen sei  $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ , wobei  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjunkt mit  $S_k \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda(S_k) < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Betrachte die disjunkte Zerlegung  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ,  $A_k = A \cap S_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Wie soeben gezeigt, gilt  $\tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^m A_k)$ , für alle  $m$ . Also

$$\tilde{\mu}(A) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^m A_k) = \mu(A)$$

gemäss Bemerkung 1.1.2 und Satz 1.1.2. □

### 1.3 Das Lebesgue-Mass

Das Lebesgue-Mass erhalten wir durch Erweiterung des Elementarinhalts von Quadern und Elementarfiguren.

**Definition 1.3.1** *i) Für  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  setze*

$$\begin{aligned}]a, b[ &= \prod_{k=1}^n ]a_k, b_k[, \text{ falls } a_k < b_k, 1 \leq k \leq n, \\ ]a, b[ &= \emptyset, \text{ sonst;}\end{aligned}$$

*analog definieren wir die Intervalle  $[a, b]$ ,  $]a, b]$ ,  $[a, b[$ .*

*ii) Der Elementarinhalt eines Intervalls ist*

$$\begin{aligned}\text{vol}([a, b]) &= \text{vol}(]a, b[) = \text{vol}(]a, b]) = \text{vol}([a, b]) \\ &= \prod_{k=1}^n (b_k - a_k), \text{ falls } a_k < b_k, 1 \leq k \leq n,\end{aligned}$$

*und  $\text{vol}([a, b]) = \dots = \text{vol}([a, b]) = 0$  sonst.*

*iii) Analog verfahren wir, falls  $a_k = -\infty$  oder  $b_k = +\infty$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ .*

*iv) Eine **Elementarfigur** ist die Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle  $I_1, \dots, I_m$ , mit **Elementarinhalt***

$$\text{vol}(\bigcup_{k=1}^m I_k) = \sum_{k=1}^m \text{vol}(I_k).$$

**Bemerkung 1.3.1** *Offenbar bilden die Elementarfiguren im  $\mathbb{R}^n$  eine Algebra, und  $\text{vol}$  ist endlich additiv,  $\sigma$ -endlich, nicht negativ und daher auch monoton.*

Der Elementarinhalt  $\text{vol}$  definiert sogar ein Prämass auf der Algebra der Elementarfiguren in  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 1.3.2** Falls eine Elementar-Figur  $I$  sich darstellen lässt als disjunkte Vereinigung  $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  von Elementar-Figuren  $I_k, k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\text{vol}(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k).$$

**Beweis:** Wegen  $I \supset \bigcup_{k=1}^m I_k$  und der Monotonie von  $\text{vol}$  gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\text{vol}(I) \geq \text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right) = \sum_{k=1}^m \text{vol}(I_k).$$

Mit  $m \rightarrow \infty$  folgt “ $\geq$ ”.

Umgekehrt seien oBdA  $I, I_k$  Intervalle mit  $\text{vol}(I_k) < \infty, k \in \mathbb{N}$ . Für  $L \in \mathbb{N}$  sei  $I^L = I \cap [-L, L]^n$ . Offenbar gilt

$$\text{vol}(I^L) \rightarrow \text{vol}(I) \quad (L \rightarrow \infty).$$

Zu  $\varepsilon > 0$  betrachte offene Intervalle  $\tilde{I}_k \supset I_k$  mit

$$\text{vol}(\tilde{I}_k) < \text{vol}(I_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Endlich viele Intervalle  $\tilde{I}_k, 1 \leq k \leq m = m(L)$ , überdecken den (kompakten) Abschluss von  $I^L$ , und

$$\text{vol}(I^L) \leq \text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^m \tilde{I}_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \text{vol}(\tilde{I}_k) \leq \sum_{k=1}^m \text{vol}(I_k) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) + \varepsilon.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 1.3.2** Das Lebesguesche Mass  $\mathcal{L}^n$  ist die Carathéodory-Hahn Erweiterung des Elementar-Inhalts.

**Satz 1.3.1** Jede offene Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  ist abzählbare Vereinigung disjunkter Intervalle  $I_l, l \in \mathbb{N}$ . Insbesondere sind offene Mengen  $\mathcal{L}^n$ -messbar.

**Beweis:** Unterteile  $\mathbb{R}^n$  durch sukzessiv verfeinerte achsenparallele Gitter der Maschenweite  $2^{-k}, k \in \mathbb{N}$ , in disjunkte halboffene Kuben  $I_l^k$  der Kantenlänge  $2^{-k}$ . Wähle im  $k$ -ten Schritt diejenigen Kuben  $I_l^k \subset G$  aus, die zu allen in den Schritten 1 bis  $k-1$  ausgewählten Kuben disjunkt sind. Die so erhaltene abzählbare Schar disjunkter, achsenparalleler Kuben schöpft  $G$  aus.  $\square$

**Folgerung 1.3.1** Die  $\sigma$ -Algebra der  $\mathcal{L}^n$ -messbaren Mengen umfasst die von den offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$  erzeugte Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ .

**Definition 1.3.3** Ein Mass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  heisst **Borelsch**, falls jede Borelmenge  $\mu$ -messbar ist.

Damit können wir Folgerung 1.3.1 auch so ausdrücken:  $\mathcal{L}^n$  ist ein Borel-Mass.

**Satz 1.3.2** Für alle  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{G \supset A, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(G).$$

**Beweis:** “ $\leq$ ” folgt unmittelbar aus der Monotonie, da für jedes  $G \supset A$  gilt  $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(G)$ .

“ $\geq$ ”: Zu  $\varepsilon > 0$  wähle Intervalle  $(I_l)_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $A \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l$  und

$$\sum_{l=1}^{\infty} \text{vol}(I_l) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Wähle offene Intervalle  $I_l^* \supset I_l$  mit

$$\text{vol}(I_l^*) < \text{vol}(I_l) + \varepsilon \cdot 2^{-l}, l \in \mathbb{N}.$$

Setze  $G = \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l^*$ .  $G$  ist offen,  $A \subset G$ , und

$$\mathcal{L}^n(G) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \text{vol}(I_l^*) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \text{vol}(I_l) + \varepsilon \leq \mathcal{L}^n(A) + 2\varepsilon.$$

Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert die Behauptung. □

**Definition 1.3.4** Ein Borelmass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  heisst **Borel regulär**, falls zu jedem  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Borelmenge  $B \supset A$  existiert mit  $\mu(A) = \mu(B)$ .

**Folgerung 1.3.2**  $\mathcal{L}^n$  ist Borel regulär.

**Beweis:** Zu  $A \subset \mathbb{R}^n$  wähle  $G_k \supset A, G_k$  offen gemäss Satz 1.3.2 mit

$$\mathcal{L}^n(G_k) < \mathcal{L}^n(A) + 1/k, k \in \mathbb{N}.$$

ObdA gelte  $G_1 \supset G_2 \supset \dots$  sowie  $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ , also auch  $\mathcal{L}^n(G_1) < \infty$ . Setze  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ .  $B$  ist Borelsch mit

$$\mathcal{L}^n(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(G_k) = \mathcal{L}^n(A)$$

gemäss Satz 1.1.2. □

**Satz 1.3.3** Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- i)  $A$  ist  $\mathcal{L}^n$ -messbar,
- ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset A, G$  offen :  $\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon$ .

**Beweis:** *i) ⇒ ii)* Sei zunächst  $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G \supset A, G$  offen gemäss Satz 1.3.2 mit

$$\mathcal{L}^n(G) < \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Da  $A$  bzgl.  $\mathcal{L}^n$  messbar, folgt nach Wahl von  $B = G$  im Messbarkeitskriterium, Definition 1.1.2, die Gleichung

$$\mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(G \cap A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A),$$

also

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) = \mathcal{L}^n(G) - \mathcal{L}^n(A) < \varepsilon.$$

Falls  $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ , setze  $A_k = A \cap [-k, k]^n, k \in \mathbb{N}$ , mit  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G_k \supset A_k, G_k$  offen mit

$$\mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  offen,  $G \supset A$ , und

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) < \varepsilon,$$

da

$$G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k).$$

*ii) ⇒ i)* Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G \supset A, G$  offen mit

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Da  $G$  nach Satz 1.3.1 bzgl.  $\mathcal{L}^n$  messbar, folgt für  $B \subset \mathbb{R}^n$  unter Beachtung der Beziehung  $B \setminus A \subset (B \setminus G) \cup (G \setminus A)$  mit Monotonie und Subadditivität des Masses (Bemerkung 1.1.1 und 1.1.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B) &= \mathcal{L}^n(B \cap G) + \mathcal{L}^n(B \setminus G) \\ &\geq \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \mathcal{L}^n(G \setminus A). \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  und Bemerkung 1.1.4 folgt,  $A$  ist  $\mathcal{L}^n$ -messbar.  $\square$

**Folgerung 1.3.3**  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\mathcal{L}^n$ -messbar, falls sich  $A$  gut von innen und aussen "einschachteln" lässt im Sinne:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset A \subset G, F \text{ abg.}, G \text{ offen: } \mathcal{L}^n(G \setminus A) + \mathcal{L}^n(A \setminus F) < \varepsilon. \quad (1.3.1)$$

**Beweis:** Mit  $A$  ist auch  $A^c$   $\mathcal{L}^n$ -messbar. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\Omega \supset A^c, \Omega$  offen mit

$$\mathcal{L}^n(\Omega \setminus A^c) < \varepsilon$$

gemäss Satz 1.3.3. Setze  $F = \Omega^c \subset A$ .  $F$  ist abgeschlossen mit

$$\mathcal{L}^n(A \setminus F) = \mathcal{L}^n(A \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(\Omega \setminus A^c) < \varepsilon.$$

Umgekehrt folgt aus (1.3.1) offenbar Bedingung ii) in Satz 1.3.3 und damit die Messbarkeit von  $A$ .  $\square$

Vielleicht noch handlicher ist die folgende äquivalente Umschreibung von (1.3.1).

**Folgerung 1.3.4**  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\mathcal{L}^n$ -messbar, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset A \subset G, F \text{ abg.}, G \text{ offen: } \mathcal{L}^n(G \setminus F) < \varepsilon. \quad (1.3.2)$$

**Beweis:** Wir benutzen die aus der Zerlegung  $G \setminus F = (G \setminus A) \cup (A \setminus F)$  für  $F \subset A \subset G$  folgenden Inklusionen und die Monotonie des Masses.

(1.3.1)  $\Rightarrow$  (1.3.2): Dies folgt aus  $G \setminus F \subset (G \setminus A) \cup (A \setminus F)$ .

(1.3.2)  $\Rightarrow$  (1.3.1): Beachte  $(G \setminus A) \subset G \setminus F$ , sowie  $(A \setminus F) \subset G \setminus F$ .  $\square$

Zum Abschluss vergleichen wir das Lebesgue-Mass mit dem Jordanschen "Mass", wobei nach Definition  $A \subset \mathbb{R}^n$  (uneigentlich) **Jordan-messbar** heisst, falls  $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$ , wobei

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A d\mu = \sup\{\text{vol}(E); E \subset A, E \text{ Elementarfigur}\}, \\ \overline{\mu}(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A d\mu = \inf\{\text{vol}(E); A \subset E, E \text{ Elementarfigur}\}. \end{aligned}$$

**Satz 1.3.4** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

i) Es gilt stets  $\underline{\mu}(A) \leq \mathcal{L}^n(A) \leq \overline{\mu}(A)$ .

ii) Falls  $A$  Jordan-messbar, so ist  $A$  auch  $\mathcal{L}^n$ -messbar, und  $\mathcal{L}^n(A) = \mu(A)$ .

**Beweis:** i) Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ Intervalle}\right\} \\ &\leq \inf\left\{\text{vol}(E); A \subset E = \bigcup_{k=1}^m I_k, I_k \text{ Intervalle}\right\} = \overline{\mu}(A). \end{aligned}$$

Weiter gilt für jede Elementarfigur  $E \subset A$ :

$$\text{vol}(E) = \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(A),$$

also auch

$$\underline{\mu}(A) \leq \mathcal{L}^n(A).$$

ii) Falls  $A$  Jordan-messbar so gilt  $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$ , also wegen i) auch

$$\mathcal{L}^n(A) = \mu(A).$$

Für den Beweis der Messbarkeit sei oBdA  $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  Elementarfiguren  $I_\varepsilon, I^\varepsilon$  mit  $I_\varepsilon \subset A \subset I^\varepsilon$  und

$$\text{vol}(I^\varepsilon) - \varepsilon < \mu(A) < \text{vol}(I_\varepsilon) + \varepsilon.$$

OBdA sei  $F := I_\varepsilon$  abgeschlossen,  $G := I^\varepsilon$  offen. Es folgt

$$\mathcal{L}^n(G \setminus F) = \text{vol}(I^\varepsilon \setminus I_\varepsilon) = \text{vol}(I^\varepsilon) - \text{vol}(I_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

und  $A$  ist  $\mathcal{L}^n$ -messbar nach Folgerung 1.3.4.  $\square$

**Satz 1.3.5** *Das Lebesgue-Mass ist invariant unter Bewegungen  $\Phi: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto x_0 + Rx \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $R \in O(n)$ .*

**Beweis:** *i)* Sei  $I$  ein Intervall. Dann ist  $\Phi(I)$  nach Satz 1.3.4 bzgl.  $\mathcal{L}^n$  messbar mit

$$\mathcal{L}^n(\Phi(I)) = \mu(\Phi(I)) = \mu(I) = \mathcal{L}^n(I)$$

aufgrund der Bewegungsinvarianz des Jordanschen Masses  $\mu$ .

*ii)* Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  mit disjunkten Intervallen  $I_k, k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\Phi(G)$  offen,  $\Phi(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(I_k)$  mit disjunkten  $\mathcal{L}^n$ -messbaren Mengen  $\Phi(I_k)$ , also nach i)

$$\mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) = \mathcal{L}^n(G).$$

*iii)* Für beliebige  $A, G \subset \mathbb{R}^n$  gilt:

$$A \subset G, G \text{ offen} \Leftrightarrow \Phi(A) \subset \Phi(G), \Phi(G) \text{ offen};$$

also nach Satz 1.3.2 und ii)

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(A).$$

□

## 1.4 Grenzen der Messbarkeit

Wie allgemein ist unser neuer Massbegriff? Ist vielleicht jede Menge messbar? Betrachte dazu das folgende Beispiel einer nicht  $\mathcal{L}^1$ -messbaren Menge  $\Omega \subset [0, 1]$  nach Vitali.

**Beispiel 1.4.1** (*Vitali*) Sei  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , und

$$G = \{k + l\xi; k, l \in \mathbb{Z}\}$$

die von 1 und  $\xi$  erzeugte additive Gruppe  $G \subset \mathbb{R}$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}$  setze

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in G.$$

Offenbar definiert  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$ . Es sei

$$X = \{[x] = x + G; x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen. Jedes  $[x]$  stellt einen "Orbit" dar für die Operation von  $G$  auf  $\mathbb{R}$ , repräsentiert durch den Punkt  $x$  der Bahn.

Mit dem **Auswahlaxiom** erhält man eine Menge  $A$  derartiger Repräsentanten, so dass jede Äquivalenzklasse  $[y]$  genau einen Repräsentanten  $x \in A$  besitzt mit  $[y] = [x]$ . Da  $\mathbb{Z} \subset G$ , dürfen wir zudem  $A \subset [0, 1]$  annehmen.

**Satz 1.4.1** Die oben definierte Vitali-Menge  $A$  ist nicht  $\mathcal{L}^1$ -messbar.

**Beweis:** Wir konstruieren abzählbar viele disjunkte Translate  $A_k = A + g_k$  von  $A$  mit

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-1, 2].$$

Falls  $A$   $\mathcal{L}^1$ -messbar wäre, und damit wegen Satz 1.3.5 auch jedes  $A_k$ , so folgt aus Satz 1.1.2 und der Monotonie des Masses  $\mu = \mathcal{L}^1$  die Abschätzung

$$1 = \mathcal{L}^1([0, 1]) \leq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_k) \leq \mathcal{L}^1([-1, 2]) = 3.$$

Andererseits gilt wegen Translationsinvarianz von  $\mu$

$$\mathcal{L}^1(A_k) = \mathcal{L}^1(A), \quad k \in \mathbb{N},$$

was zu einem Widerspruch führt.

Zur Konstruktion von  $(A_k)$  sei  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $G \cap [-1, 1]$ ,  $A_k = A + g_k \subset [-1, 2]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Behauptung 1:** Es gilt:  $A_k \cap A_l = \emptyset$ ,  $k \neq l$ .

**Beweis:** Sei  $x \in A_k \cap A_l$ . Dann sind

$$x - g_k, x - g_l \in A$$

Repräsentanten für  $[x]$ . Aus der Eindeutigkeit der Repräsentanten folgt sodann  $x - g_k = x - g_l$ ; das heisst,  $g_k = g_l$ , und somit  $k = l$ .  $\square$

**Behauptung 2:**  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset [0, 1]$ .

**Beweis:** Sei  $y \in [0, 1]$ . Wähle  $x \in A$  mit  $[y] = [x]$ ; das heisst,  $y - x \in G$ . Da  $0 \leq x, y \leq 1$ , folgt

$$-1 \leq y - x \leq 1,$$

also  $y - x = g_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ ,  $y = x + g_k \in A_k$ .  $\square$

**Bemerkung 1.4.1** Allgemein zeigt die Konstruktion von Vitali, dass es für jedes translationsinvariante Mass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $\mu([0, 1]) > 0$  nicht messbare Mengen gibt. Durch eine leichte Abwandlung des obigen Beispiels kann man sogar zeigen, dass jede Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}$  mit  $\mu(\Omega) > 0$  eine nicht messbare Teilmenge enthält; vergleiche Wheeden-Zygmund, Cor. 3.39, S. 47.

Vitali's Konstruktion beruht auf der Betrachtung der Operation einer geeigneten unendlichen Gruppe von Translationen auf  $\mathbb{R}$ . Solch eine Gruppe ist notwendig kommutativ. Mit nicht kommutativen Gruppen von Kongruenzabbildungen in  $\mathbb{R}^3$  oder auf der Sphäre

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

kann man noch viel erstaunlichere Dinge erreichen.

Betrachte zum Beispiel die von der Identität und den Rotationen  $f$  und  $g$  erzeugte (multiplikative) Gruppe

$$G = \{f^{a_1} g^{b_1} f^{a_2} g^{b_2} \dots g^{b_k}; k, a_i, b_i, \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq k\},$$

wobei  $f$  der Rotation um  $180^\circ$  um die Polachse entspricht und  $g$  der Rotation um  $120^\circ$  um eine zur Polachse um  $45^\circ$  geneigte Achse. Beachte  $f = f^{-1}, g^2 = g^{-1}$ ; aufgrund der Wahl der Achsen bestehen keine weiteren Relationen.

Jedes  $h \in G \setminus \{id\}$  besitzt eine eindeutige gekürzte Darstellung  $h = f^{a_1} g^{b_1} \dots$ . Zerlege disjunkt

$$G = \{id\} \cup A \cup B \cup C,$$

wobei  $A$  aus allen  $h \in G$  besteht, deren gekürzte Darstellung  $h = f^{a_1} g^{b_1} \dots$  mit  $f$  beginnt,  $B$  aus denjenigen  $h$  beginnend mit  $g$ ,  $C$  aus denen beginnend mit  $g^2 = g^{-1}$ . Wir erhalten somit ebenfalls disjunkte Zerlegungen

$$A = f\{id\} \cup fB \cup fC, B = g\{id\} \cup gA, C = g^2\{id\} \cup g^2A;$$

das heisst,  $A$  ist (bis auf einzelne Punkte) "kongruent" zu 2 Kopien seiner selbst!

Auf dieser Beobachtung aufbauend, zeigt Hausdorff, dass man für eine geeignete Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Sphäre  $S^2 \setminus \{x_k; k \in \mathbb{N}\} = S^*$  disjunkt in 3 Teile zerlegen kann, die zueinander paarweise kongruent sind, von denen einer aber eine kongruente Kopie der Vereinigung der beiden anderen umfasst (Hausdorff-Paradox)!

Banach-Tarski entwickeln das Hausdorff-Paradox weiter und zeigen, dass man die Vollkugel in endlich viele disjunkte Teile zerlegen kann, aus denen man zwei zur ursprünglichen Kugel kongruente Kugeln zusammensetzen kann. – Natürlich können diese Teilmengen nicht messbar sein!

### Literatur:

R. M. French, Math. Intel. 10.4 (1988), 21–28.

S. Banach-A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), 244–277

## 1.5 Lebesgue-Stieltjes Mass

Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und stetig von links, das heisst

$$F(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} F(x), \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  setze

$$\lambda_F([a, b]) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{falls } a \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei  $\Lambda_F$  das von  $\lambda_F$  nach Satz 1.2.1 induzierte Mass auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\Lambda_F(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k]); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \right\}.$$

Ist  $\Lambda_F$  Borelsch oder sogar Borel regulär? Ein einfaches Kriterium dafür liefert der folgende Begriff.

**Definition 1.5.1** Ein Mass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  heisst **metrisch**, falls für alle  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{|a - b|; a \in A, b \in B\} > 0$$

gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

**Satz 1.5.1** (Carathéodory-Kriterium für Borelmasse) Ein metrisches Mass  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist Borelsch.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass jedes abgeschlossene  $F \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar ist. Sei  $F \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen,  $B \subset \mathbb{R}^n$  beliebig. Zu zeigen ist

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F). \quad (1.5.1)$$

OBdA sei  $\mu(B) < \infty$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$F_k = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{k}\}.$$

Da  $\mu$  metrisch und

$$\text{dist}(B \setminus F_k, B \cap F) \geq \frac{1}{k} > 0,$$

folgt mit der Monotonie von  $\mu$

$$\mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F_k) = \mu((B \cap F) \cup (B \setminus F_k)) \leq \mu(B).$$

Die Ungleichung (1.5.1) erhalten wir somit aus

**Behauptung 1:**  $\mu(B \setminus F_k) \rightarrow \mu(B \setminus F) \quad (k \rightarrow \infty)$ .

**Beweis:** Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$R_k = (F_k \setminus F_{k+1}) \cap B.$$

Die Mengen  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind disjunkt mit

$$B \setminus F = B \setminus F_k \cup \bigcup_{l=k}^{\infty} R_l, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aus der Monotonie und  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu$  folgt somit für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(B \setminus F_k) \leq \mu(B \setminus F) \leq \mu(B \setminus F_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \mu(R_l).$$

Behauptung 1 folgt somit durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  aus

**Behauptung 2:**  $\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) < \infty$ .

**Beweis:** Beachte

$$\text{dist}(R_i, R_j) > 0, \text{ falls } j \geq i + 2.$$

Da  $\mu$  metrisch, folgt mit Induktion

$$\sum_{k=1}^m \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^m R_{2k}\right) \leq \mu(B)$$

und

$$\sum_{k=1}^m \mu(R_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^m R_{2k+1}\right) \leq \mu(B).$$

Addition der Ungleichungen und Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  liefert

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) \leq 2\mu(B) < \infty,$$

wie gewünscht. □

**Satz 1.5.2** *Das Lebesgue-Stieltjes Mass  $\Lambda_F$  ist Borel regulär.*

**Beweis:** *i)* Wir zeigen zunächst,  $\Lambda_F$  ist metrisch. Mit Satz 1.5.1 folgt,  $\Lambda_F$  ist Borelsch.

Seien dazu  $A, B \subset \mathbb{R}$  mit

$$\delta := \text{dist}(A, B) > 0.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , mit  $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[$  und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k]) < \Lambda_F(A \cup B) + \varepsilon.$$

Beachte, dass für beliebige  $c = c_0 < c_1 < \dots < c_m = d$  gilt

$$\begin{aligned} \lambda_F([c, d]) &= F(d) - F(c) \\ &= \sum_{l=1}^m (F(c_l) - F(c_{l-1})) = \sum_{l=1}^m \lambda_F([c_{l-1}, c_l]). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Allenfalls nach weiterer Unterteilung der Intervalle  $[a_k, b_k[$  dürfen wir daher annehmen, dass gilt

$$b_k - a_k < \delta, \quad k \in \mathbb{N};$$

es gilt also für jedes  $k \in \mathbb{N}$  entweder  $A \cap [a_k, b_k[ = \emptyset$  oder  $B \cap [a_k, b_k[ = \emptyset$ . Die Überdeckung  $([a_k, b_k])_{k \in \mathbb{N}}$  zerfällt somit in eine Überdeckung von  $A$  und eine Überdeckung von  $B$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \Lambda_F(A \cup B) &\leq \Lambda_F(A) + \Lambda_F(B) \\ &\leq \sum_{k: [a_k, b_k[ \cap A \neq \emptyset} \lambda_F([a_k, b_k]) + \sum_{k: [a_k, b_k[ \cap B \neq \emptyset} \lambda_F([a_k, b_k]) \\ &\leq \sum_k \lambda_F([a_k, b_k]) \leq \Lambda_F(A \cup B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.

*ii)* Wir zeigen,  $\Lambda_F$  ist Borel regulär. Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  wähle Folgen  $(a_k^j)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k^j, b_k^j[ =: B_j$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k^j, b_k^j]) \leq \Lambda_F(A) + \frac{1}{j}.$$

Setze  $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ . Mit  $B_j$  ist auch  $B$  Borelsch,  $A \subset B$ , und mit  $B \subset B_j$  folgt

$$\begin{aligned} \Lambda_F(A) &\leq \Lambda_F(B) \leq \Lambda_F(B_j) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k^j, b_k^j]) \leq \Lambda_F(A) + \frac{1}{j} \end{aligned}$$

für beliebiges  $j \in \mathbb{N}$ . Mit  $j \rightarrow \infty$  folgt

$$\Lambda_F(A) = \Lambda_F(B);$$

also ist  $\Lambda_F$  Borel regulär.  $\square$

Die Menge der halboffenen Intervalle ist keine Algebra. Jedoch gilt analog zu Satz 1.2.2:

**Satz 1.5.3** Für  $a < b$  gilt

$$\Lambda_F([a, b]) = F(b) - F(a) = \lambda_F([a, b]).$$

**Beweis:** Offenbar gilt für  $a < b$  nach Definition

$$\Lambda_F([a, b]) \leq \lambda_F([a, b]).$$

Sei  $[a, b[ \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[$ . Da  $F$  von links stetig, existieren zu  $\varepsilon > 0$  Zahlen  $\delta, \delta_k > 0$  mit

$$\begin{aligned} F(b) - F(b - \delta) &< \varepsilon, \\ F(a_k) - F(a_k - \delta_k) &< \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Endlich viele Intervalle  $]a_k - \delta_k, b_k[$ ,  $k = 1, \dots, m$ , überdecken das kompakte Intervall  $[a, b - \delta]$ . Mit (1.5.2) und der Monotonie von  $F$  folgt

$$\lambda_F([a, b - \delta] \leq \sum_{k=1}^m \lambda_F([a_k - \delta_k, b_k]),$$

also

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &\leq F(b - \delta) - F(a) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m (F(b_k) - F(a_k - \delta_k)) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k)) + 2\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k]) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Übergang zum Infimum bezüglich  $([a_k, b_k])_k$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.6 Hausdorffmass

Für  $s > 0$ ,  $\delta > 0$  und beliebiges  $A \subset \mathbb{R}^n$  setze

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k), r_k < \delta \right\}.$$

Nach Satz 1.2.1 definiert  $\mathcal{H}_\delta^s$  ein Mass auf  $\mathbb{R}^n$ . Weiter gilt offenbar

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \leq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A), \text{ falls } \delta_2 \leq \delta_1.$$

Also existiert für jedes  $A \subset \mathbb{R}^n$  der Limes

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A). \quad (1.6.1)$$

**Definition 1.6.1**  $\mathcal{H}^s$  heisst  $s$ -dimensionales Hausdorff-Mass.

Die Bezeichnung ist gerechtfertigt, da gilt:

**Satz 1.6.1** Für  $s > 0$  ist  $\mathcal{H}^s$  ein Borel reguläres Mass auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis:** *i)* Wir zeigen,  $\mathcal{H}^s$  ist ein Mass. Sei  $s > 0$ . Offenbar gilt  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ . Sei  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathbb{R}^n$ . Da  $\mathcal{H}_\delta^s$  für jedes  $\delta > 0$  ein  $\sigma$ -subadditives Mass ist, liefert (1.6.1) die Ungleichung

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Die  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mathcal{H}^s$  folgt nach Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$ .

*ii)* Wir zeigen,  $\mathcal{H}^s$  ist metrisch und damit Borelsch. Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\delta_0 = \text{dist}(A, B) > 0$ . Jede Überdeckung  $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$  mit  $r_k < \delta < \delta_0$  zerfällt in 2 Teile, welche die Mengen  $A$ , beziehungsweise  $B$  überdecken. Analog zum Beweis von Satz 1.5.2 folgt für  $\delta < \delta_0$  die Abschätzung

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B).$$

Nach Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$  folgt

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$$

und damit die Behauptung.

*iii)* Wir zeigen,  $\mathcal{H}^s$  ist Borel regulär. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . OBdA sei  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ . (Sonst ist  $G = \mathbb{R}^n$  Borelsch mit  $A \subset G$  und  $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(G)$ .) Zu  $\delta_l = 1/l$  wähle Überdeckung  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_{kl}}(x_{kl}) =: G_l$  mit  $r_{kl} < \delta_l$  und

$$\mathcal{H}_{\delta_l}^s(G_l) \leq \mathcal{H}_{\delta_l}^s(A) + \frac{1}{l} \leq \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{l}.$$

Dann ist  $G := \bigcap_{l=1}^{\infty} G_l$  Borelsch mit  $A \subset G$  und

$$\mathcal{H}^s(G) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\delta_l}^s(G) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\delta_l}^s(G_l) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

□

Der Vollständigkeit halber definieren wir

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} \#A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

das **Zählmass** auf  $\mathbb{R}^n$ .

Mit Hilfe der Skala von Massen  $\mathcal{H}^s, s \geq 0$ , können wir nun die “Dimension” einer beliebigen Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  erklären. Dazu benötigen wir

**Lemma 1.6.1** *Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $0 \leq s < t < \infty$ . Dann gilt:*

- i)  $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$ ,
- ii)  $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$ .

**Beweis von Lemma 1.6.1** i) Sei  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Für  $\delta > 0$ ,  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$  mit  $r_k < \delta$  gilt

$$\mathcal{H}_{\delta}^t(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k^t \leq \delta^{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s,$$

also nach Übergang zum Infimum bezüglich  $B_{r_k}(x_k)$  auf der rechten Seite

$$\mathcal{H}_{\delta}^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(A).$$

Mit  $\delta \rightarrow 0$  folgt  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .

- ii) Dies ist die Kontraposition von i). □

**Beispiel 1.6.1** *Sei  $Q = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt*

$$2^{-n} \mathcal{L}^n(Q) \leq \mathcal{H}^n(Q) \leq 2^{-n} n^{n/2} \mathcal{L}^n(Q).$$

**Beweis:** Zu gegebenem  $\delta > 0$  wähle  $k$  mit  $r := 2^{-k-1} \sqrt{n} < \delta$ . Zerlege  $Q$  mittels eines achsenparallelen Gitters der Maschenweite  $2^{-k}$  in Würfel  $Q_l$  der Kantenlänge  $2^{-k}$ ,  $1 \leq l \leq 2^{(k+1)n}$ . Jeder Würfel  $Q_l$  ist enthalten in der abgeschlossenen Kugel vom Radius  $r$  mit demselben Mittelpunkt. Es folgt

$$\mathcal{H}_{\delta}^n(Q) \leq 2^{(k+1)n} r^n = n^{n/2} = 2^{-n} n^{n/2} \mathcal{L}^n(Q).$$

Umgekehrt folgt aus der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mathcal{L}^n$  für jede Überdeckung der Einheitskugel  $B_1(0)$  mit Kugeln  $B_{r_k}(x_k)$  vom Radius  $r_k < \delta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , die Abschätzung

$$\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_k}(x_k)) = \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} r_k^n;$$

also

$$\mathcal{H}_\delta^n(Q) \geq \mathcal{H}_\delta^n(B_1(0)) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^n; B_1(0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k), r_k < \delta\right\} \geq 1.$$

Mit  $\delta \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 1.6.1** *Tatsächlich gilt  $\mathcal{L}^n(A) = \omega_n \mathcal{H}^n(A)$  für alle  $\mathcal{L}^n$ -messbaren  $A \subset \mathbb{R}^n$ . (Siehe zum Beispiel Amann-Escher, Korollar 5.22, S.52; beachte jedoch die unterschiedlichen Normierungen.)*

**Beispiel 1.6.2** *Für  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $s > n$  gilt  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ .*

**Beweis:** Sei  $s > n$ . Überdecke  $\mathbb{R}^n$  mit Würfeln  $Q_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Lemma 1.6.1 und Beispiel 1.6.1 ergeben  $\mathcal{H}^s(Q_l) = 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Mit Satz 1.1.2 folgt  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ .  $\square$

**Definition 1.6.2** *Die nach Lemma 1.6.1 und Beispiel 1.6.2 eindeutig definierte Zahl*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s > 0; \mathcal{H}^s(A) = 0\} \leq n$$

*heißt Hausdorff-Dimension von  $A$ .*

**Beispiel 1.6.3** *Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$ .*

**Beispiel 1.6.4** *(Cantor Staub): Sei  $A_0 = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Zerlege  $A$  mittels eines achsenparallelen Gitters der Maschenweite  $1/4$  in 16 Teilwürfel. Es sei  $A_1$  die aus den 4 Teilwürfeln entlang der Geradensegmente  $\{(x, y) \in A; y = x \pm 1/2\}$  bestehende Teilmenge,  $A_2$  die durch analoge Verfeinerung jedes der Teilwürfel von  $A_1$  entstehende Menge, usw. Schliesslich sei  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ . (Vergleiche z.B. Amann-Escher, S. 39.) Dann gilt:  $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$ .*

**Beweis:** Wir zeigen,  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^1(A) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Jede Menge  $A_k$  besteht aus  $4^k$  Quadraten  $Q_l$  der Kantenlänge  $4^{-k}$ . Die  $4^k$  Bälle vom Radius  $r_k = 4^{-k} \sqrt{2}/2$  um die Quadrate  $Q_l$  überdecken  $A_k$ , also auch  $A$ . Es folgt

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \mathcal{H}_\delta^1(A_k) \leq \sqrt{2}/2$$

für alle  $k \geq k_0$  mit  $r_{k_0} < \delta$ .

Sei  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion  $\pi(x, y) = x$ . Beachte  $\pi(A) = [0, 1]$ . Sei  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(z_k)$  mit  $z_k = (x_k, y_k)$ ,  $r_k < \delta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann erhalten wir

$$[0, 1] = \pi(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi(B_{r_k}(z_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} ]x_k - r_k, x_k + r_k[;$$

also

$$1 = \mathcal{L}^1([0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(]x_k - r_k, x_k + r_k[) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

## 1.7 Radonmasse

Sei  $\mu$  ein Mass auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.7.1** *Das Mass  $\mu$  heisst **Radonmass**, falls  $\mu$  Borel regulär ist und falls  $\mu(K) < \infty$  für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$ .*

### Beispiel 1.7.1

i)  $\mathcal{L}^n, \Lambda_F$  sind Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$ , beziehungsweise  $\mathbb{R}$ .

ii)  $\mathcal{H}^s$  für  $s < n$  ist kein Radonmass.

iii) Falls  $\mu$  Radonmass,  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar, so ist auch  $\mu \llcorner A$  mit

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B), \quad B \subset \mathbb{R}^n,$$

ein Radonmass.

**Beweis:** Offenbar ist  $\nu := \mu \llcorner A$  ein Mass, und für kompaktes  $K \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $\nu(K) = \mu(A \cap K) \leq \mu(K) < \infty$ .

i)  $\nu$  ist Borelsch. Sei  $C \subset \mathbb{R}^n$  Borelsch. Für  $B \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \mu(A \cap B) = \mu((A \cap B) \cap C) + \mu((A \cap B) \setminus C) \\ &= \mu(A \cap (B \cap C)) + \mu(A \cap (B \setminus C)) \\ &= \nu(B \cap C) + \nu(B \setminus C). \end{aligned}$$

Also ist  $C$  bzgl.  $\nu$  messbar,  $\nu$  Borelsch.

ii)  $\nu$  ist Borel regulär. Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$ . OBdA sei  $\nu(B) < \infty$ . Wähle  $C$ , bzw.  $D$  Borelsch mit  $A \cap B \subset C$ , bzw.  $B \setminus A \subset D$  und

$$\mu(A \cap B) = \mu(C), \quad \mu(B \setminus A) = \mu(D).$$

Da  $A$   $\mu$ -messbar,  $A \cap B \subset A \cap C$ , folgt

$$\mu(C \setminus A) = \mu(C) - \mu(C \cap A) = \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) \leq 0;$$

also

$$\nu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(C) - \mu(C \setminus A) = \mu(C) = \mu(A \cap B) = \nu(B).$$

Analog folgt

$$\nu(D) = \mu(D \cap A) = \mu(D) - \mu(D \setminus A) = \mu(B \setminus A) - \mu(D \setminus A) \leq 0.$$

Schliesslich ist  $C \cup D =: E$  Borelsch mit  $B \subset E$  und

$$\nu(B) \leq \nu(E) \leq \nu(C) + \nu(D) = \nu(B),$$

wie gewünscht. □

Für allgemeine Radonmasse  $\mu$  gelten Charakterisierungen des Masses analog Satz 1.3.2:

**Satz 1.7.1** Sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ .

i) Für jedes  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\mu(A) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mu(G).$$

ii) Für  $\mu$ -messbares  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\mu(A) = \sup_{F \subset A, F \text{ kompakt}} \mu(F).$$

Es folgt unmittelbar

**Satz 1.7.2** Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

i)  $A$  ist  $\mu$ -messbar;

ii)  $A$  besitzt eine Darstellung  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus N$ , wobei  $G_k$  offen,  $k \in \mathbb{N}$ , und  $\mu(N) = 0$  ("G $_{\delta}$ -Menge").

iii)  $A$  besitzt eine Darstellung  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$ , wobei  $F_k$  abgeschlossen,  $k \in \mathbb{N}$ , und  $\mu(N) = 0$  ("F $_{\sigma}$ -Menge").

**Beweis:** Die Implikationen ii)  $\Rightarrow$  i) und iii)  $\Rightarrow$  i) sind klar nach Satz 1.1.1.

i)  $\Rightarrow$  ii) OBdA sei  $\mu(A) < \infty$ . (Betrachte sonst  $A \cap Q_l$  für eine disjunkte Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$  in Würfel  $Q_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Beachte, dass  $\mu(Q_l) < \infty$ , da  $\mu$  Radonsch.) Wähle  $G_k$  offen gemäss Satz 1.7.1 mit  $A \subset G_k$  und

$$\mu(G_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Setze  $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A$ .  $N$  ist  $\mu$ -messbar. Mit Satz 1.1.2 folgt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(N) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) - \mu(A) \leq \mu(G_k) - \mu(A) < \frac{1}{k}.$$

Mit  $k \rightarrow \infty$  folgt  $\mu(N) = 0$ .

i)  $\Rightarrow$  iii) Wieder sei oBdA  $\mu(A) < \infty$ . Wähle  $F_k$  kompakt gemäss Satz 1.7.1 mit  $F_k \subset A$  und

$$\mu(A) < \mu(F_k) + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Setze  $N = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ .  $N$  ist  $\mu$ -messbar. Es folgt

$$\mu(N) = \mu(A) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leq \mu(A) - \mu(F_k) < \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Mit  $k \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung. □

Für den Beweis von Satz 1.7.1 benötigen wir ein Lemma.

**Lemma 1.7.1** Für jede Borelmenge  $B \subset \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset B, G \text{ offen: } \mu(G \setminus B) < \varepsilon. \quad (1.7.1)$$

**Beweis:** Setze

$$\mathcal{G} = \{B \subset \mathbb{R}^n; (1.7.1) \text{ gilt für } B\}.$$

Wir zeigen,  $\mathcal{G}$  umfasst die Borel algebra  $\mathcal{B}$ .

i) Offenbar gilt:  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen  $\Rightarrow G \in \mathcal{G}$ .

ii) Wir zeigen,  $B_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$ .

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G_k \supset B_k$  offen mit

$$\mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$  offen mit  $G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  und

$$\mu(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon.$$

iii) Wir zeigen:  $B_k \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$ .

OBdA sei  $\mu(B_1) < \infty$ . (Zerlege sonst  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$  in disjunkte Würfel  $Q_l$  und betrachte  $(B_k \cap Q_l)_{k \in \mathbb{N}}$  für festes  $l \in \mathbb{N}$ .) Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G_k$  wie in ii). Für  $K \in \mathbb{N}$  ist dann  $G^K = \bigcap_{k=1}^K G_k$  offen mit  $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset G^K$  und

$$\mu(G^K) \leq \mu(G_1) < \infty.$$

Beachte  $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)$ . (Für  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$  wähle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $x \notin B_k$ . Dann gilt  $x \in G_k \setminus B_k$ .) Mit Satz 1.1.2 folgt daher

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \mu(G^K \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) &= \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) \\ &\leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

iv) Wegen iii) enthält  $\mathcal{G}$  jede abgeschlossene Menge

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{1/k}(F),$$

wobei

$$U_{\delta}(F) = \bigcup_{x \in F} B_{\delta}(x) \text{ offen.}$$

v) Setze

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{G}; B^c = \mathbb{R}^n \setminus B \in \mathcal{G}\}.$$

Dann enthält  $\mathcal{F}$  alle offenen Mengen. Nach Definition gilt zudem

$$B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}.$$

Schliesslich gilt für  $B_k \in \mathcal{F}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nach iii) und der de Morganschen Regel

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \in \mathcal{G};$$

mit ii) also  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{F}$ . Somit ist  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra, die die offenen Mengen umfasst, und

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G},$$

wie gewünscht. □

**Beweis von Satz 1.7.1:** i) Zu  $A \subset \mathbb{R}^n$  wähle  $B$  Borelsch mit  $A \subset B$  und  $\mu(A) = \mu(B)$ . Dies ist möglich, da  $\mu$  insbesondere Borel regulär. Für offenes  $G \supset B$  gilt nun

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(G) - \mu(G \setminus B).$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.7.1.

ii) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  bzgl.  $\mu$  messbar. OBdA sei  $A \subset \bar{A} \subset Q$ , wobei  $Q$  ein offener Würfel. (Betrachte sonst  $A \cap Q_l$  für eine disjunkte Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$  in Würfel  $Q_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .) Mit i) erhalten wir

$$\mu(Q \setminus A) = \inf_{Q \setminus A \subset G, G \text{ offen}} \mu(G) = \inf_{Q \setminus A \subset G \subset Q, G \text{ offen}} \mu(G).$$

Für offenes  $G \subset Q$  mit  $Q \setminus A \subset G$  ist  $F = Q \setminus G \subset A$  kompakt; umgekehrt liefert jedes kompakte  $F \subset A$  ein offenes  $G = Q \setminus F$  mit  $Q \setminus A \subset G$ . Ersetzen wir im letzten Ausdruck  $G$  durch  $Q \setminus F$ , so folgt

$$\mu(Q) - \mu(A) = \mu(Q \setminus A) = \mu(Q) - \sup_{F \subset A, F \text{ kompakt}} \mu(F),$$

und damit die Behauptung. □

Weiter folgt aus Satz 1.7.1 analog zu Satz 1.3.3 das folgende Messbarkeitskriterium für ein allgemeines Radonmass.

**Satz 1.7.3** Sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ . Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- i)  $A$  ist  $\mu$ -messbar;
- ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists G \supset A$ ,  $G$  offen:  $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$ .

**Beweis:** wie Satz 1.3.3.

## 2 Messbare Funktionen

### 2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Sei  $\mu$  ein Mass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar.

**Definition 2.1.1**  $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  heisst  $\mu$ -messbar, falls gilt:

- i)  $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\})$  sind  $\mu$ -messbar,
- ii)  $f^{-1}(U)$  ist  $\mu$ -messbar für jedes offene  $U \subset \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 2.1.1** Äquivalent zu ii) sind folgende Bedingungen:

- iii)  $f^{-1}(B)$  ist  $\mu$ -messbar für jede Borelmenge  $B \subset \mathbb{R}$ .
- iv)  $f^{-1}(] - \infty, a[)$  ist  $\mu$ -messbar,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

(Analog, falls  $f^{-1}(] - \infty, a[), f^{-1}(]a, \infty[), f^{-1}([a, \infty[)$   $\mu$ -messbar für  $a \in \mathbb{R}$ .)

**Beweis:** ii)  $\Rightarrow$  iii) :  $\mathcal{G} = \{B \subset \mathbb{R}; f^{-1}(B) \text{ } \mu\text{-messbar}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra, welche die offenen Mengen umfasst.

iv)  $\Rightarrow$  iii):  $(] - \infty, a[)_{a \in \mathbb{R}}$  erzeugt die Borel-Algebra  $\mathcal{B}$ . □

**Bemerkung 2.1.2** Versieht man  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  mit der von den offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  und den Umgebungen  $[-\infty, a[, ]a, \infty], a \in \mathbb{R}$ , von  $\pm\infty$  erzeugten Topologie, so ist  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  bzgl.  $\mu$  messbar genau dann, wenn gilt

- v)  $f^{-1}(U)$  ist  $\mu$ -messbar für jedes offene  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ,

beziehungsweise, falls gilt

- vi)  $f^{-1}([-\infty, a[)$  ist  $\mu$ -messbar,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** vi)  $\Rightarrow$  i) Benutze die Darstellungen  $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k[)$ ,

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k[).$$

vi)  $\Rightarrow$  iv)  $f^{-1}(] - \infty, a[) = f^{-1}([-\infty, a[) \setminus f^{-1}(\{-\infty\})$ . □

**Beispiel 2.1.1** Seien  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -messbar,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $g \circ f$   $\mu$ -messbar.

**Satz 2.1.1** i) Seien  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -messbar. Dann sind die Funktionen  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$ ,  $f \wedge g = \min\{f, g\}$ ,  $f \vee g = \max\{f, g\}$  ebenfalls  $\mu$ -messbar, und, falls  $g(x) \neq 0$ , auch  $f/g$ .

ii) Seien  $f_k: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann sind die Funktionen  $\inf_k f_k$ ,  $\sup_k f_k$ ,  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$  ebenfalls  $\mu$ -messbar.

**Beweis:** i) Da  $f, g$  punktweise endlich, sind alle angeführten Funktionen erklärt. Die  $\mu$ -Messbarkeit von  $f + g$  folgt aus der Darstellung

$$(f + g)^{-1}([-\infty, a[) = \bigcup_{r, s \in \mathbb{Q}, r+s < a} f^{-1}([-\infty, r[) \cap g^{-1}([-\infty, s[).$$

Da  $s \mapsto s^2$ ,  $s \mapsto -s$  stetig auf  $\mathbb{R}$ , folgt die  $\mu$ -Messbarkeit von  $f \cdot g$  aus der Darstellung

$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

und Beispiel 2.1.1.

Weiter gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}([-\infty, a]) = \begin{cases} g^{-1}(\frac{1}{a}, 0], & a < 0, \\ g^{-1}([-\infty, 0]), & a = 0, \\ g^{-1}([-\infty, 0] \cup \frac{1}{a}, \infty), & a > 0. \end{cases}$$

Setze

$$s^+ = \max\{s, 0\}, \quad s^- = \max\{-s, 0\} = (-s)^+.$$

Dann folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen

$$s \mapsto s^+, \quad s \mapsto s^-$$

und den Darstellungen

$$\begin{aligned} |f| &= f^+ + f^-, \\ f \wedge g &= f - (g - f)^-, \\ f \vee g &= f + (g - f)^+ \end{aligned}$$

die  $\mu$ -Messbarkeit dieser Funktionen.

ii) Seien  $f_k: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ . Die Messbarkeit der angegebenen Funktionen folgt aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} (\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k)^{-1}([-\infty, a]) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty, a]), \\ (\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k)^{-1}([-\infty, a]) &= \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty, a - \frac{1}{l}]), \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k &= \sup_{l \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq l} f_k), \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k &= \inf_{l \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq l} f_k). \end{aligned}$$

□

Man kann  $\mu$ -messbare Funktionen durch "Treppenfunktionen" approximieren.

**Satz 2.1.2** Sei  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -messbar. Dann gibt es  $\mu$ -messbare Mengen  $A_k \subset \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}.$$

**Notation:** Hier und im folgenden bezeichnet  $\chi_A$  die *charakteristische Funktion* einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\chi_A(x) = 1$ , falls  $x \in A$ ,  $\chi_A(x) = 0$  sonst.

**Beweis:** Setze

$$A_1 = \{x; f(x) \geq 1\} = f^{-1}([1, \infty]).$$

$A_1$  ist  $\mu$ -messbar. Definiere induktiv die  $\mu$ -messbaren Mengen

$$A_k = \{x; f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Offenbar gilt

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k},$$

was sich im Falle  $\sup\{k; x \in A_k\} = \infty$  sofort aus der Definition der Mengen  $A_k$  ergibt. Andernfalls betrachte  $k_0 = \max\{k; x \in A_k\}$  und benutze, dass  $x \in A_{k_0}$ .

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung machen wir eine Fallunterscheidung.

i)  $f(x) = \infty$ . Dann gilt  $x \in A_k$  für alle  $k$ , und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \infty = f(x)$ .

ii)  $f(x) = 0$ . Dann gilt  $x \notin A_k, \forall k$ ; also  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = 0 = f(x)$ .

iii)  $0 < f(x) < \infty$ . Dann gilt  $x \notin A_k$  für unendlich viele  $k$ . Falls nämlich  $x \in \bigcap_{k \geq k_0} A_k$ , so folgt

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) > f(x),$$

im Widerspruch zur zuvor bewiesenen Ungleichung.

Für eine Folge von Indizes  $k \rightarrow \infty$  mit  $x \notin A_k$  gilt nun nach Definition von  $A_k$

$$0 \leq f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) < \frac{1}{k}.$$

Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert die Behauptung. □

**Bemerkung 2.1.3** i) Beachte, dass die Konvergenz

$$f_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{A_j} \rightarrow f$$

**monoton** ist. Falls  $f$  beschränkt ist, so kann man sogar gleichmäßige Konvergenz

$$\sup_x |f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

zeigen (Übung). Vergleiche auch Satz 2.2.1.

ii) Durch Approximation von  $f^+, f^-$  nach Satz 2.1.2 kann man analog jede  $\mu$ -messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  durch Treppenfunktionen approximieren.

Falls  $\mu$  Borelsch ist, so liefert die (Halb-)Stetigkeit ein handliches Kriterium für die Messbarkeit einer Funktion.

**Beispiel 2.1.2** Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\mu$  Borelsch. Dann ist  $f$   $\mu$ -messbar.

**Beweis:**  $f^{-1}(\{\pm\infty\}) = \emptyset$  ist  $\mu$ -messbar. Falls  $U \subset \mathbb{R}$  offen, so ist  $f^{-1}(U)$  offen, also  $\mu$ -messbar, da  $\mu$  Borelsch.

**Beispiel 2.1.3** Eine Funktion  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heisst nach oben halb-stetig (oberhalb-stetig, upper semi-continuous) falls gilt

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

Topologisch lässt sich dies äquivalent ausdrücken durch die Bedingung

$$f^{-1}([a, \infty]) \text{ ist abgeschlossen, } \forall a \in \mathbb{R},$$

oder

$$f^{-1}([-\infty, a[) \text{ ist offen, } \forall a \in \mathbb{R};$$

also ist  $f$  bzgl.  $\mu$  messbar, falls  $\mu$  Borelsch.

Analog sind in diesem Falle unterhalbstetige  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega,$$

stets  $\mu$ -messbar.

**Definition 2.1.2** Die Aussage  $A(x)$  gilt für  $\mu$ -fast alle  $x \in \Omega$ , bzw.  $\mu$ -fast überall ( $\mu$ -a.e.), falls

$$\mu(\{x \in \Omega; A(x) \text{ gilt nicht}\}) = 0.$$

**Definition 2.1.3** Eine Abbildung  $F = F(x, y): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir als eine **Carathéodory-Funktion**, falls gilt

- i) für alle  $y \in \mathbb{R}$  ist  $x \mapsto F(x, y)$   $\mu$ -messbar,
- ii) für  $\mu$ -fast alle  $x \in \Omega$  ist  $y \mapsto F(x, y)$  stetig.

**Beispiel 2.1.4** Sei  $F = F(x, y): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory-Funktion,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -messbar,  $\mu$  Borelsch. Dann ist  $f(x) := F(x, u(x))$  ebenfalls  $\mu$ -messbar.

**Beweis:** Die Behauptung folgt offenbar, wenn wir zeigen, dass für  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \{x; f(x) \leq a\} &= \{x; F(x, u(x)) \leq a\} \\ &= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} (\{x; F(x, y) < a + \frac{1}{l}\} \cap \{x; |u(x) - y| < \frac{1}{k}\}). \end{aligned}$$

ObdA sei  $F(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$  für alle  $x \in \Omega$ .

“ $\subset$ ”: Zu  $x \in f^{-1}([-\infty, a])$ ,  $l \in \mathbb{N}$  wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$B_{1/k_0}(u(x)) \subset F(x, \cdot)^{-1}([-\infty, a + \frac{1}{l}]).$$

Es folgt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \exists y \in B_{1/k}(u(x)) \cap \mathbb{Q}: F(x, y) < a + \frac{1}{l};$$

also  $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \dots, \forall l$ .

“ $\supset$ ”: Für  $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \dots$  wähle zu gegebenem  $l \in \mathbb{N}$  eine Folge  $(y_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{Q}$  mit

$$|u(x) - y_k^l| < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty), \quad F(x, y_k^l) < a + \frac{1}{l}, \quad \forall k.$$

Wir erhalten

$$F(x, u(x)) \leq a + \frac{1}{l}, \quad \forall l.$$

Mit  $l \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung.

Alternativ können wir  $u$  durch Treppenfunktionen gemäss Satz 2.1.2 approximieren und anschliessend Satz 2.1.1 anwenden.  $\square$

## 2.2 Die Sätze von Lusin und Egoroff

Sei nun  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar mit  $\mu(\Omega) < \infty$ .

**Satz 2.2.1 (Egoroff).** Seien  $f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar und  $\mu$ -a.e. endlich. Weiter gelte  $f_k(x) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f(x)$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ .

Dann folgt:  $\forall \delta > 0 \exists F \subset \Omega$ ,  $F$  kompakt:  $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$  und

$$\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty);$$

das heisst,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $F$  gleichmässig gegen  $f$ .

**Bemerkung 2.2.1** Die Voraussetzung  $\mu(\Omega) < \infty$  ist im allgemeinen nötig, wie das Beispiel

$$f_k = \chi_{B_k(0)} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f \equiv 1 \ \mathcal{L}^n - \text{a.e. in } \mathbb{R}^n$$

zeigt.

**Beweis:** Sei  $\delta > 0$ . Für  $i, j \in \mathbb{N}$  setze

$$C_{i,j} = \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| > 2^{-i}\}.$$

$C_{i,j}$  ist  $\mu$ -messbar, da  $f, f_k$   $\mu$ -messbar sind, und es gilt  $C_{i,(j+1)} \subset C_{i,j}$ ,  $\forall i, j$ . Da weiter gilt  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für  $\mu$ -fast alle  $x$ , und da  $\mu(\Omega) < \infty$ , folgt mit Satz 1.1.2:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\right) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Also existiert für jedes  $i$  ein  $N(i) \in \mathbb{N}$  mit

$$\mu(C_{i,N(i)}) < \delta \cdot 2^{-i-1}.$$

Setze  $A = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)}$ . Dann gilt

$$\mu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \delta/2,$$

und für alle  $i \in \mathbb{N}$  nach Definition von  $C_{i, N(i)}$

$$\sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| \leq 2^{-i}, \quad \forall k \geq N(i).$$

Wähle nun  $F \subset A$  gemäss Satz 1.7.1, wobei  $F$  kompakt mit  $\mu(A \setminus F) < \delta/2$ .  
Damit gilt auch

$$\mu(\Omega \setminus F) \leq \mu(\Omega \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \delta,$$

wie verlangt.  $\square$

**Satz 2.2.2** (*Lusin*). Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar und  $\mu$ -fast überall endlich. Dann gilt:  $\forall \delta > 0 \exists F \subset \Omega$ ,  $F$  kompakt:  $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$  und  $f|_F: F \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

**Beispiel 2.2.1** Falls  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $f = \chi_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ , so ist  $f|_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}: [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem eingeschränkten Definitionsbereich stetig, als Funktion auf  $[0, 1]$  jedoch stetig in **keinem** Punkt. Weiter zeigt dieses Beispiel, dass man zu  $\delta = 0$  im allgemeinen kein **kompaktes**  $F$  gemäss Satz 2.2.2 finden kann.

**Beweis:** *i)* Wir zeigen, der Satz gilt für Treppenfunktionen

$$g = \sum_{i=1}^I b_i \chi_{B_i}, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^I B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Zu  $\delta > 0$  wähle  $F_i \subset B_i$  kompakt gemäss Satz 1.7.1 mit

$$\mu(B_i \setminus F_i) < \delta \cdot 2^{-i}, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Mit den Mengen  $B_i$  sind auch die Mengen  $F_i$  disjunkt; da diese zudem kompakt sind, folgt  $\text{dist}(F_i, F_j) > 0$  ( $i \neq j$ ). Damit ist  $g$  lokal konstant, also stetig auf  $F := \bigcup_{i=1}^I F_i \subset \Omega$ . Weiter ist  $F \subset \Omega$  kompakt, und

$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^I (B_i \setminus F_i)\right) \leq \sum_{i=1}^I \mu(B_i \setminus F_i) < \delta.$$

*ii)* Seien  $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktionen mit

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad x \in \Omega,$$

entsprechend Satz 2.1.2, wobei

$$f_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{A_j} = \sum_{i=1}^{I_k} b_{ik} \chi_{B_{ik}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit  $B_{ik} \cap B_{jk} = \emptyset$  ( $i \neq j$ ),  $\bigcup_{i=1}^{I_k} B_{ik} = \Omega$  und mit

$$b_{ik} = \sum_{B_{ik} \subset A_j} \frac{1}{j}, \quad 1 \leq i \leq I_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zu  $\delta > 0$ ,  $g = f_k$  wähle kompakte Mengen  $F_k \subset \Omega$  gemäss Teil i) mit

$$\mu(\Omega \setminus F_k) < \delta \cdot 2^{-k-1}, \quad f_{k|_{F_k}} : F_k \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } k \in \mathbb{N}.$$

Wähle weiter  $F_0 \subset \Omega$  kompakt gemäss Satz 2.2.1 mit

$$\mu(\Omega \setminus F_0) < \delta/2, \quad \sup_{x \in F_0} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0.$$

Schliesslich sei  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k \subset \Omega$ . Beachte,  $F$  ist kompakt mit

$$\mu(\Omega \setminus F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (\Omega \setminus F_k)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\Omega \setminus F_k) < \delta,$$

und wegen  $F \subset F_0$  folgt gleichmässige Konvergenz

$$\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Die Stetigkeit von  $f_{k|_F}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , liefert nun die Stetigkeit von  $f|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

### 2.3 Masskonvergenz

Sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar, und seien  $f, f_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ , und sei  $f$   $\mu$ -fast überall endlich.

**Definition 2.3.1**  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $f$  im Masse,  $f_k \xrightarrow{\mu} f$  ( $k \rightarrow \infty$ ), genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \mu(\{x \in \Omega; |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

In welcher Beziehung stehen die Begriffe ‘‘Masskonvergenz’’ und ‘‘punktweise Konvergenz  $\mu$ -a.e.’’ zueinander?

**Satz 2.3.1** Sei  $\mu(\Omega) < \infty$ , und es gelte  $f_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f$   $\mu$ -a.e. Dann gilt auch  $f_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f$ .

**Beweis:** Zu  $\delta > 0$  wähle  $F \subset \Omega$  nach Satz 2.2.1 mit

$$\mu(\Omega \setminus F) < \delta, \quad \sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für  $\varepsilon > 0$ ,  $k \geq k_0(\varepsilon, F)$  gilt dann  $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ ,  $\forall x \in F$ , also

$$\mu(\{x \in \Omega; |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\Omega \setminus F) < \delta.$$

Da  $\delta > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.  $\square$

Die Umkehrung von Satz 2.3.1 gilt jedoch nicht.

**Beispiel 2.3.1** Sei  $\Omega = [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu$  das Lebesgue-Mass,

$$f_k = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n}[}, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei für jedes  $k$  der Index  $n \in \mathbb{N}_0$  so gewählt ist, dass  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ . Es gilt

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_k(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

also

$$f_k \xrightarrow{\mu} f \equiv 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Jedoch gilt für jedes  $x \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = [2^n x] + 2^n, \\ 0, & \text{alle übrigen } k \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}, \end{cases}$$

wobei  $[s] = \sup\{n \in \mathbb{N}; n \leq s\}$ ; also ist  $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  divergent.

Vielleicht überraschenderweise gilt hingegen:

**Satz 2.3.2** Falls  $f_k \xrightarrow{\mu} f$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so gibt es eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  mit

$$f_k \rightarrow f \quad \mu\text{-a.e.} \quad (k \rightarrow \infty, \quad k \in \Lambda).$$

**Beweis:** Für  $k, l \in \mathbb{N}$  setze

$$A_{k,l} = \{x \in \Omega; |f_l(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

Beachte, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mu(A_{k,l}) \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty).$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  wähle  $\varphi(k) \in \mathbb{N}$  mit

$$\mu(A_{k,\varphi(k)}) < 2^{-k-1}.$$

Setze

$$B_l = \bigcup_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$$

mit

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k \geq l} \mu(A_{k,\varphi(k)}) \leq 2^{-l}, \quad \forall l.$$

Weiter gilt  $B_{l+1} \subset B_l$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}$ . Da  $\mu(B_1) < \infty$ , folgt mit Satz 1.1.2:

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} B_l\right) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(B_l) = 0.$$

Schliesslich existiert für jedes  $x \notin \bigcap_{l=1}^{\infty} B_l$  ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $x \notin B_l = \bigcup_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$ ;

also  $x \notin A_{k,\varphi(k)}$  für alle  $k \geq l$ , und das bedeutet

$$|f_{\varphi(k)}(x) - f(x)| \leq 2^{-k}, \quad \forall k \geq l.$$

Es folgt

$$f_{\varphi(k)}(x) \rightarrow f(x) \quad (k \rightarrow \infty).$$

□

### 3 Integration

Generalvoraussetzung für diesen Abschnitt: Es sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar. Die beschriebenen Konstruktionen sind jedoch in einem viel weiteren Rahmen möglich; vgl. Amann-Escher.

#### 3.1 Definition und elementare Eigenschaften

Nach Satz 2.1.2 können wir jede  $\mu$ -messbare Funktion durch Treppenfunktionen approximieren. Verallgemeinernd definieren wir:

**Definition 3.1.1**  $g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heisst  $\sigma$ -**Treppenfunktion**, falls  $\text{im}(g)$  abzählbar ist.

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden stets Treppenfunktion statt  $\sigma$ -Treppenfunktion. (Evans-Gariepy: "simple function")

Wir definieren das Integral einer Treppenfunktion.

**Definition 3.1.2** i) Für eine  $\mu$ -messbare Treppenfunktion  $g: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  setze

$$\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{0 < a \leq \infty} a \mu(g^{-1}(\{a\})) \leq \infty.$$

ii) Für eine  $\mu$ -messbare Treppenfunktion  $g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $\int_{\Omega} g^+ d\mu < \infty$  oder  $\int_{\Omega} g^- d\mu < \infty$  setze

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} g^+ d\mu - \int_{\Omega} g^- d\mu = \sum_{-\infty \leq a \leq \infty} a \mu(g^{-1}(\{a\})).$$

Ähnlich dem Riemann-Integral können wir nun das  $\mu$ -Integral einer  $\mu$ -messbaren Funktion  $f$  definieren. Beachte, dass wir nun keine Vorzeichenbedingung mehr an  $f$  stellen. Die Einschränkung bezüglich der zur Definition des oberen, bzw. des unteren  $\mu$ -Integrals zugelassenen Vergleichsfunktionen wird im Beweis von Satz 3.1.3 benötigt.

**Definition 3.1.3** i) Für  $\mu$ -messbares  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\Omega} f d\mu} &= \inf \left\{ \int_{\Omega} g d\mu; g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit} \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} g^- d\mu < \infty \text{ und } g \geq f \text{ } \mu\text{-a.e.} \right\} \in \overline{\mathbb{R}} \\ \underline{\int_{\Omega} f d\mu} &= \sup \left\{ \int_{\Omega} g d\mu; g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit} \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} g^+ d\mu < \infty \text{ und } g \leq f \text{ } \mu\text{-a.e.} \right\} \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

oberes und unteres  $\mu$ -Integral von  $f$ . Offenbar gilt stets  $\underline{\int_{\Omega} f d\mu} \leq \overline{\int_{\Omega} f d\mu}$ .

ii) Falls  $\overline{\int_{\Omega} f d\mu} = \underline{\int_{\Omega} f d\mu}$ , so heisst  $f$  **uneigentlich  $\mu$ -integrabel** mit

$$\int_{\Omega} f d\mu = \overline{\int_{\Omega} f d\mu} = \underline{\int_{\Omega} f d\mu} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(Evans-Gariepy nennen derartige  $f$  einfach “ $\mu$ -integrabel”.)

**Beispiel 3.1.1** Eine  $\mu$ -messbare Funktion  $f \geq 0$  ist stets uneigentlich integrabel.

**Beweis:** OBdA sei  $\underline{\int_{\Omega} f d\mu} < \infty$ ; insbesondere also  $f(x) < \infty$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ . Wir nehmen zunächst an,  $\mu(\Omega) < \infty$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  setze

$$A_k = \{x \in \Omega; k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Definiere die Treppenfunktionen

$$e = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k \chi_{A_k}, g = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \chi_{A_k},$$

mit  $e \leq f < g$   $\mu$ -a.e. Offenbar gilt

$$\int_{\Omega} e d\mu \leq \underline{\int_{\Omega} f d\mu} \leq \overline{\int_{\Omega} f d\mu} \leq \int_{\Omega} g d\mu \leq \int_{\Omega} e d\mu + \varepsilon \mu(\Omega).$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.

Für allgemeines  $\mu$ -messbares  $\Omega$  betrachte eine disjunkte Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$  in Würfel  $Q_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es Treppenfunktionen  $e_l, g_l: \Omega \cap Q_l \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $e_l \leq f \leq g_l$  auf  $\Omega_l := \Omega \cap Q_l$  und

$$\int_{\Omega_l} g_l d\mu \leq \int_{\Omega_l} e_l d\mu + 2^{-l} \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nach Summation über  $l$  und Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definition 3.1.4** Eine  $\mu$ -messbare Funktion  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heisst  **$\mu$ -integrabel**, falls

$$\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

(Evans-Gariepy nennen derartige  $f$  “ $\mu$ -summable”.)

**Beispiel 3.1.2** i) Ist  $f$   $\mu$ -integrabel, so ist  $f$  auch uneigentlich  $\mu$ -integrabel.

ii) Falls  $f = 0$   $\mu$ -a.e., so ist  $f$   $\mu$ -integrabel, und  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$ .

**Beweis:** i) Zerlege  $f = f_+ - f_-$ . Da  $0 \leq f_{\pm} \leq |f|$ , sind die Funktionen  $f_{\pm}$  nach Beispiel 3.1.1 uneigentlich  $\mu$ -integrabel mit  $\int_{\Omega} f_{\pm} d\mu < \infty$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es daher Treppenfunktionen  $0 \leq e_{\pm} \leq f_{\pm} \leq g_{\pm}$   $\mu$ -a.e. mit

$$0 \leq \int_{\Omega} e_{\pm} d\mu \leq \int_{\Omega} f_{\pm} d\mu \leq \int_{\Omega} g_{\pm} d\mu \leq \int_{\Omega} e_{\pm} d\mu + \varepsilon < \infty.$$

Da  $A_{\pm} = \{x; f_{\pm}(x) > 0\}$   $\mu$ -messbar, dürfen wir zudem annehmen, dass  $e_{\pm} \leq g_{\pm} = g_{\pm} \chi_{A_{\pm}} = 0$  in  $\Omega \setminus A_{\pm}$ . Dann sind  $e := e_+ - g_-$ ,  $g := g_+ - e_-$  Treppenfunktionen mit  $e \leq f < g$   $\mu$ -a.e., und es gilt

$$\int_{\Omega} e \, d\mu \leq \int_{\underline{\Omega}} f \, d\mu \leq \overline{\int_{\Omega} f \, d\mu} \leq \int_{\Omega} g \, d\mu \leq \int_{\Omega} e \, d\mu + 2\varepsilon.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.

ii) ist offensichtlich.  $\square$

**Satz 3.1.1** Seien  $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uneigentlich  $\mu$ -integabel. Falls  $f_1 \geq f_2$   $\mu$ -a.e., so folgt

$$\int_{\Omega} f_1 \, d\mu \geq \int_{\Omega} f_2 \, d\mu.$$

**Beweis:** Beachte, dass mit  $g \geq f_1$  und  $f_1 \geq f_2$   $\mu$ -a.e. auch gilt  $g \geq f_2$   $\mu$ -a.e. Wir erhalten also

$$\int_{\Omega} f_1 \, d\mu = \overline{\int_{\Omega} f_1 \, d\mu} = \inf \left\{ \int_{\Omega} g \, d\mu; g \geq f_1 \right\} \geq \overline{\int_{\Omega} f_2 \, d\mu} = \int_{\Omega} f_2 \, d\mu.$$

$\square$

Aus Satz 3.1.1 ergeben sich unmittelbar die folgenden Aussagen.

**Korollar 3.1.1** Seien  $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uneigentlich  $\mu$ -integabel mit  $f_1 = f_2$   $\mu$ -a.e. Dann gilt:  $\int_{\Omega} f_1 \, d\mu = \int_{\Omega} f_2 \, d\mu$ .

**Satz 3.1.2** (Tchebychev-Ungleichung) Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integabel. Dann gilt für alle  $a > 0$  die Abschätzung

$$\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq a\}) \leq a^{-1} \int_{\Omega} |f| \, d\mu.$$

**Beweis:** Wähle  $f_1 = |f|$ ,  $f_2 = a \chi_{\{x \in \Omega; |f(x)| \geq a\}}$  in Satz 3.1.1.  $\square$

**Satz 3.1.3** Seien  $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integabel,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g$  sowie  $\lambda f$   $\mu$ -integabel, und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g) \, d\mu &= \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu, \\ \int_{\Omega} (\lambda f) \, d\mu &= \lambda \int_{\Omega} f \, d\mu. \end{aligned}$$

**Beweis:** o) Offenbar gelten die Behauptungen für Treppenfunktionen  $f = \sum_k a_k \chi_{A_k}$ ,  $g = \sum_k b_k \chi_{B_k}$ . (Dabei dürfen wir oBdA annehmen, dass  $A_k = B_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Sonst betrachte  $(A_k \cap B_l)_{k,l \in \mathbb{N}}$ .)

i) Zu  $\varepsilon > 0$  wähle Treppenfunktionen

$$f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon, g_\varepsilon \leq g \leq g^\varepsilon$$

mit  $\int_\Omega (f^\varepsilon)^- d\mu < \infty$ ,  $\int_\Omega (f_\varepsilon)^+ d\mu < \infty$  und

$$\int_\Omega f^\varepsilon d\mu - \int_\Omega f d\mu < \varepsilon, \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega f_\varepsilon d\mu < \varepsilon,$$

und analog für  $g$ . Dann sind  $f_\varepsilon + g_\varepsilon, f^\varepsilon + g^\varepsilon$  Treppenfunktionen mit

$$f_\varepsilon + g_\varepsilon \leq f + g \leq f^\varepsilon + g^\varepsilon$$

und  $\int_\Omega (f_\varepsilon + g_\varepsilon)^+ d\mu < \infty$ ,  $\int_\Omega (f^\varepsilon + g^\varepsilon)^- d\mu < \infty$ , sowie

$$\begin{aligned} \overline{\int_\Omega (f + g) d\mu} &\leq \int_\Omega (f^\varepsilon + g^\varepsilon) d\mu = \int_\Omega f^\varepsilon d\mu + \int_\Omega g^\varepsilon d\mu \\ &\leq \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Analog

$$\underline{\int_\Omega (f + g) d\mu} \geq \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu - 2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig, folgt zunächst, dass  $f + g$  uneigentlich  $\mu$ -integabel ist mit

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

Angewandt auf  $|f|, |g|$  liefert dies

$$\int_\Omega |f + g| d\mu \leq \int_\Omega (|f| + |g|) d\mu = \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |g| d\mu < \infty,$$

also ist  $f + g$  sogar eigentlich  $\mu$ -integabel.

ii) Zu  $\varepsilon > 0$  wähle Treppenfunktionen  $f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon$  wie in Teil i). Dann sind  $\lambda f_\varepsilon, \lambda f^\varepsilon$  Treppenfunktionen mit

$$\lambda f_\varepsilon \leq \lambda f \leq \lambda f^\varepsilon$$

falls  $\lambda \geq 0$ , bzw.

$$\lambda f^\varepsilon \leq \lambda f \leq \lambda f_\varepsilon,$$

falls  $\lambda < 0$ . Falls  $\lambda \geq 0$ , folgt

$$\overline{\int_\Omega (\lambda f) d\mu} \leq \int_\Omega (\lambda f^\varepsilon) d\mu = \lambda \int_\Omega f^\varepsilon d\mu \leq \lambda \int_\Omega f d\mu + \lambda \varepsilon$$

sowie

$$\underline{\int_\Omega (\lambda f) d\mu} \geq \lambda \int_\Omega f d\mu - \lambda \varepsilon.$$

Analog, falls  $\lambda \leq 0$ . Also ist  $\lambda f$  uneigentlich  $\mu$ -integabel mit

$$\int_{\Omega} (\lambda f) d\mu = \lambda \int_{\Omega} f d\mu,$$

und

$$\int_{\Omega} |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

□

**Korollar 3.1.2** Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integabel. Dann gilt  $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$ .

**Beweis:** Mit  $-|f| \leq f \leq |f|$  folgt die Behauptung aus Satz 3.1.1 und Satz 3.1.3. □

**Korollar 3.1.3** Seien  $f, f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integabel mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu = 0.$$

Dann folgt  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mu} f$ , und es gibt eine Teilmenge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ , so dass  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -a.e. ( $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ ).

**Beweis:** Mit Satz 3.1.2 folgt für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$$

das heisst  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mu} f$ .

Der zweite Teil der Behauptung folgt nun aus Satz 2.3.2. □

**Lemma 3.1.1** Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integabel, und sei  $\Omega_1 \subset \Omega$   $\mu$ -messbar. Dann sind  $f_1 = f|_{\Omega_1}$  über  $\Omega_1$ , bzw.  $f\chi_{\Omega_1}$  über  $\Omega$   $\mu$ -integabel, und es gilt

$$\int_{\Omega_1} f_1 d\mu = \int_{\Omega} (f\chi_{\Omega_1}) d\mu.$$

**Beweis:**  $f_1$  und  $f\chi_{\Omega_1}$  sind offenbar  $\mu$ -messbar auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

o) Für jede Treppenfunktion  $g \leq f$  sind  $g_1 = g|_{\Omega_1}$ , beziehungsweise  $g\chi_{\Omega_1}$  Treppenfunktionen mit  $g_1 \leq f_1$ , beziehungsweise  $g\chi_{\Omega_1} \leq f\chi_{\Omega_1}$ , und es gilt

$$\int_{\Omega_1} g_1 d\mu = \int_{\Omega} (g\chi_{\Omega_1}) d\mu;$$

analog für Treppenfunktionen  $h \geq f$ .

i) Zu  $\varepsilon > 0$  wähle Treppenfunktionen  $g \leq f \leq h$  mit

$$\int_{\Omega} h \, d\mu - \int_{\Omega} f \, d\mu < \varepsilon, \text{ etc.}$$

Dann folgt mit  $g_1, h_1$ , etc. wie oben

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\Omega_1} f_1 \, d\mu} - \int_{\underline{\Omega_1}} f_1 \, d\mu &\leq \int_{\Omega_1} h_1 \, d\mu - \int_{\Omega_1} g_1 \, d\mu \\ &= \int_{\Omega_1} (h_1 - g_1) \, d\mu = \int_{\Omega} (h - g) \chi_{\Omega_1} \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} (h - g) \, d\mu = \int_{\Omega} h \, d\mu - \int_{\Omega} g \, d\mu < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} \, d\mu - \int_{\underline{\Omega}} f \chi_{\Omega_1} \, d\mu \leq \int_{\Omega} (h - g) \chi_{\Omega_1} \, d\mu < 2\varepsilon,$$

also sind die Funktionen  $f_1$  und  $f \chi_{\Omega_1}$  uneigentlich  $\mu$ -integrierbar. Weiter gilt

$$\int_{\Omega_1} f_1 \, d\mu - \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} \, d\mu \leq \int_{\Omega_1} h_1 \, d\mu - \int_{\Omega} g \chi_{\Omega_1} \, d\mu = \int_{\Omega} (h - g) \chi_{\Omega_1} \, d\mu < 2\varepsilon$$

und analog

$$\int_{\Omega_1} f_1 \, d\mu - \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} \, d\mu \geq \int_{\Omega_1} g_1 \, d\mu - \int_{\Omega} h \chi_{\Omega_1} \, d\mu > -2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 3.1.4** Für  $\mu$ -integrierbares  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $\Omega_1 \subset \Omega$  mit  $\mu(\Omega_1) = 0$  gilt stets

$$\int_{\Omega_1} f \, d\mu = 0.$$

**Beweis:** Da  $f \chi_{\Omega_1} = 0$   $\mu$ -a.e. folgt die Behauptung aus Korollar 3.1.1.  $\square$

**Satz 3.1.4** Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  disjunkt zerlegt in  $\mu$ -messbare Mengen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega_1} f \, d\mu + \int_{\Omega_2} f \, d\mu.$$

**Beweis:** Mit der Darstellung

$$f = f \chi_{\Omega_1} + f \chi_{\Omega_2}$$

folgt die Behauptung direkt aus Satz 3.1.3 und Lemma 3.1.1.  $\square$

Falls  $\mu = \mathcal{L}^n$ , so können wir das soeben definierte Lebesgue-Integral mit dem uns bereits bekannten Riemannschen Integral vergleichen.

**Beispiel 3.1.3** Eine beschränkte, eigentlich Riemann-integrierte Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer beschränkten, Jordan-messbaren Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist stets auch  $\mathcal{L}^n$ -integriert, und die Integrale sind gleich.

**Beweis:** Je zwei Riemannsche Treppenfunktionen (R-Treppenfunktionen)  $g \leq f \leq h$  sind auch  $\mathcal{L}^n$ -messbare  $\sigma$ -Treppenfunktionen. Es folgt (mit der Notation  $\int_{\Omega}^R f dx$  für das Riemannsche untere Integral, etc.)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}^R f dx &= \sup \left\{ \int_{\Omega} g dx; g \leq f, g \text{ R-Treppenfunktion} \right\} \leq \int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n \\ &\leq \overline{\int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n} \leq \inf \left\{ \int_{\Omega} h dx; f \leq h; h \text{ R-Treppenfunktion} \right\} = \overline{\int_{\Omega}^R f dx}. \end{aligned}$$

Falls also  $f$  R-integriert ist mit  $\int_{\Omega}^R f dx = \overline{\int_{\Omega}^R f dx} = \int_{\Omega} f dx$ , so folgt

$$\int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n = \overline{\int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n} = \int_{\Omega} f dx.$$

□

Eine präzise Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen liefert der folgende Satz.

**Satz 3.1.5 (Lebesgue)** Sei  $Q = \overline{Q} \subset \mathbb{R}^n$  ein Würfel. Eine beschränkte Funktion  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann integrierbar genau dann, wenn  $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$ , wobei

$$\Delta_f = \{x_0 \in Q; f \text{ ist nicht stetig in } x_0\}.$$

**Beweis:** *i)* Sei  $\mathcal{L}^n(\Delta_f) = 0$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G \supset \Delta_f$  offen mit  $\mathcal{L}^n(G) < \varepsilon$ . Die Menge  $K = Q \setminus G$  ist kompakt,  $f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in Q \setminus G$ . Zu  $x \in Q \setminus G$  wähle  $r = r(x) > 0$  mit

$$\text{osc}_{Q_r(x)} f = \sup_{Q_r(x)} f - \inf_{Q_r(x)} f < \varepsilon,$$

wobei  $Q_r(x)$  den offenen Würfel um  $x$  bezeichnet mit Kantenlänge  $2r$ . Endlich viele Würfel  $Q_i = Q_{r(x_i)}(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , überdecken  $K$ . Deren Komplement  $R = Q \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i \subset G$  ist eine Elementarfigur mit Jordanschem Mass

$$\mu(R) = \mathcal{L}^n(R) \leq \mathcal{L}^n(G) < \varepsilon.$$

Sei  $M = \sup_{x \in Q} |f(x)|$ . Definiere Riemannsche Treppenfunktionen  $g, h: Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) = \max_{Q_i} \{ \inf f; x \in Q_i \}, \quad h(x) = \min_{Q_i} \{ \sup f; x \in Q_i \}$$

für  $x \in P = \bigcup_{i=1}^N Q_i$ , bzw.  $g(x) = -M$ ,  $h(x) = M$  für  $x \in R$ .

Es folgt  $g \leq f \leq h$  in  $Q$ ,  $h - g \leq \varepsilon$  auf  $P$ , also

$$\begin{aligned} \overline{\int_Q^R f dx} - \int_Q^R f dx &\leq \int_Q (h - g) d\mu < \varepsilon \mathcal{L}^n(P) + 2M \mathcal{L}^n(R) \\ &\leq (2M + \mathcal{L}^n(Q)) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig, ist  $f$  somit  $R$ -integrabel.

ii) Sei  $\mathcal{L}^n(\Delta_f) > 0$ . Beachte  $\Delta_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_f^{1/k}$ , wobei

$$\Delta_f^\varepsilon = \{x \in Q; \forall r > 0: \text{osc}_{Q_r(x)} f > \varepsilon\}.$$

Wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0}) > 0.$$

Es folgt

$$\overline{\int_Q f dx} - \underline{\int_Q f dx} \geq \frac{1}{k_0} \mathcal{L}^n(\Delta_f^{1/k_0}) > 0;$$

also ist  $f$  nicht  $R$ -integrabel. □

## 3.2 Konvergenzsätze

Seien  $\mu, \Omega$  weiterhin wie oben vereinbart.

**Satz 3.2.1 (Fatou's Lemma):** Seien  $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

Beachte, dass  $f_k$  sowie  $f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \geq 0$  uneigentlich  $\mu$ -integrabel sind.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass

$$\int_{\Omega} g d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \tag{3.2.1}$$

für jede Treppenfunktion  $g = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \chi_{A_j}$  mit  $g \leq f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ .

ObdA sei  $g \geq 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_j > 0$  für  $j \geq 1$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ . Fixiere  $0 < t < 1$ .

Für  $j \in \mathbb{N}$  gilt

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,k},$$

wobei

$$B_{j,k} = \{x \in A_j; f_l(x) > ta_j \text{ für } l \geq k\}.$$

Da offenbar für alle  $j, k \in \mathbb{N}$  ebenfalls gilt

$$B_{j,k} \subset B_{j,k+1},$$

folgt mit Satz 1.1.2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_{j,k}) = \mu(A_j).$$

Für festes  $J, k \in \mathbb{N}$  erhalten wir zudem mit Satz 3.1.4:

$$\int_{\Omega} f_k d\mu \geq \sum_{j=1}^J \int_{A_j} f_k d\mu \geq \sum_{j=1}^J \int_{B_{j,k}} f_k d\mu \geq t \sum_{j=1}^J a_j \mu(B_{j,k}).$$

Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \geq t \sum_{j=1}^J a_j \mu(A_j), \forall J \in \mathbb{N}.$$

Nach Grenzübergang  $J \rightarrow \infty$  ergibt dies

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \geq t \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(A_j) = t \int_{\Omega} g d\mu.$$

Die gewünschte Ungleichung (3.2.1) folgt mit  $t \rightarrow 1$ .  $\square$

**Beispiel 3.2.1** Das Beispiel  $\mu = \mathcal{L}^n, \Omega = \mathbb{R}^n, f_k \equiv -k^{-n} \chi_{B_k(0)}, k \in \mathbb{N}$ , zeigt, dass die Bedingung  $f_k \geq 0$  im allgemeinen notwendig ist.

**Beispiel 3.2.2** Seien  $f, f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar,  $k \in \mathbb{N}$ , mit

$$\int_{\Omega} |f_k - f| d\mu \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty),$$

und sei  $H \geq 0$  eine Carathéodory Funktion gemäss Definition 2.1.3. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} H(x, f(x)) d\mu(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H(x, f_k(x)) d\mu(x) =: I.$$

**Beweis:** Wähle eine Teilfolge  $\Lambda$  mit  $I = \lim_{k \rightarrow \infty; k \in \Lambda} \int_{\Omega} H(x, f_k(x)) d\mu(x)$ .

Nach Korollar 3.1.3 folgt zunächst

$$f_k \xrightarrow{\mu} f (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda);$$

für eine weitere Teilfolge  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$  konvergiert nach Satz 2.3.2 dann  $f_k$  sogar  $\mu$ -a.e. gegen  $f$ , falls  $k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda}$ . Da  $H(x, \cdot)$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$  stetig ist, folgt

$$H(x, f_k(x)) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda})} H(x, f(x)) \mu\text{-a.e. } x \in \Omega.$$

Satz 3.2.1 liefert dann

$$\int_{\Omega} H(x, f(x)) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda}} \int_{\Omega} H(x, f_k(x)) d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H(x, f_k(x)) d\mu,$$

wie gewünscht.  $\square$

**Satz 3.2.2** (Beppo Levi, Monotone Konvergenz): Seien  $f_k: \Omega \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -messbar mit  $f_1 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots, \forall k$ . Dann folgt

$$\int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

**Beweis:** Mit Satz 3.1.1 folgt

$$\int_{\Omega} f_j d\mu \leq \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu, \forall j.$$

Also

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \leq \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

Die noch fehlende Ungleichung liefert Satz 3.2.1.  $\square$

**Bemerkung 3.2.1** Umgekehrt kann man Satz 3.2.1 auch aus Satz 3.2.2 herleiten. Sei dazu  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  wie in Satz 3.2.1. Für

$$g_k = \inf_{l \geq k} f_l$$

gilt  $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_{k-1} \leq g_k \leq f_l$  ( $l \geq k \in \mathbb{N}$ ), und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \quad \int_{\Omega} g_k d\mu \leq \inf_{l \geq k} \int_{\Omega} f_l d\mu.$$

Nach Satz 3.2.2 gilt also

$$\int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

**Satz 3.2.3** (Lebesgue, Dominierte Konvergenz): Sei  $g: \Omega \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -integrierbar, und seien  $f, f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar mit  $|f_k| \leq g, k \in \mathbb{N}$ , und  $f_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f$   $\mu$ -a.e.

Dann gilt

$$\left| \int_{\Omega} f_k d\mu - \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Beweis:** Beachte  $|f| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k| \leq g$   $\mu$ -a.e., insbesondere ist  $|f_k - f| \leq 2g$   $\mu$ -integrierbar und

$$2g - |f_k - f| \geq 0, \forall k.$$

Mit Satz 3.2.1 und Satz 3.1.3 folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2g d\mu &= \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} (2g - |f_k - f|) d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (2g - |f_k - f|) d\mu = \int_{\Omega} 2g d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu = 0.$$

Die noch fehlende Ungleichung liefern Korollar 3.1.1 und Satz 3.1.3.  $\square$

Eine **optimale** Konvergenzbedingung liefert der Satz von Vitali, siehe unten.

**Anwendung 3.2.1** (Differenzieren unter dem Integral) Sei  $f = f(x, y): \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit

i) Für festes  $x$  ist  $y \mapsto f(x, y)$  über  $[0, 1]$  Lebesgue-integrierbar;

ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existiert und ist beschränkt. (Lokal gleichmässige Beschränktheit in  $x$  genügt.)

Dann ist  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  für festes  $x \in \mathbb{R}$  bezüglich  $y$  über  $[0, 1]$  Lebesgue-integrierbar, und

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

**Beweis:** Für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$  gilt nach Satz 3.1.3

$$\frac{\int_0^1 f(x+h, y) dy - \int_0^1 f(x, y) dy}{h} = \int_0^1 \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy.$$

Für jede Folge  $h_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$  gilt

$$g_k(y) := \frac{f(x+h_k, y) - f(x, y)}{h_k} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

wobei mit dem Mittelwertsatz folgt

$$|g_k| \leq \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| =: C, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 2.1.1 ist  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$  bezüglich  $y \in [0, 1]$  Lebesgue-messbar und integrierbar, und nach Satz 3.2.3 gilt

$$\int_0^1 g_k(y) dy \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Dies gilt für **jede** Folge  $h_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Also existiert

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\int_0^1 f(x+h, y) dy - \int_0^1 f(x, y) dy}{h} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

□

### 3.3 Absolutstetigkeit des Integrals

Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar. Für  $\mu$ -messbares  $A \subset \Omega$  setze

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Gemäss Satz 3.1.4 wird hierdurch eine ( $\sigma$ -)additive (Übung) Mengenfunktion  $\nu = \mu \lfloor f$  erklärt, das “unbestimmte Integral von  $f$ ”. Falls  $f \geq 0$   $\mu$ -a.e., definiert

die Carathéodory-Erweiterung von  $\mu|f$  ein Radonmass (Übung). Daher bezeichnen Evans-Gariepy die Mengenfunktion  $\mu|f$  als “signed measure”.

Beachte weiter, dass  $\mu|A = \mu|\chi_A$  in dieser Terminologie.

Wegen Korollar 3.1.4 gilt für alle  $A \subset \Omega$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0. \quad (3.3.1)$$

**Definition 3.3.1** Eine Mengenfunktion  $\nu$  mit der Eigenschaft (3.3.1) heisst bezüglich  $\mu$  **absolut stetig**,  $\nu \ll \mu$ .

Die Bezeichnung wird gerechtfertigt durch den folgenden

**Satz 3.3.1** Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrabel. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \subset \Omega, A \mu\text{-messbar}: \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

**Beweis:** (Indirekt). Annahme, für ein  $\varepsilon > 0$  existieren  $\mu$ -messbare  $A_k \subset \Omega$  mit

$$\mu(A_k) < 2^{-k}, \int_{A_k} |f| d\mu \geq \varepsilon, k \in \mathbb{N}.$$

Setze  $B_l = \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k$  mit  $B_{l+1} \subset B_l \subset \dots \subset \Omega$  und

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mu(A_k) < 2^{1-l}$$

sowie

$$\int_{B_l} |f| d\mu = \int_{\Omega} |f|\chi_{B_l} d\mu \geq \varepsilon, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Setze  $A = \bigcap_{l=1}^{\infty} B_l$ . Mit Satz 1.1.2 erhalten wir

$$\mu(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(B_l) = 0.$$

Weiter gilt

$$g_l := |f|\chi_{B_l} \rightarrow |f|\chi_A \quad (l \rightarrow \infty)$$

und

$$|g_l| \leq |f| \text{ in } \Omega, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz 3.2.3 folgt

$$\int_A |f| d\mu = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_l d\mu = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{B_l} |f| d\mu \geq \varepsilon$$

im Widerspruch zu (3.3.1). □

Abstrakt können wir den Satz 3.3.1 auch wie folgt formulieren.

**Satz 3.3.2** Seien  $\mu, \nu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  Masse,  $\nu \ll \mu$ , wobei  $\nu(X) < \infty$ . Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \subset X: \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

**Beweis:** Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.3.1 unter Verwendung von Satz 1.1.2 für abstrakte Masse. □

### 3.4 Der Satz von Vitali

Nun können wir ein **optimales** (notwendiges und hinreichendes) Konvergenzkriterium formulieren.

Seien  $f, f_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrabel,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definition 3.4.1** Die Familie  $(f_k)$  hat **gleichgradig absolutstetige Integrale**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall k \in \mathbb{N} \forall A \subset \Omega, A \mu\text{-messbar: } \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_k| d\mu < \varepsilon. \quad (3.4.1)$$

**Satz 3.4.1** (Vitali): Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ , so sind äquivalent

- i)  $f_k \xrightarrow{\mu} f$  ( $k \rightarrow \infty$ ), und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  hat gleichgradig absolutstetige Integrale;
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu = 0$ .

**Beispiel 3.4.1** Die Voraussetzung  $\mu(\Omega) < \infty$  ist im allgemeinen notwendig, wie das Beispiel  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$ ,  $f_k \equiv k^{-n} \chi_{B_k(0)} \xrightarrow{\mu} f \equiv 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) zeigt.  $(f_k)$  hat gleichgradig absolutstetige Integrale, jedoch gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k| d\mu = c > 0$  mit der von  $k$  unabhängigen Konstanten  $c = \mathcal{L}^n(B_1(0))$ , während  $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0$ .

**Beweis:** ii)  $\Rightarrow$  i): Falls  $\int_{\Omega} |f_k - f| d\mu \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), so folgt  $f_k \xrightarrow[\mu]{(k \rightarrow \infty)} f$  nach Korollar 3.1.3.

Zum Beweis von (3.4.1) wähle zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein geeignetes  $k_0 = k_0(\varepsilon)$  mit

$$\int_{\Omega} |f_k - f| d\mu < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

und dazu  $\delta > 0$  so, dass für alle  $\mu$ -messbaren Mengen  $A \subset \Omega$  gilt

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon, \quad \max_{1 \leq k \leq k_0} \int_A |f_k| d\mu < \varepsilon,$$

wobei wir für  $1 \leq k \leq k_0$  Satz 3.3.1 benutzen. Nach Wahl von  $k_0$  folgt

$$\int_A |f_k| d\mu \leq \int_A |f| d\mu + \int_A |f_k - f| d\mu < 2\varepsilon$$

für  $k \geq k_0$ , falls  $\mu(A) < \delta$ , und damit (3.4.1).

i)  $\Rightarrow$  ii): Sei  $f_k \xrightarrow{\mu} f$  ( $k \rightarrow \infty$ ) mit gleichgradig absolutstetigen Integralen.

Widerspruchsweise nehmen wir an

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu > 0.$$

OBdA dürfen wir (allenfalls nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge) sogar annehmen

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu > 0.$$

Nach Satz 2.3.2 existiert eine Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$ , so dass  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -a.e., falls  $k \rightarrow \infty, k \in \Lambda$ .

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$  so, dass für  $A \subset \Omega$  mit  $\mu(A) < \delta$  folgt

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon, \int_A |f_k| d\mu < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Zu diesem  $\delta$  wähle  $F \subset \Omega$  nach Satz 2.2.1 mit  $\mu(\Omega \setminus F) < \delta$ , so dass

$$\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \Lambda).$$

Bestimme  $k_0$  mit

$$\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega)}, \quad \forall k \geq k_0, k \in \Lambda.$$

Es folgt für  $k \geq k_0, k \in \Lambda$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu &= \int_{\Omega \setminus F} \dots + \int_F \dots \\ &\leq \int_{\Omega \setminus F} (|f_k| + |f|) d\mu + \int_F \sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| d\mu < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt der gewünschte Widerspruch.  $\square$

**Beispiel 3.4.2** Sei  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $F = F(x, y): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Carathéodory-Funktion gemäss Definition 2.1.3. Mit Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$  gelte zusätzlich

$$|F(x, y)| \leq C(1 + |y|^p) \quad \mu\text{-a.e. } x \in \Omega, y \in \mathbb{R}.$$

Seien weiter  $u, u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -messbar mit

$$\int_{\Omega} |u|^p d\mu < \infty, \int_{\Omega} |u_k|^p d\mu < \infty, \int_{\Omega} |u_k - u|^p d\mu \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dann folgt

$$\int_{\Omega} F(x, u_k(x)) d\mu \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u(x)) d\mu \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.4.2)$$

**Beweis:** Setze

$$f(x) := F(x, u(x)), f_k(x) = F(x, u_k(x)), k \in \mathbb{N}.$$

Nach Beispiel 2.1.4 sind die Funktionen  $f, f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt nach Voraussetzung

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu \leq C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p) d\mu < \infty;$$

also ist  $f$   $\mu$ -integrierbar, ebenso  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Zum Beweis von (3.4.2) verifizieren wir die Voraussetzungen in Satz 3.4.1.i).

**Behauptung 1:**  $f_k \xrightarrow{\mu} f$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Beweis:** Wir argumentieren ähnlich wie im Beispiel 3.2.2.

i) Mit der Tchebychev-Ungleichung Satz 3.1.2 folgt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mu(\{x; |u_k(x) - u(x)| > \varepsilon\}) &= \mu(\{x; |u_k(x) - u(x)|^p > \varepsilon^p\}) \\ &\leq \varepsilon^{-p} \int_{\Omega} |u_k(x) - u(x)|^p d\mu \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty); \end{aligned}$$

also gilt  $u_k \xrightarrow{\mu} u$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

ii) Sei  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  eine Teilfolge. Nach Satz 2.3.2 gibt es eine weitere Teilfolge  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$  mit

$$u_k \rightarrow u \quad \mu\text{-a.e.} \quad (k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda}).$$

Da  $F(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ , folgt

$$f_k(x) = F(x, u_k(x)) \rightarrow F(x, u(x)) = f(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda})$$

für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ , nach Satz 2.3.1 also

$$f_k \xrightarrow{\mu} f \quad (k \rightarrow \infty, k \in \tilde{\Lambda}).$$

Da dies für **jede** Teilfolge  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Behauptung 2:** Die Integrale  $(\int |f_k| d\mu)_{k \in \mathbb{N}}$  sind gleichgradig absolut stetig.

**Beweis:** Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$  mit

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |u|^p d\mu < \varepsilon$$

und wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\int_{\Omega} |u_k - u|^p d\mu < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Mit der punktweisen Ungleichung

$$|u_k|^p \leq (|u| + |u_k - u|)^p \leq 2^p(|u|^p + |u_k - u|^p)$$

folgt für jedes  $\mu$ -messbare  $A \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_A |f_k| d\mu &\leq C \int_A (1 + |u_k|^p) d\mu \leq C\mu(A) + 2^p C \int_A (|u|^p + |u_k - u|^p) d\mu \\ &\leq C\delta + 2^p C\varepsilon + 2^p C\varepsilon \leq C(1 + 2^{p+1})\varepsilon, \end{aligned}$$

falls  $\mu(A) < \delta \leq \varepsilon$ ,  $k \geq k_0$ .  $\square$

### 3.5 Die Räume $L^p(\Omega, \mu)$ , $1 \leq p \leq \infty$

Die  $L^p$ -Räume sind für die Analysis noch wichtiger als die Räume  $C^0(\Omega)$ ,  $C^1(\Omega)$ , ...  
Es seien weiterhin  $\mu, \Omega$  wie zu Beginn dieses Abschnitts vereinbart.

**Definition 3.5.1** Für  $\mu$ -messbares  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $1 \leq p < \infty$  sei

$$\|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \infty,$$

und

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega, \mu)} &= \mu - \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \inf\{C \in [0, \infty]; |f| \leq C \text{ } \mu\text{-a.e.}\} \leq \infty. \end{aligned}$$

Für  $1 \leq p \leq \infty$  setze

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; f \text{ ist } \mu\text{-messbar, } \|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} < \infty\}.$$

**Bemerkung 3.5.1** Für  $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$  gilt  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega, \mu)}$  für  $\mu$ -a.e.  $x$ .

**Beweis:** Betrachte eine Folge  $(C_k)$  mit  $C_k \downarrow \|f\|_{L^\infty(\Omega, \mu)}$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Setze  $A_k = \{x; |f(x)| > C_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Da nach Definition  $\mu(A_k) = 0$  für alle  $k$ , hat auch  $A = \cup_k A_k$  das Mass  $\mu(A) = 0$ , und es gilt  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega, \mu)}$  für alle  $x \in \Omega \setminus A$ .  $\square$

**Beispiel 3.5.1** Sei  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$  das Lebesguesche Mass.

Für  $\alpha > 0$  gilt nach Beispiel 3.1.3

$$\int_{B_1(0)} \left( \frac{1}{|x|^\alpha} \right)^p d\mathcal{L}^n = C_n \int_0^1 r^{n-1-\alpha p} dr = \begin{cases} \frac{C_n}{n-\alpha p}, & \text{falls } p < \frac{n}{\alpha} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $\alpha > 0$ ,  $p \geq 1$  gilt daher

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$$

genau dann, wenn  $p < \frac{n}{\alpha}$ .

Wir wollen nun aus  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  einen normierten Raum erzeugen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass für  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  gilt

$$f = g \text{ } \mu\text{-a.e.} \Rightarrow \|f - g\|_{L^p(\Omega, \mu)} = 0;$$

das heisst,  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega, \mu)}$  ist nicht definit.

Mittels einer Äquivalenzklassenbildung können wir jedoch aus  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  in kanonischer Weise einen Raum erzeugen, auf welchem  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega, \mu)}$  eine definite Norm induziert. (Die übrigen Eigenschaften einer Norm müssen jedoch noch bewiesen werden.)

Für  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  setze

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-a.e.} \Leftrightarrow \|f - g\|_{L^p(\Omega, \mu)} = 0$$

und definiere die Äquivalenzklasse

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu); g \sim f\}.$$

Schliesslich setze

$$L^p(\Omega, \mu) = \{[f]; f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)\}$$

sowie

$$\|[f]\|_{L^p(\Omega, \mu)} := \inf_{g \sim f} \|g\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|f\|_{L^p(\Omega, \mu)}, f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu).$$

**Konvention:** Im folgenden identifizieren wir  $[f]$  mit einem beliebigen Vertreter  $f \in [f]$ . “Funktionen”  $f \in L^p(\Omega, \mu)$  sind damit im allgemeinen nur bis auf  $\mu$ -Nullmengen erklärt. Man kann jedoch stets auch einen punktweise definierten Repräsentanten  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  fixieren. Oft schreiben wir  $L^p = L^p(\Omega, \mu)$ , etc.

**Satz 3.5.1** *Der Raum  $L^p(\Omega, \mu)$  ist für  $1 \leq p \leq \infty$  ein vollständiger normierter Raum.*

**Beweis:** Die positive Homogenität der Norm ist klar; zu zeigen sind die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit. Wir stellen zunächst die benötigten Hilfsmittel zusammen.

**Lemma 3.5.1** (*Young'sche Ungleichung*). *Seien  $1 < p, q < \infty$  Zahlen mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \geq 0.$$

**Beweis:** OBdA sei  $b > 0$ . Die Funktion

$$a \mapsto ab - \frac{a^p}{p}, a > 0$$

nimmt bei  $a^* = b^{\frac{1}{p-1}}$  ihr Supremum an; also gilt für alle  $a$

$$ab - \frac{a^p}{p} \leq \sup_{a>0} \left( ab - \frac{a^p}{p} \right) = b^{\frac{p}{p-1}} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{b^q}{q}.$$

□

**Bemerkung 3.5.2** *Für eine konvexe Funktion  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(a)/a \rightarrow \infty$  für  $|a| \rightarrow \infty$  wird durch*

$$H^*(b) = \sup_a (ab - H(a))$$

eine konvexe Funktion  $H^*$  definiert, die zu  $H$  **konjugiert konvexe Funktion**.

Nach Lemma 3.5.1 ist somit  $b \mapsto \frac{|b|^q}{q}$  die zu  $a \mapsto \frac{|a|^p}{p}$  konjugiert konvexe Funktion; Zahlen  $p$  und  $q$  mit  $1/p + 1/q = 1$  heissen daher **konjugiert**.

**Korollar 3.5.1** (Höldersche Ungleichung) Seien  $1 \leq p, q \leq \infty$  konjugiert mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \mu)$ . Dann gilt:  $f \cdot g \in L^1(\Omega, \mu)$ , und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Beweis:** OBdA sei  $p \leq q$ . Der Fall  $p = 1, q = \infty$  ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung

$$|fg| \leq |f| \cdot \|g\|_{L^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}$$

und Satz 3.1.1 sowie Satz 3.1.3.

Für  $1 < p, q < \infty$  nimm zunächst an, dass  $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ . Aufgrund von Lemma 3.5.1 gilt

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \int_{\Omega} \left( \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wie gewünscht. Für allgemeine  $f, g \neq 0$  betrachte  $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}$ ,  $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_{L^q}}$ .  $\square$

**Korollar 3.5.2** i) Es seien  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$  mit  $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ . Dann gilt  $fg \in L^r$ , und  $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

ii) Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ , so folgt  $L^s \subset L^r$  für  $1 \leq r < s \leq \infty$ .

**Beweis:** i) Die Aussage ist klar, falls  $p = q = r = \infty$ . Für  $r < \infty$  folgt die Aussage aus Korollar 3.5.1, da  $|f|^r \in L^{p/r}$ ,  $|g|^r \in L^{q/r}$  mit  $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$ .

ii) Da  $\mu(\Omega) < \infty$ , folgt  $g \equiv 1 \in L^{\frac{rs}{s-r}}$ . Beachte  $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{s-r}{rs}$ . Die Aussage folgt somit aus i).  $\square$

**Korollar 3.5.3** (Minkowski Ungleichung): Sei  $1 \leq p \leq \infty$ , und seien  $f, g \in L^p = L^p(\Omega, \mu)$ . Dann gilt  $f + g \in L^p$ , und

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

**Beweis:** Der Fall  $p = 1$  ergibt sich aus Satz 3.1.1, Satz 3.1.3 und der punktweisen Abschätzung  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Ebenso folgt die Behauptung für  $p = \infty$  aus der Abschätzung  $|f + g| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}$

Für  $1 < p < \infty$  sei  $q = \frac{p}{p-1}$  der zu  $p$  konjugierte Exponent. Aus der Abschätzung

$$|(f + g)(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \quad x \in \Omega,$$

folgt  $f + g \in L^p$  sowie  $|f + g|^{p-1} \in L^q$ . Korollar 3.5.1 liefert

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q} = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

Nach Kürzen von  $\|f + g\|_{L^p}^{p-1}$  erhalten wir das gewünschte Resultat.  $\square$

**Lemma 3.5.2** (Vollständigkeit von  $L^p(\Omega, \mu)$ ) Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^p = L^p(\Omega, \mu)$ . Dann existiert  $f \in L^p$  mit  $\|f_k - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Beweis:** *i)* Für  $p = \infty$  ist  $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$  eine Cauchy-Folge, also existiert  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ . Die Behauptung folgt aus der Abschätzung

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \|f_k - f_l\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

gleichmässig für  $\mu$ -a.e.  $x \in \Omega$ .

*ii)* Sei  $p < \infty$ . Wir konstruieren zunächst eine konvergente Teilfolge  $(f_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Wähle  $\varphi(k), k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_l - f_m\|_{L^p} < 2^{-k}, \quad \forall l, m \geq \varphi(k).$$

Setze

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}|.$$

$F$  ist  $\mu$ -messbar nach Satz 2.1.1,  $F \geq 0$ , also ist  $F$  (uneigentlich) integrierbar. Satz 3.2.2 und Korollar 3.5.3 liefern

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} |F|^p d\mu \right)^{1/p} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^l |f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}| \right)^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^l |f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_{L^p} < \infty. \end{aligned}$$

Das heisst,  $F \in L^p$ ; insbesondere gilt  $F < \infty$   $\mu$ -a.e., und

$$f := \lim_{l \rightarrow \infty} f_{\varphi(l)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l-1} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}) + f_{\varphi(1)}$$

existiert  $\mu$ -a.e. in  $\Omega$ . Weiter gilt:

$$|f - f_{\varphi(l)}| = \left| \sum_{k=l}^{\infty} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}) \right| \leq F, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere folgt damit auch  $f \in L^p$ , und mit Satz 3.2.3 erhalten wir

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f - f_{\varphi(l)}|^p d\mu = 0;$$

das heisst,  $f_{\varphi(l)} \rightarrow f$  in  $L^p$  ( $l \rightarrow \infty$ ).

Es ist nun leicht einzusehen, dass auch die ganze Folge  $(f_k)$  gegen  $f$  konvergiert. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $l \geq \varphi(k)$  gilt

$$\begin{aligned} \|f_l - f\|_{L^p} &\leq \|f_l - f_{\varphi(k)}\|_{L^p} + \|f_{\varphi(k)} - f\|_{L^p} \\ &\leq 2^{-k} + \|f_{\varphi(k)} - f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f\|_{L^p} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (2^{-k} + \|f_{\varphi(k)} - f\|_{L^p}) = 0.$$

□

**Definition 3.5.2** Ein Banachraum  $X$  heisst **separabel**, falls  $X$  eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

**Satz 3.5.2** Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt:

- i)  $L^p(\Omega, \mu)$  ist separabel;
- ii)  $C_0^0(\overline{\Omega})$  liegt dicht in  $L^p(\Omega, \mu)$ .

Dabei bezeichnet  $C_0^0(\overline{\Omega})$  den Raum der stetigen Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem "Träger"

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}} \subset \subset \Omega.$$

**Bemerkung 3.5.3** Für  $p = \infty$  gelten die Aussagen von Satz 3.5.2 nicht: Offenbar ist  $C^0(\overline{\Omega})$  ein abgeschlossener, echter Teilraum von  $L^\infty(\Omega, \mu)$ . Das folgende Beispiel zeigt, dass  $L^\infty(\Omega, \mu)$  im allgemeinen auch nicht separabel ist.

**Beispiel 3.5.2** Sei  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mu = \mathcal{L}^1$ . Für  $0 < t \leq 1$  setze  $f_t = \chi_{[0,t]}$  mit  $\|f_t - f_s\|_{L^\infty} = 1$  ( $s \neq t$ ). Die Menge  $(f_t)_{t>0}$  ist überabzählbar. Gäbe es eine abzählbare Menge  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\inf_k \|f_t - e_k\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$  für alle  $t > 0$ , so wäre die Abbildung, welche  $k \in \mathbb{N}$  das eindeutige  $t = t(k)$  mit  $\|f_t - e_k\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}$  zuordnet, surjektiv. Dies ist aber unmöglich.

**Beweis von Satz 3.5.2:** Nach dem Weierstrassschen Approximationssatz liegen die Polynome dicht in  $C^0(\overline{\Omega})$  für jedes  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ . Somit folgt i) aus ii). Wir führen den Beweis jedoch unabhängig und erhalten auf diesem Wege auch einen elementaren Beweis für die Aussage ii).

i) Es sei  $E$  die abzählbare Menge

$$E = \left\{ \sum_{k=1}^N a_k \chi_{Q_k}; a_k \in \mathbb{Q}, Q_k \subset \mathbb{R}^n \text{ ist Teilwürfel} \right.$$

eines dyadischen Gitters mit Kantenlänge  $2^{-l}$ .

Wir zeigen:  $E$  liegt dicht in  $L^p(\Omega, \mu)$ . Sei  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $f = f^+ - f^-$ ,  $f^\pm \geq 0$ . ObdA sei  $f = f^+$ . Nach Satz 2.1.2 ist  $f$  monotoner Limes von Treppenfunktionen  $f_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{A_j}$ . Mit Satz 3.2.3 folgt  $\|f_k - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Es genügt daher, die folgende Behauptung zu zeigen.

**Behauptung:**  $\chi_A \in \overline{E}$  für jedes  $\mu$ -messbare  $A \subset \Omega$  mit  $\mu(A) < \infty$ .

**Beweis:** Nach Satz 1.7.1 gilt

$$\mu(A) = \inf_{A \subset G, G \text{ offen}} \mu(G).$$

Wähle  $G_k \supset A$ ,  $G_k$  offen,  $G_{k+1} \subset G_k$ , mit

$$\mu(G_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da  $(\chi_{G_k} - \chi_A) \in \{0, 1\}$ , folgt

$$\int_{\Omega} |\chi_{G_k} - \chi_A|^p d\mu = \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Daher dürfen wir  $A$  als offen voraussetzen. Nach Satz 1.3.1 gibt es disjunkte dyadische Würfel  $I_l$  mit  $A = \bigcup_{l=1}^{\infty} I_l$ , und  $\mu(A) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(I_l)$  nach Satz 1.1.2. Es folgt

$$\|\chi_A - \sum_{l=1}^k \chi_{I_l}\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

und offenbar gilt  $\sum_{l=1}^k \chi_{I_l} \in E$ ,  $\forall k$ . □

ii) Wegen i) genügt es zu zeigen, dass für jeden Würfel  $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$  stetige (sogar glatte) Funktionen  $f_k$  existieren mit  $f_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \chi_Q$  in  $L^p(\Omega, \mu)$ . Die  $f_k$  erhält man leicht durch "Abglätten" der "Kanten" von  $\chi_Q$ . □

Die Räume  $L^p(\Omega, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , beziehungsweise  $L^1(\Omega, \mu)$ ,  $L^\infty(\Omega, \mu)$  unterscheiden sich durch ihre "Geometrie".

**Bemerkung 3.5.4** Die 1-Kugel in  $L^p(\Omega, \mu)$  ist konvex für  $1 \leq p \leq \infty$ , für  $1 < p < \infty$  sogar **strikt** konvex (für  $p = 1$  oder  $p = \infty$  hingegen nicht). Vergleiche die  $p$ -Normen in  $\mathbb{R}^2$ .

Die strikte Konvexität der Normkugel hat auch etwas mit dem folgenden Kriterium für Konvergenz in  $L^p(\Omega, \mu)$  zu tun. (Dieses gilt jedoch auch im Falle  $p = 1$ .)

**Satz 3.5.3** Seien  $f, f_k \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Es sind äquivalent:

i)  $\|f_k - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$ ;

ii)  $f_k \xrightarrow{\mu} f \quad (k \rightarrow \infty)$ , und  $\|f_k\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^p}$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Beweis:** i)  $\Rightarrow$  ii): Masskonvergenz folgt analog Korollar 3.1.3. Die Dreiecksungleichung, Korollar 3.5.3, liefert

$$\left| \|f_k\|_{L^p} - \|f\|_{L^p} \right| \leq \|f_k - f\|_{L^p}.$$

ii)  $\Rightarrow$  i): Beachte, dass  $2^p|f_k|^p + 2^p|f|^p - |f_k - f|^p \geq 0$ . Mit Fatou's Lemma, Satz 3.2.1, erhalten wir für jede punktweise konvergente Teilfolge

$$\begin{aligned} & 2^{p+1} \int_{\Omega} |f|^p d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f|^p d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (2^p|f_k|^p + 2^p|f|^p - |f_k - f|^p) d\mu \\ &\geq \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} (2^p|f_k|^p + 2^p|f|^p - |f_k - f|^p) d\mu = 2^{p+1} \int_{\Omega} |f|^p d\mu. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.3.2 enthält somit jede Teilfolge von  $(f_k)$  eine normkonvergente Teilfolge. Die Behauptung folgt.  $\square$

## 4 Produktmasse, Mehrfache Integrale

Die Integration stetiger Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch das Auffinden von Stammfunktionen möglich. Durch die Auflösung von Gebietsintegralen in mehrfache eindimensionale (Riemann-)Integrale wird das Problem der Integration stetiger Funktionen in höheren Dimensionen gelöst.

Sei z.B.  $f \in C^0([a, b] \times [c, d])$ . Dann ist  $f$  über  $I := [a, b] \times [c, d]$   $R$ -integrierbar, und

$$\int_I f d\mathcal{L}^2 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Ein ähnliches Prinzip gilt auch, wenn wir einen allgemeineren Massbegriff zugrunde legen.

### 4.1 Der Satz von Fubini

Seien  $X, Y$  irgendwelche Mengen, und seien  $\mu$ , bzw.  $\nu$  Masse auf  $X$ , bzw.  $Y$ .

**Definition 4.1.1** Das **Produktmass**  $\mu \times \nu: 2^{X \times Y} \rightarrow [0, \infty]$  wird für  $S \subset X \times Y$  erklärt durch

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i); S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, \right. \\ \left. A_i \subset X \text{ } \mu\text{-messbar}, B_i \subset Y \text{ } \nu\text{-messbar}, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Bemerkung 4.1.1** Falls man für messbare  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  als Produktinhalt

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

definiert, so entspricht die obige Definition der Konstruktion gemäss Satz 1.2.1. (Indem man  $\lambda$  additiv auf (endliche) disjunkte Vereinigungen derartiger Mengen  $A \times B$  ("Elementarfiguren") ausdehnt, so erhält man sogar ein Prämass, wie wir im Beweis von Satz 4.1.1.i) sehen werden; also ist  $\mu \times \nu$  die Carathéodory-Erweiterung von  $\lambda$  nach Satz 1.2.2.)

**Beispiel 4.1.1** Falls  $X = \mathbb{R}^k$ ,  $Y = \mathbb{R}^l$  und falls  $\mu = \mathcal{L}^k$ ,  $\nu = \mathcal{L}^l$  das  $k$ -, bzw.  $l$ -dimensionale Lebesgue-Mass, so gilt offenbar  $\mu \times \nu = \mathcal{L}^n$ ,  $n = k + l$  (Übung).

Dies ist im wesentlichen die Situation, die wir im folgenden betrachten wollen. Der folgende Satz 4.1.1 gilt jedoch für allgemeinere Masse.

**Satz 4.1.1** (Fubini). Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $X = \mathbb{R}^k$ , bzw.  $Y = \mathbb{R}^l$ ,  $\mu \times \nu$  deren Produktmass auf  $X \times Y = \mathbb{R}^n$ ,  $n = k + l$ . Dann gilt:

i) Für  $\mu$ -messbares  $A \subset X$ ,  $\nu$ -messbares  $B \subset Y$  ist  $A \times B$  messbar bezüglich  $\mu \times \nu$ , und

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

ii) Sei  $S \subset X \times Y$  messbar bezüglich  $\mu \times \nu$  mit  $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ . Dann ist die Menge  $S_y = \{x; (x, y) \in S\}$  für  $\nu$ -a.e.  $y$  bzgl.  $\mu$  messbar, und die Abbildung

$$y \mapsto \mu(S_y) = \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x)$$

ist  $\nu$ -integabel mit

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_Y \left( \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Eine analoge Aussage gilt für  $S_x = \{y; (x, y) \in S\}$ , etc.

iii)  $\mu \times \nu$  ist ein Radonmass.

iv) Für  $(\mu \times \nu)$ -integrables  $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sind die Abbildungen

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x),$$

bzw.

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

bzgl.  $\nu$ , bzw.  $\mu$  integabel, und es gilt

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Beweis:** Setze

$$\mathcal{F} = \{S \subset X \times Y; S \text{ erfüllt (4.1.1), (4.1.2)}\},$$

wobei

$$x \mapsto \chi_S(x, y) \text{ ist } \mu\text{-messbar für } \nu\text{-a.e. } y, \quad (4.1.1)$$

und

$$y \mapsto \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x) = \mu(S_y) \text{ ist } \nu\text{-messbar.} \quad (4.1.2)$$

Für  $S \in \mathcal{F}$  setze

$$\rho(S) = \int_Y \left( \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Unser Ziel ist nun, für  $(\mu \times \nu)$ -messbare  $S \subset X \times Y$  die Aussagen  $S \in \mathcal{F}$  und  $\rho(S) = (\mu \times \nu)(S)$  zu zeigen, insbesondere für  $S = A \times B$ .

Definiere dazu die Familien

$$\mathcal{P}_0 = \{A \times B; A \subset X \text{ } \mu\text{-messbar, } B \subset Y \text{ } \nu\text{-messbar}\},$$

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j; S_j \in \mathcal{P}_0 \right\}, \quad \mathcal{P}_2 = \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j; R_j \in \mathcal{P}_1 \right\}.$$

**Lemma 4.1.1**  $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{F}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

**Beweis:** *o)* Offenbar gilt  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$ , und

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \text{ für } A \times B \in \mathcal{P}_0. \quad (4.1.3)$$

*i)* Wir zeigen,  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$ , und für  $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$  mit disjunkten  $S_j \in \mathcal{P}_0$  gilt

$$\rho(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j). \quad (4.1.4)$$

Für  $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}_0$  gilt

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}_0.$$

Ebenso kann man

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2))$$

als disjunkte Vereinigung von Mengen in  $\mathcal{P}_0$  darstellen.

Damit kann jedes  $S \in \mathcal{P}_1$  als **disjunkte** Vereinigung  $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ ,  $S_j \in \mathcal{P}_0$  geschrieben werden.

Für jedes  $y$  ist nun nach Satz 2.1.1

$$x \mapsto \chi_S(x, y) = \lim_k \sum_{j=1}^k \chi_{S_j}(x, y)$$

$\mu$ -messbar. Mit Satz 3.2.2 und  $\nu$ -Messbarkeit von  $y \mapsto \int_X \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x)$  für alle  $j$  folgt, die Abbildung

$$y \mapsto \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x)$$

ist  $\nu$ -messbar. Schliesslich erhalten wir nach erneuter Anwendung von Satz 3.2.2 die gewünschte Identität (4.1.4)

$$\begin{aligned} \rho(S) &= \int_Y \left( \int_X \chi_S(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \left( \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_Y \left( \int_X \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j). \end{aligned}$$

*ii)* Wir zeigen,  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{F}$ , und für  $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$  mit  $R_j \in \mathcal{P}_1$  und  $\rho(R_j) < \infty$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) gilt

$$\rho(R) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho \left( \bigcap_{j=1}^k R_j \right). \quad (4.1.5)$$

OBdA sei  $R_{j+1} \subset R_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . (Sonst betrachte die Familie  $(\tilde{R}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{R}_1 = R_1$ ,  $\tilde{R}_{j+1} = R_{j+1} \cap \tilde{R}_j$ ,  $j \geq 1$ .) Mit der gleichmässigen Schranke  $\chi_{R_j}(x, y) \leq \chi_{R_1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  liefert Satz 3.2.3 die Identität

$$\begin{aligned} \rho(R) &= \int_Y \left( \int_X \lim_{j \rightarrow \infty} \chi_{R_j}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_X \chi_{R_j}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y \left( \int_X \chi_{R_j}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(R_j); \end{aligned}$$

das heisst, (4.1.5), wie gewünscht.  $\square$

**Lemma 4.1.2** Für alle  $S \subset X \times Y$  gilt

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\{\rho(R); S \subset R \in \mathcal{P}_1\}.$$

**Beweis:** Für jede Überdeckung  $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i =: R$  gilt analog (4.1.4)

$$\rho(R) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i);$$

also

$$\inf\{\rho(R); S \subset R \in \mathcal{P}_1\} \leq (\mu \times \nu)(S).$$

Weiter können wir jedes derartige  $R$  wie im Beweis von (4.1.4) disjunkt  $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j \times B'_j$  zerlegen mit

$$\rho(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A'_j \times B'_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j)\nu(B'_j) \geq (\mu \times \nu)(S).$$

$\square$

**Beweis von Satz 4.1.1.i):** Sei  $A \times B \in \mathcal{P}_0$ . Nach Definition von  $\mu \times \nu$  und (4.1.3) gilt:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) \leq \rho(R)$$

für alle  $R \in \mathcal{P}_1$  mit  $A \times B \subset R$ . Mit Lemma 4.1.2 folgt

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \inf\{\rho(R); A \times B \subset R \in \mathcal{P}_1\} = \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Schliesslich zeigen wir,  $A \times B$  ist  $(\mu \times \nu)$ -messbar. Sei dazu  $T \subset X \times Y$  beliebig,  $R \in \mathcal{P}_1$  mit  $T \subset R$ . Mittels

$$R = R \setminus (A \times B) \cup R \cap (A \times B)$$

können wir  $R$  disjunkt in  $\mathcal{P}_1$  zerlegen. Mit Lemma 4.1.2 und (4.1.4) folgt:

$$\begin{aligned} &(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) \\ &\leq \rho(R \setminus (A \times B)) + \rho(R \cap (A \times B)) = \rho(R). \end{aligned}$$

Wiederum mit Lemma 4.1.2 folgt nach Übergang zum Infimum bezüglich  $R \supset T$ ,  $R \in \mathcal{P}_1$ , die Abschätzung

$$(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) \leq (\mu \times \nu)(T);$$

also ist  $A \times B$  bezüglich  $\mu \times \nu$  messbar.  $\square$

**Bemerkung 4.1.2** Mit (4.1.3) und (4.1.4) folgt für  $S = A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ , mit disjunkten  $S_i \in \mathcal{P}_0$ , die Gleichung

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) = \rho(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i).$$

Also ist  $\lambda$  ein Prämass auf der von  $\mathcal{P}_0$  erzeugten Algebra der Elementarfiguren. Behauptung i) folgt somit auch aus Satz 1.2.2.

Mit der Familie  $\mathcal{P}_0$  sind nun auch  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  Teil der  $\sigma$ -Algebra der  $(\mu \times \nu)$ -messbaren Mengen, und

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(S), \forall S \in \mathcal{P}_2 \quad (4.1.6)$$

nach Satz 1.1.2, beziehungsweise (4.1.3) - (4.1.5).

**Lemma 4.1.3** Für jedes  $S \subset X \times Y$  gibt es  $R \in \mathcal{P}_2$  mit  $S \subset R$  und

$$\rho(R) = (\mu \times \nu)(R) = (\mu \times \nu)(S).$$

**Beweis:** OBdA sei  $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ . (Sonst setze  $R = X \times Y$ .) Für  $j \in \mathbb{N}$  wähle  $S \subset R_j \in \mathcal{P}_1$  gemäss Lemma 4.1.2 mit

$$(\mu \times \nu)(S) \leq \rho(R_j) \leq (\mu \times \nu)(S) + \frac{1}{j}.$$

OBdA sei  $R_{j+1} \subset R_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . (Sonst betrachte die Familie  $(\tilde{R}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{R}_1 = R_1$ ,  $\tilde{R}_{j+1} = R_{j+1} \cap \tilde{R}_j$ ,  $j \geq 1$ .) Setze

$$R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j \in \mathcal{P}_2$$

mit  $S \subset R$ . Die Behauptung folgt aus (4.1.5).  $\square$

**Beweis von ii):** Sei  $S \subset X \times Y$  bezüglich  $(\mu \times \nu)$  messbar. Wähle  $R \in \mathcal{P}_2$  gemäss Lemma 4.1.3 mit  $S \subset R$  und

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(R).$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle.

a) Es sei  $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = 0$ . Da  $0 \leq \chi_S \leq \chi_R$ , folgt in diesem Fall  $S \in \mathcal{F}$ ,  $\rho(S) = 0$ , wie gewünscht.

b) Falls  $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) > 0$ , betrachte  $R \setminus S$  mit

$$(\mu \times \nu)(R \setminus S) = (\mu \times \nu)(R) - (\mu \times \nu)(S) = 0.$$

(Beachte  $(\mu \times \nu)(R) = \rho(R)$  gemäss (4.1.6).) Nach a) gilt

$$\rho(R \setminus S) = 0;$$

das heisst

$$\mu(S_y) = \mu(R_y) \text{ für } \nu\text{-a.e. } y,$$

und

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = \int_Y \mu(R_y) d\nu(y) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \rho(S).$$

□

**Beweis von iii):** Jede offene Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = k + l$ , ist nach Satz 1.3.1 eine abzählbare Vereinigung von Intervallen, also  $(\mu \times \nu)$ -messbar nach Teil i); das heisst,  $\mu \times \nu$  ist Borelsch.

Da  $\mu, \nu$  Borel regulär, gelten die Aussagen von Lemma 4.1.2 und Lemma 4.1.3 auch, falls man  $\mathcal{P}_i$  ersetzt durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_0 &= \{A \times B; A, B \text{ Borelsch}\}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_1 &= \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j; S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \right\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_2 = \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j; S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Da  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  enthalten ist in der Borelalgebra von  $\mathbb{R}^n$ , ist  $\mu \times \nu$  Borel regulär nach Lemma 4.1.3.

Für kompaktes  $K \subset \mathbb{R}^n$  wähle einen abgeschlossenen Würfel  $Q = Q_1 \times Q_2$  mit  $K \subset Q$ . Es folgt

$$(\mu)(K) \leq (\mu \times \nu)(Q) = \mu(Q_1) \cdot \nu(Q_2) < \infty.$$

□

**Beweis von iv):** Für  $f = \chi_S$  folgt iv) aus ii).

Falls  $f \geq 0$ , schreibe  $f$  gemäss Satz 2.1.2 als (monotonen) Limes von Treppenfunktionen

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{S_j}, \quad S_j \text{ } (\mu \times \nu)\text{-messbar.}$$

Aufgrund von ii) und der Linearität des Integrals gilt die Behauptung für die Partialsummen  $f_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{S_j}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  und Anwendung von Satz 3.2.2 folgt die Behauptung für  $f$ .

Beliebiges  $f$  zerlegen wir  $f = f^+ - f^-$ . □

**Bemerkung 4.1.3** Eine Menge  $S \subset X \times Y$ , welche (4.1.1) und (4.1.2) erfüllt, muss nicht  $(\mu \times \nu)$ -messbar sein. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

**Beispiel 4.1.2** Sei  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $\mu = \nu = \mathcal{L}^1$  das Lebesgue-Mass,  $A \subset [0, 1]$  nicht messbar, und setze

$$S = \{(x, y); |x - \chi_A(y)| < 1/2, y \in [0, 1]\}.$$

$S$  ist nicht  $\mu \times \nu$ -messbar; jedoch ist  $S_y$   $\mu$ -messbar für alle  $y$ , und  $\mu(S_y) \equiv 1$ .

**Bemerkung 4.1.4** *i) Falls  $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  bzgl.  $\mu \times \nu$  messbar ist, so ist  $f$  ( $\mu \times \nu$ )-integrierbar, falls eines der iterierten Integrale existiert (Tonelli).*

*ii) Im allgemeinen kann eines der iterierten Integrale existieren, ohne dass  $f$   $\mu \times \nu$ -messbar sein muss (zum Beispiel  $f = \chi_S$  wie in Beispiel 4.1.2) oder ohne dass  $f$   $\mu \times \nu$ -integrierbar ist (falls zum Beispiel  $\int_Y f(x, y) d\nu(y) \equiv 0, \forall x$ ).*

## 4.2 Faltung

Wesentlich für das Folgende ist die Translationsinvarianz der zugrundeliegenden Masse. Daher sei in diesem Abschnitt stets  $\mu = \mathcal{L}^n$ , das  $n$ -dimensionale Lebesguesche Mass.

Wie in Abschnitt 3.5 schreiben wir für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  der Einfachheit halber  $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$  oder auch nur  $L^p$ , falls der Integrationsbereich aus dem Zusammenhang klar ist.

**Lemma 4.2.1** *Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar bezüglich  $\mathcal{L}^n$ . Dann ist die Funktion*

$$F(x, y) = f(x - y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*messbar bezüglich  $\mathcal{L}^{2n}$ .*

**Beweis:** Mit der Substitution  $x - y =: z$  erhalten wir für  $a \in \mathbb{R}$  die Darstellung

$$\begin{aligned} F^{-1}([-\infty, a]) &= \{(x, y); f(x - y) < a\} \\ &= \{(x, x - z); f(z) < a\} = T(\mathbb{R}^n \times \{z; f(z) < a\}) \end{aligned}$$

mit  $T(x, z) = (x, x - z)$ . Offenbar ist  $T: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  Lipschitz stetig, und  $\mathbb{R}^n \times \{z; f(z) < a\}$  ist  $\mathcal{L}^{2n}$ -messbar nach Satz 4.1.1.

Die Behauptung folgt somit aus dem folgenden Lemma 4.2.2.  $\square$

**Lemma 4.2.2** *Sei  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz stetig mit*

$$|Tx - Ty| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

*und sei  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -messbar. Dann ist  $TA$   $\mathcal{L}^n$ -messbar.*

**Beweis:** *i) Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -Nullmenge. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $G \supset N$  offen mit  $\mu(G) < \varepsilon$  gemäss Satz 1.7.1, und zerlege*

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

*in Würfel  $I_j$  der Kantenlänge  $l_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , gemäss Satz 1.3.1. Es folgt*

$$TN \subset TG = \bigcup_{j=1}^{\infty} TI_j,$$

*und für jedes  $j$  ist  $TI_j$  in einem Würfel der Kantenlänge*

$$L_j \leq C(n)Ll_j$$

enthalten. Somit erhalten wir

$$\mu(TN) \leq \mu(TG) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(TI_j) \leq CL^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) = CL^n \mu(G) \leq CL^n \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt  $\mu(TN) = 0$ ; insbesondere ist  $TN$  bzgl.  $\mathcal{L}^n$  messbar.

ii) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}^n$ -messbar. Nach Satz 1.7.2 hat  $A$  die Darstellung

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$$

mit kompakten Mengen  $F_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und  $\mu(N) = 0$ . Mit  $F_k$  ist auch  $TF_k$  kompakt für jedes  $k$  und somit insbesondere  $\mathcal{L}^n$ -messbar. Also ist auch

$$TA = \bigcup_{k=1}^{\infty} TF_k \cup TN$$

nach i) und Satz 1.1.1  $\mathcal{L}^n$ -messbar. □

**Satz 4.2.1** Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist die Funktion  $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz$$

messbar, und  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

**Bemerkung 4.2.1** Beachte, dass die so definierte "Faltung" symmetrisch ist:  $f * g = g * f$ .

**Beweis:** Gemäss Lemma 4.2.1 ist die Funktion  $F(x, y) = f(x-y)g(y)$   $\mathcal{L}^{2n}$ -messbar.

i) Seien  $f, g \geq 0$ . Dann ist  $F$  (uneigentlich)  $\mathcal{L}^{2n}$ -integrierbar. Aus Satz 4.1.1 und Bemerkung 4.1.4 folgt sodann

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ g(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) dx \right) \right] dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

da  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) dx = \|f\|_{L^1}$  für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ .

ii) Für allgemeine  $f, g$  folgt mit i) zunächst  $|F(x, y)| = |f(x-y)| |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ , mit Satz 4.1.1 also  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Mit Korollar 3.1.2 erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy \right) dx = \| |f| * |g| \|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

□

**Korollar 4.2.1** Sei  $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

i)  $f \in L^1$ ,  $g \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p$ , und

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

ii)  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ ,  $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} =: 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow f * g \in L^r$ , und

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Beweis:** i) Der Fall  $p = 1$  entspricht Satz 4.2.1. Für  $1 < p < \infty$  sei  $1 < q < \infty$  zu  $p$  konjugiert. Mit Korollar 3.5.1 und Satz 4.2.1 schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}}_{\in L^q} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|}_{\in L^p} dy \right|^p dx \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|f * |g|^p\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}^{1+\frac{p}{q}} \|g\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Der Fall  $p = \infty$  folgt unmittelbar aus Korollar 3.5.1.

ii) OBdA sei  $p \leq q$ . Mit  $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{q}$  erhalten wir  $p \leq q \leq r$ . Der Fall  $r = \infty$  entspricht der Hölderschen Ungleichung, Korollar 3.5.1; den Fall  $p = 1$  haben wir unter i) bereits erledigt. OBdA dürfen wir also annehmen  $1 < p \leq q < r < \infty$ . Schreibe

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}}}_{\in L^s} \underbrace{|g(y)|^{1-\frac{q}{r}}}_{\in L^t} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}}_{\in L^r} dy$$

mit  $s = \frac{p}{1-\frac{p}{r}}$ ,  $t = \frac{q}{1-\frac{q}{r}}$ . Beachte

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung (vergleiche Übung 8.1) zusammen mit der Abschätzung  $\| |f|^p * |g|^q \|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r}} \|g\|_{L^q}^{\frac{q}{r}}$  liefern somit

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^r} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy \right)^r dx \right)^{1/r} \\ &\leq \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_{L^q}^{1-\frac{q}{r}} \| |f|^p * |g|^q \|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

**Anwendung 4.2.1** (Lösung der Laplace-Gleichung)

Für  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  sei

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

Zu  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  suchen wir eine Lösung  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  der *Laplace-Gleichung*

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n. \quad (4.2.1)$$

Zur Motivation des Folgenden betrachten wir zunächst das einfachere Problem, eine vorgegebene Funktion  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  aus  $\Delta u$  zurückzugewinnen.

Partielle Integration mit dem Satz von Gauss liefert die folgende fundamentale Identität.

**Satz 4.2.2** Für glatt berandetes, beschränktes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi, \psi \in C^2(\overline{\Omega})$  gilt

$$\int_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) dx = \int_{\partial \Omega} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) do,$$

wobei  $n$  die äussere Normale an  $\Omega$  bezeichnet und  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = n \cdot \nabla \psi$ .

Wählen wir zu gegebenem  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in Satz 4.2.2 ein offenes  $\Omega$  mit  $\operatorname{supp}(u) = \{x; u(x) \neq 0\} \subset \Omega$ , so folgt mit  $\psi = u$  für beliebiges  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  die Gleichung

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = -\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx.$$

Falls es uns gelingt, eine Funktion  $\varphi = g$  zu finden, welche in einem geeigneten Sinne die Gleichung

$$-\Delta g = \delta_0$$

erfüllt, so erwarten wir eine Darstellung der Form

$$u = g * (-\Delta u)$$

durch Faltung mit der *Grundlösung*  $g$ . Dabei ist  $\delta_0$  die *Dirac-Distribution* mit

$$\delta_0(u) = u(0) \text{ für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$n = 1$ : Setze

$$g(x) = -\frac{1}{2}|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$\Delta g(x) = g''(x) = 0 \text{ für alle } x \neq 0$$

und

$$g'(-\varepsilon) - g'(\varepsilon) = 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} (g * (-\Delta u))(x_0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} u''(x) g(x_0 - x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} u''(x) g(x_0 - x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} u''(x) g(x_0 - x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g'(-\varepsilon) - g'(\varepsilon)) u(x_0) = u(x_0). \end{aligned}$$

$n \geq 3$ : Setze

$$g(x) = \frac{1}{(n-2)\alpha_{n-1}|x|^{n-2}} =: c(n)|x|^{2-n}, \quad x \neq 0.$$

Dabei bezeichnet  $\alpha_{n-1}$  das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Sphäre  $S^{n-1}$ .

Beachte,  $g \in L^1_{loc}$  nach Beispiel 3.5.1, also  $g \in L^1(K)$  für jedes kompakte  $K \subset \mathbb{R}^n$ , und

$$\begin{aligned} \nabla(|x|^{2-n}) &= (2-n)x|x|^{-n}, \quad x \neq 0, \\ \Delta(|x|^{2-n}) &= 0, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Für allgemeines  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $n \geq 3$  machen wir den Ansatz

$$u = f * g.$$

**Satz 4.2.3**  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  löst (4.2.1).

**Beweis:** Betrachte zunächst  $x_0 \notin \text{supp}(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$ . Gemäss Anwendung 3.2.1 gilt

$$\Delta u|_{x=x_0} = \Delta|_{x=x_0} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta g)(x_0-y)f(y) dy = 0 = f(x_0).$$

Für allgemeines  $x$  benütze die Symmetrie der Faltung. Mit Anwendung 3.2.1 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Delta u|_{x=x_0} &= \Delta|_{x=x_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x-y)g(y) dy|_{x=x_0} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \Delta f(x-y)g(y) dy|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Beachte

$$\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y),$$

wobei der Index auf die Variable verweist, bezüglich der differenziert wird. Es folgt:

$$\Delta u|_{x=x_0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \Delta_y f(x_0-y)g(y) dy.$$

Anwendung von Satz 4.2.2 mit  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)$ ,  $n(x) = -x/|x|$ ,  $\varphi = g$ ,  $\psi = f(x_0 - \cdot)$  liefert

$$\begin{aligned} -\Delta u|_{x=x_0} &= c(n) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta(0)} \left( \frac{y}{|y|} \cdot \nabla f(x_0-y) \frac{1}{|y|^{n-2}} + \frac{(n-2)}{|y|^{n-1}} f(x_0-y) \right) d\sigma(y) \\ &= c(n)(n-2) \cdot \alpha_{n-1} f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.2.2** Im Falle  $n = 2$  ist die “Grundlösung” gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{|x|} \right).$$

Beachte

$$\nabla \log \left( \frac{1}{|x|} \right) = -\frac{x}{|x|^2}, \quad x \neq 0.$$

Es folgt

$$\Delta g = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \left( \frac{x}{|x|^2} \right) = 0, \quad x \neq 0,$$

sowie

$$\int_{\partial B_\delta(0)} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\sigma = 1,$$

wobei wie oben  $n(x) = -\frac{x}{|x|}$  die äussere Normale auf  $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0))$  bezeichnet und  $\frac{\partial g}{\partial n} = n \cdot \nabla g$ .

Sehr wichtig für die Anwendungen ist der folgende Satz von Calderon-Zygmund, den wir ohne Beweis zitieren.

**Satz 4.2.4** (Calderon-Zygmund, Hausdorff-Young): Für  $1 < p < \infty$  und  $u = f * g$  mit  $f \in L^p \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\nabla^2 u = \nabla^2 g * f \in L^p(\mathbb{R}^n). \quad (4.2.2)$$

Falls zudem  $p < n$ , bzw.  $p < n/2$ , so erhalten wir zudem die Abschätzungen

$$\nabla u = \nabla g * f \in L^r(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{r} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad (4.2.3)$$

bzw.

$$u \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{q} = \frac{n-2}{n} + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \quad (4.2.4)$$

(mit Abschätzungen für die entsprechenden Normen).

**Bemerkung 4.2.3** Wäre  $g \in L_{loc}^{\frac{n}{n-2}}$ ,  $\nabla g \in L_{loc}^{\frac{n}{n-1}}$ ,  $\nabla^2 g \in L_{loc}^1$ , so erhielten wir diese Aussagen aus Korollar 4.2.1.ii); jedoch verfehlt  $g$  diese Regularität knapp. Zum Beweis der obigen Aussagen benötigen wir statt dessen die Hausdorff-Young-Ungleichung und die Theorie der singulären Integraloperatoren der **Harmonischen Analysis**.

## 5 Differentiation von Massen

### 5.1 Differenzierbarkeit des Lebesgue-Integrals

Die Motivation für die Ergebnisse in diesem Abschnitt liefert das folgende Beispiel.

**Beispiel 5.1.1** *i) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , und sei  $F(x) := \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Dann gilt  $F \in C^1(\mathbb{R})$ , und*

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi = f(x), \quad \forall x.$$

*ii) Allgemein gilt für  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$  in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy.$$

Gelten analoge Formeln auch, falls wir nur  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  annehmen, oder falls wir  $\mathcal{L}^n$  durch ein allgemeines Radonmass  $\mu$  ersetzen?

Im folgenden sei zunächst stets  $\mu = \mathcal{L}^n$ ,  $L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ , etc.

**Satz 5.1.1** (*Lebesguesches Differenzierbarkeitstheorem*): *Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy.$$

**Bemerkung 5.1.1** *Man kann Kugeln durch Würfel ersetzen.*

Zum Beweis von Satz 5.1.1 benötigen wir die zu  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  assoziierte Funktion

$$f^*(x) := \sup_{r > 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy,$$

**Definition 5.1.1**  $f^*$  *heißt Hardy-Littlewood Maximalfunktion.*

**Bemerkung 5.1.2** *Nach Satz 3.3.1 ist für festes  $r > 0$  die Abbildung*

$$x \mapsto \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

*stetig.  $f^*$  ist daher nach unten halbstetig, also messbar nach Beispiel 2.1.3. Jedoch gilt  $f^* \in L^1(\mathbb{R}^n)$  nur im "trivialen" Fall  $f = 0$ .*

Die Maximalfunktion für ein  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist hingegen "fast" in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  im folgenden Sinn; vergleiche Satz 3.1.2 (Tchebychev-Ungleichung).

**Satz 5.1.2** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt mit  $C = 5^n$  für alle  $a > 0$  die Abschätzung

$$\mu(\{x; f^*(x) > a\}) \leq \frac{C}{a} \|f\|_{L^1};$$

Wir folgern nun zunächst Satz 5.1.1 aus Satz 5.1.2.

**Beweis von Satz 5.1.1:** OBdA sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . (Betrachte sonst zu vorgegebenem  $x \in \mathbb{R}^n$  die Funktion  $g = f\chi_{B_1(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .)

Nach Satz 3.5.2 gibt es  $f_k \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$  mit

$$f_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} f \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Schätze ab (mit  $\overline{\lim} = \limsup$  und  $\int_{B_r(x)} f(y) dy = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy$ , etc.)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \left| \int_{B_r(x)} f(y) dy - f(x) \right| &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f_k(y)| dy + \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{B_r(x)} |f_k(y) - f_k(x)| dy \right| + |f_k(x) - f(x)| \\ &\leq (f - f_k)^*(x) + |f_k(x) - f(x)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

da  $f_k$  stetig und somit  $\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{B_r(x)} |f_k(y) - f_k(x)| dy \right| = 0$  für alle  $x$  gemäss Beispiel 5.1.1. Für  $\varepsilon > 0$  folgt

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &:= \{x; \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy > 2\varepsilon\} \\ &\subset \{x; (f - f_k)^*(x) > \varepsilon\} \cup \{x; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , also nach Satz 5.1.2 und Satz 3.1.2

$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon) &\leq \mu(\{x; (f - f_k)^*(x) > \varepsilon\}) + \mu(\{x; |(f - f_k)(x)| > \varepsilon\}) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \|f - f_k\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Damit ist

$$A = \{x; \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k}$$

ebenfalls eine Nullmenge, und es folgt

$$|f(x) - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} f(y) dy| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

für fast alle  $x$ . □

Wir haben sogar die folgende stärkere Aussage bewiesen:

**Korollar 5.1.1** Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Beziehung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \quad (5.1.1)$$

**Definition 5.1.2** Ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit (5.1.1) heisst ein **Lebesgue-Punkt** von  $f$ .

Zum Beweis von Satz 5.1.2 benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel.

**Satz 5.1.3** (Vitali-Überdeckungssatz): Es sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von Kugeln  $B = B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$  mit Durchmesser  $\text{diam } B = 2r < d_0$ . Zu jeder Kugel  $B = B_r(x)$  sei  $\hat{B} = B_{5r}(x)$  die 5-fach vergrösserte Kugel. Dann gibt es eine abzählbare Familie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  von paarweise disjunkten Kugeln, so dass

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

**Beweis:** Definiere induktiv maximale disjunkte Familien  $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}$ , wie folgt. Wähle zunächst

$$\mathcal{G}_1 \subset \{B \in \mathcal{F}; \text{diam } B > \frac{d_0}{2} =: d_1\};$$

für  $i = 1, 2, \dots$  wähle sodann

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \{B \in \mathcal{F}; d_i \geq \text{diam } B > \frac{d_i}{2} = d_{i+1}, B \cap B' = \emptyset \text{ für } B' \in \mathcal{G}_1 \cup \dots \cup \mathcal{G}_i\}.$$

Setze  $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$ . Nach Konstruktion besteht  $\mathcal{G}$  aus abzählbar vielen paarweise disjunkten Bällen.

Sei  $B_0 \in \mathcal{F}$ . Bestimme  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\text{diam } B_0 \in [d_i, d_{i-1}]$ . Da  $\mathcal{G}_i$  nach Konstruktion maximal ist, existiert  $B \in \mathcal{G}_1 \cup \dots \cup \mathcal{G}_i$  mit  $B \cap B_0 \neq \emptyset$ . Insbesondere folgt  $\text{diam } B > d_i$ , also

$$B_0 \subset U_{2d_i}(B) \subset \hat{B}.$$

□

**Beweis von Satz 5.1.2:** Sei  $a > 0$ . Setze

$$A = \{x; f^*(x) > a\}.$$

Zu  $x \in A$  wähle  $r = r(x) > 0$  mit

$$\int_{B_r(x)} |f(y)| dy > a.$$

Mit  $\omega_n = \mu(B_1(0))$  folgt

$$a\omega_n r^n = a \mu(B_r(x)) < \int_{B_r(x)} |f| dy \leq \|f\|_{L^1}; \quad (5.1.2)$$

insbesondere erhalten wir die gleichmässige Abschätzung

$$r(x) \leq r_0 = (\omega_n^{-1} a^{-1} \|f\|_{L^1})^{1/n}, \quad \forall x \in A.$$

Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} = \{B_{r(x)}(x); x \in A\}.$$

Offensichtlich gilt  $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$ . Wähle eine Teilfamilie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  von disjunkten Bällen nach Satz 5.1.3 mit

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

Aus (5.1.2) folgt dann die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}\mu(A) &\leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(\hat{B}) = 5^n \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \\ &\leq \frac{5^n}{a} \sum_{B \in \mathcal{G}} \int_B |f| dy = \frac{5^n}{a} \int_{\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B} |f| dy \leq \frac{5^n}{a} \|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

□

## 5.2 Differentiation von Radon-Massen

Im vorausgegangenen Abschnitt haben wir gesehen, wie man den Integranden  $f$  aus dem unbestimmten Integral  $\int f d\mu$  zurückgewinnt, falls  $\mu = \mathcal{L}^n$ .

Für den allgemeinen Fall benötigen wir zunächst einen feineren Überdeckungssatz analog Satz 5.1.3.

**Satz 5.2.1** (*Besicovitch*) Sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}$  eine Familie von abgeschlossenen Bällen  $B = \overline{B_r(x)}$ , wobei  $r > 0$ , und sei  $A$  die Menge von deren Mittelpunkten. Weiter gelte  $\mu(A) < \infty$  sowie  $\inf\{r; \overline{B_r(x)} \in \mathcal{F}\} = 0$  für jedes  $x \in A$ . Dann existiert zu jeder offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  eine abzählbare disjunkte Schar  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  von Bällen  $B \subset G$  mit

$$\mu((A \cap G) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0.$$

Der Beweis ist vollkommen elementar aber recht umfangreich; vergleiche Evans-Gariepy, Cor. 1, S. 35.

**Bemerkung 5.2.1**  $A$  muss nicht  $\mu$ -messbar sein.

Seien nun  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 5.2.1** i) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  setze

$$\begin{aligned}\overline{D}_\mu \nu(x) &= \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & , \text{ falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \text{ für alle } r > 0, \\ +\infty & , \text{ sonst,} \end{cases} \\ \underline{D}_\mu \nu(x) &= \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})} & , \text{ falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \text{ für alle } r > 0, \\ +\infty & , \text{ sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

ii) Falls  $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$ , so heisst  $\nu$  bezüglich  $\mu$  an der Stelle  $x$  differenzierbar mit Dichte  $D_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x)$ . Die Dichte  $D_\mu \nu$  bezeichnen wir auch als **Ableitung** von  $\nu$  bezüglich  $\mu$ .

**Lemma 5.2.1** Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty, \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ , und sei  $0 < \alpha < \infty$ . Dann folgt:

- i) Für  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\}$  gilt  $\nu(A) \leq \alpha \mu(A)$ ;
- ii) Für  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}$  gilt  $\nu(A) \geq \alpha \mu(A)$ .

**Bemerkung 5.2.2** *A muss nicht  $\mu$ - oder  $\nu$ -messbar sein.*

**Beweis:** *i)* Sei  $A$  wie in i),  $\varepsilon > 0$ ,  $G$  eine offene Umgebung von  $A$ . Betrachte

$$\mathcal{F} = \{B = \overline{B_r(x)}; x \in A, r > 0, B \subset G, \nu(B) < (\alpha + \varepsilon) \mu(B)\}.$$

Nach Definition von  $\underline{D}_\mu \nu(x)$  und Wahl von  $A$  folgt

$$\inf\{r; \overline{B_r(x)} \in \mathcal{F}\} = 0, \forall x \in A.$$

Wähle eine abzählbare, disjunkte Teilfamilie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  gemäss Satz 5.2.1 mit

$$\nu(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0;$$

also

$$\nu(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \nu(B) \leq (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \leq (\alpha + \varepsilon) \mu(G).$$

Nach Übergang zum Infimum bzgl.  $G \supset A$  folgt mit Satz 1.7.1 zunächst die Abschätzung

$$\nu(A) \leq (\alpha + \varepsilon) \inf_{G \supset A, G \text{ offen}} \mu(G) = (\alpha + \varepsilon) \mu(A)$$

und nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung. Die Abschätzung ii) beweist man vollkommen analog.  $\square$

**Lemma 5.2.2** *Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert  $D_\mu \nu$   $\mu$ -a.e., und  $D_\mu \nu$  ist  $\mu$ -messbar und  $\mu$ -a.e. endlich.*

**Beweis:** OBdA seien  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty, \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . (Sonst betrachte  $\mu|_K, \nu|_K$  für  $K = B_R(0)$  mit anschliessendem Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$ .) Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

*i)* Wir zeigen,  $D_\mu \nu$  existiert, und  $D_\mu \nu(x) < \infty$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ . Setze dazu

$$I = \{x; \overline{D}_\mu \nu(x) = +\infty\}$$

sowie für  $0 < a < b < \infty$

$$R(a, b) = \{x; \underline{D}_\mu \nu(x) < a < b < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\}.$$

Da für alle  $\alpha > 0$  gilt

$$I \subset \{x; \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}$$

folgt mit Lemma 5.2.1

$$\mu(I) \leq \frac{\nu(I)}{\alpha} \leq \frac{\nu(\mathbb{R}^n)}{\alpha} \xrightarrow{(\alpha \rightarrow \infty)} 0;$$

also  $\mu(I) = 0$ , und  $\overline{D}_\mu \nu < \infty$   $\mu$ -a.e.

Analog folgt aus Lemma 5.2.1

$$b \mu(R(a, b)) \leq \nu(R(a, b)) \leq a \mu(R(a, b)),$$

also  $\mu(R(a, b)) = 0$  für alle  $0 < a < b < \infty$ . Wegen

$$\{x; \underline{D}_\mu \nu(x) < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\} \subset \bigcup_{\substack{0 < a < b < \infty \\ a, b \in \mathbb{Q}}} R(a, b)$$

gilt daher  $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty$  für  $\mu$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

ii) Wir zeigen, für festes  $r > 0$  ist die Funktion

$$x \mapsto g_r(x) = \begin{cases} \frac{\nu(\overline{B_r(x)})}{\mu(\overline{B_r(x)})}, & \text{falls } \mu(\overline{B_r(x)}) > 0 \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mu$ -messbar. Da nach Teil i) des Beweises  $D_\mu \nu = \lim_{r \rightarrow 0} g_r = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{1/k}$   $\mu$ -a.e., ist  $D_\mu \nu$  dann nach Satz 2.1.1 ebenfalls  $\mu$ -messbar.

Dazu zeigen wir zunächst die  $\mu$ -Messbarkeit der Funktionen

$$x \mapsto \mu(\overline{B_r(x)}), \quad x \mapsto \nu(\overline{B_r(x)}).$$

Nach Beispiel 2.1.3 genügt es zu zeigen, dass diese Funktionen nach oben halbstetig sind. Fixiere dazu  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Für eine Folge  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) setze  $f_k = \chi_{\overline{B_r(x_k)}}$ ,  $f = \chi_{\overline{B_r(x_0)}}$  mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \leq f \quad \mu\text{-a.e.};$$

das heisst,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - f_k) \geq 1 - f \quad \mu\text{-a.e.}$$

(Beachte, dass für  $x \notin \overline{B_r(x_0)}$  stets auch  $x \notin \overline{B_r(x_k)}$ , falls  $k \geq k_0(x)$ .)

Mit Fatou's Lemma, Satz 3.2.1, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(B_{2r}(x_0)) - \mu(\overline{B_r(x_0)}) &= \int_{B_{2r}(x_0)} (1 - f) d\mu \leq \int_{B_{2r}(x_0)} \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - f_k) d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{2r}(x_0)} (1 - f_k) d\mu = \mu(B_{2r}(x_0)) - \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{B_r(x_k)}). \end{aligned}$$

Da  $\mu(B_{2r}(x_0)) < \infty$ , folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{B_r(x_k)}) \leq \mu(\overline{B_r(x_0)}).$$

Somit ist die Abbildung  $x \mapsto \mu(\overline{B_r(x)})$  nach oben halbstetig; analog für  $\nu$ .

Schliesslich ist die Menge

$$I_r = \{x; \mu(\overline{B_r(x)}) = 0\} \subset I$$

nach Teil i) des Beweises eine  $\mu$ -Nullmenge. Die Messbarkeit von  $g_r$  folgt somit aus Satz 2.1.1.  $\square$

Wir können nun Satz 5.1.1 auf geeignete Radonmasse verallgemeinern, welche Bedingungen analog Satz 3.3.1 erfüllen. Dazu erinnern wir an Definition 3.3.1.

**Definition 5.2.2** Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann heisst  $\nu$  **bezüglich  $\mu$  absolut stetig** ( $\nu \ll \mu$ ), falls für alle  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Die Masse  $\mu$  und  $\nu$  heissen zueinander **singulär** ( $\mu \perp \nu$ ), falls eine Borelmenge  $B \subset \mathbb{R}^n$  existiert mit

$$\mu(B) = 0 = \nu(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

**Satz 5.2.2** (Differentiationssatz für Radon-Masse) Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\nu \ll \mu$ . Dann ist jede  $\mu$ -messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  auch  $\nu$ -messbar, und es gilt

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu d\mu.$$

**Bemerkung 5.2.3** Satz 5.2.2 besagt, dass  $\nu$  eine Dichte  $f = D_\mu \nu \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$  bezüglich  $\mu$  besitzt, die man durch Differenzieren von  $\nu$  analog Satz 5.1.1 erhält.

**Beweis:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$   $\mu$ -messbar.

i) Wir zeigen,  $A$  ist  $\nu$ -messbar. Da  $\mu$  Borel regulär ist, gibt es eine Borelsche Menge  $B$  mit  $B \supset A$  und  $\mu(B) = \mu(A)$ , also  $\mu(B \setminus A) = 0$ . Da  $\nu \ll \mu$ , folgt dann auch  $\nu(B \setminus A) = 0$ .

Für beliebiges  $B' \subset \mathbb{R}^n$  erhalten wir somit

$$\nu(B' \setminus A) \leq \nu(B' \setminus B) + \nu(B \setminus A) = \nu(B' \setminus B)$$

und damit

$$\nu(B' \cap A) + \nu(B' \setminus A) \leq \nu(B' \cap B) + \nu(B' \setminus B) = \nu(B'),$$

da  $B$  Borelsch, also auch  $\nu$ -messbar. Nach Bemerkung 1.1.4 ist somit  $A$   $\nu$ -messbar.

ii) OBdA seien  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty, \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . (Sonst betrachte  $\mu|_K, \nu|_K$  für  $K = \overline{B_R(0)}$  mit anschliessendem Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$ .) Zum Beweis der Darstellung von  $\nu$  betrachte zunächst

$$I = \{x \in A; D_\mu \nu(x) = \infty\} \text{ ("infinity set")}$$

mit

$$\mu(I) = 0 = \nu(I) = \int_I D_\mu \nu d\mu$$

gemäss Korollar 3.1.4. Analog betrachte

$$Z = \{x \in A; D_\mu \nu(x) = 0\} \text{ ("zero set")}$$

mit

$$\nu(Z) \leq \inf_{\alpha > 0} \alpha \mu(Z) = 0 = \int_Z D_\mu \nu d\mu.$$

Weiter sei

$$N = \{x \in A; \underline{D}_\mu \nu(x) < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\}$$

mit

$$\mu(N) = 0$$

gemäss Lemma 5.2.1. Da  $\nu \ll \mu$ , folgt mit Korollar 3.1.3 auch

$$\nu(N) = 0 = \int_N D_\mu \nu \, d\mu.$$

Für  $1 < t < \infty$  zerlege nun

$$A = Z \cup I \cup N \cup \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} A_m,$$

wobei

$$A_m = \{x \in A; t^m \leq D_\mu \nu(x) < t^{m+1}\}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$A_m$  ist  $\mu$ -messbar gemäss Lemma 5.2.2 und damit auch  $\nu$ -messbar nach Teil i), für jedes  $m \in \mathbb{Z}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \nu(A_m) \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^{m+1} \mu(A_m) \\ &= t \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^m \mu(A_m) \leq t \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{A_m} D_\mu \nu \, d\mu = t \int_A D_\mu \nu \, d\mu, \end{aligned}$$

und analog

$$\nu(A) \geq \frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu \, d\mu.$$

Grenzübergang  $t \rightarrow 1$  liefert die Behauptung.  $\square$

Durch Anwendung von Satz 5.2.2 auf die von  $f^+$ , beziehungsweise  $f^-$  für ein  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$  erzeugten Radonmasse erhalten wir die gewünschte Verallgemeinerung von Satz 5.1.1.

**Satz 5.2.3** (*Lebesgue-Besicovitch-Differentiationssatz*) Sei  $\mu$  ein Radonmass auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ . Dann gilt für  $\mu$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} f \, d\mu.$$

**Beweis:** Zerlege  $f = f^+ - f^-$ . Für  $\mu$ -messbares  $B \subset \mathbb{R}^n$  setze  $\nu^\pm(B) = \int_B f^\pm \, d\mu$  und für beliebiges  $A \subset \mathbb{R}^n$  setze

$$\nu^\pm(A) = \inf\{\nu^\pm(B); A \subset B, B \mu\text{-messbar}\}.$$

Nach Satz 3.3.1 und Satz 1.2.2 definieren die Mengenfunktionen  $\nu^\pm$  Radonmasse, und  $\nu^\pm \ll \mu$ .

Weiter folgt aus Satz 5.2.2

$$\nu^\pm(A) = \int_A D_\mu \nu^\pm \, d\mu = \int_A f^\pm \, d\mu, \quad \forall A \mu\text{-messbar};$$

also gilt

$$D_\mu \nu^\pm = f^\pm \quad \mu\text{-a.e.},$$

und mit Satz 1.1.2.ii) erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} f d\mu &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} [\nu^+(B_r(x)) - \nu^-(B_r(x))] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \uparrow r} \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} [\nu^+(\overline{B_\rho(x)}) - \nu^-(\overline{B_\rho(x)})] \\ &= D_\mu \nu^+(x) - D_\mu \nu^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x) \end{aligned}$$

für  $\mu$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ . □

### 5.3 Differentiation absolut stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$

Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, oBdA von links stetig, mit

$$\lambda_F([a, b]) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{falls } a \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit zugehörigem Lebesgue-Stieltjes Mass

$$\Lambda_F(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F([a_k, b_k]); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[ \right\}$$

gemäss Abschnitt 1.5.

**Definition 5.3.1**  $F$  heisst **absolut stetig** auf  $\mathbb{R}$ , falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}, a_k \leq b_k \leq a_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon. \quad (5.3.1)$$

**Bemerkung 5.3.1** i)  $F$  absolut stetig  $\Rightarrow F$  gleichmässig stetig.

ii)  $F$  Lipschitz stetig  $\Rightarrow F$  absolut stetig.

iii) Eine monotone, stetige Funktion muss **nicht** absolut stetig sein, wie das Beispiel der Cantor-Lebesgue Funktion in den Übungen zeigt.

**Satz 5.3.1** Es sind äquivalent:

i)  $\Lambda_F$  ist absolut stetig bezüglich  $\mathcal{L}^1$ ;

ii)  $F$  ist absolut stetig auf  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** i)  $\Rightarrow$  ii): Gemäss Satz 5.2.2 gilt für alle  $\mathcal{L}^1$ -messbaren  $A \subset \mathbb{R}$  die Darstellung

$$\Lambda_F(A) = \int_A f d\mathcal{L}^1$$

mit  $f = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$ . Mit Satz 3.3.1 folgt für  $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $a_k \leq b_k \leq a_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = \Lambda_F \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[ \right) \rightarrow 0,$$

falls

$$\mathcal{L}^1 \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k[ \right) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| \rightarrow 0.$$

ii)  $\Rightarrow$  i): Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine Lebesgue-Nullmenge. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$  gemäss (5.3.1) und wähle eine offene Menge  $B \supset A$  entsprechend Satz 1.3.2 mit  $\mathcal{L}^1(B) < \delta$ . Nach Satz 1.3.1 gilt  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  mit disjunkten, halboffenen Intervallen  $I_k = [a_k, b_k[$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . OBdA dürfen wir annehmen, dass

$$a_k < b_k \leq a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und daher

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k - a_k| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^1(I_k) = \mathcal{L}^1(B) < \delta.$$

Mit (5.3.1) und Satz 1.5.3 können wir nun abschätzen

$$\Lambda_F(A) \leq \Lambda_F(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_F(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\Lambda_F(A) = 0$ ; das heisst,  $\Lambda_F \ll \mathcal{L}^1$ .  $\square$

Aus Satz 5.2.2 erhalten wir mit Satz 5.3.1 unmittelbar die folgende Aussage.

**Satz 5.3.2 (Rademacher):** Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und absolut stetig. Dann ist  $F$  in  $\mathcal{L}^1$ -a.e. Punkten  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$0 \leq F'(x) = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F(x) =: f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

und für alle  $x_0, x \in \mathbb{R}$  gilt

$$F(x) - F(x_0) = \Lambda_F(]x_0, x]) = \int_{x_0}^x f(y) dy. \quad (5.3.2)$$

**Bemerkung 5.3.2** Ist umgekehrt für  $0 \leq f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  die Funktion  $F$  für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  durch (5.3.2) erklärt, so ist  $F$  nach Satz 3.3.1 und Satz 5.3.1 absolut stetig und nach Satz 5.1.1  $\mathcal{L}^1$ -a.e. differenzierbar mit  $F' = f$ . Satz 5.3.2 liefert somit eine exakte Charakterisierung aller monotonen Funktionen, für die der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt.

Wir wollen dieses Ergebnis auch auf nicht notwendig monotone Funktionen  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ausdehnen.

**Definition 5.3.2** Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig.

i) Für  $a < b \in \mathbb{R}$  heisst

$$V_F([a, b]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)|; a \leq \dots \leq a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq \dots < b \right\}$$

die **totale Variation** von  $F$  auf  $[a, b]$ .

ii)  $F$  hat lokal endliche Variation,  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , falls  $V_F([a, b]) < \infty$  für alle  $a < b \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 5.3.1** Sei  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann existieren  $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) =: F(x_0+)$  sowie  $\lim_{x \uparrow x_0} F(x) =: F(x_0-)$ .

**Beweis:** Nimm widerspruchsweise an,

$$\underline{\xi} = \liminf_{x \uparrow x_0} F(x) < \limsup_{x \uparrow x_0} F(x) = \bar{\xi}.$$

Dann existieren Folgen  $(a_k), (b_k)$  mit

$$x_0 - 1 < a_k < b_k < a_{k+1} < x_0, \quad k \in \mathbb{N}$$

so dass

$$F(a_k) \rightarrow \underline{\xi}, \quad F(b_k) \rightarrow \bar{\xi} \quad (k \rightarrow \infty);$$

also

$$V_F([x_0 - 1, x_0]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Analog für  $F(x_0+)$ .  $\square$

Im folgenden sei nun  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  vorausgesetzt. Offenbar umfasst diese Klasse alle monotonen Funktionen. Wegen Lemma 5.3.1 dürfen wir  $F$  stets als von links stetig annehmen.

**Lemma 5.3.2** Sei  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  von links stetig.

- i) Für  $a < b < c$  gilt  $V_F([a, c]) = V_F([a, b]) + V_F([b, c])$ .
- ii)  $V_F([x, x_0]) \rightarrow 0$ , falls  $x \uparrow x_0$ .
- iii)  $x \mapsto V_F([a, x])$  ist auf  $]a, \infty[$  von links stetig.

**Beweis:** i) “ $\geq$ ” ist klar.

“ $\leq$ ”: Sei  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq c$ . Falls  $x_k \leq y_k < b$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so folgt offenbar

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| \leq V_F([a, b]),$$

also auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| \leq V_F([a, b]) + V_F([b, c]). \quad (5.3.3)$$

Analog schliessen wir, falls  $b \leq x_k \leq y_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  oder falls  $y_{k_0} < b \leq x_{k_0+1}$  für ein  $k_0$ .

Daher dürfen wir annehmen, dass  $x_{k_0} < b \leq y_{k_0}$  für ein  $k_0$ . Wähle  $\bar{x} = b$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle sodann  $\bar{y} \in ]x_{k_0}, b[$  mit  $|F(b) - F(\bar{y})| < \varepsilon$ . Wir führen  $\bar{y} < \bar{x}$  als weitere Unterteilungspunkte des Intervalls  $[x_{k_0}, y_{k_0}[$  ein mit

$$|F(y_{k_0}) - F(x_{k_0})| \leq |F(\bar{y}) - F(x_{k_0})| + |F(y_{k_0}) - F(\bar{x})| + \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| &\leq \left( \sum_{k < k_0} |F(y_k) - F(x_k)| + |F(\bar{y}) - F(x_{k_0})| \right) \\ &+ \left( |F(y_{k_0}) - F(\bar{x})| + \sum_{k > k_0} |F(y_k) - F(x_k)| \right) + \varepsilon \leq V_F([a, b]) + V_F([b, c]) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir (5.3.3). Die Behauptung folgt.

ii) Nimm widerspruchswise an, es gelte

$$\lim_{x \uparrow x_0} V_F([x, x_0]) =: 2\varepsilon > 0.$$

Dann gibt es für jedes  $x < x_0$  Zahlen  $x = a_0 < a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_k \leq b_k < \bar{x} < x_0$  mit

$$V_F([x, \bar{x}]) \geq \sum_{k=1}^k |F(b_k) - F(a_k)| \geq \varepsilon.$$

Zu  $x_1 < x_0$  wähle iterativ  $x_k = \bar{x}_{k-1} \in ]x_{k-1}, x_0[$ ,  $k \geq 2$ , wie oben. Mit i) folgt

$$V_F([x_1, x_0]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} V_F([x_k, \bar{x}_k]) = \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .

iii) Nach Teil i) folgt für  $a < x < x_0$

$$V_F([a, x_0]) - V_F([a, x]) = V_F([x, x_0]).$$

Daher folgt Aussage iii) aus Aussage ii).  $\square$

**Lemma 5.3.3** Sei  $F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  von links stetig. Dann besitzt  $F$  eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Darstellung  $F = F_1 - F_2$  mit monotonen, von links stetigen Funktionen  $F_1, F_2$ , so dass

$$\Lambda_{F_1}([a, b]) = V_F([a, b]) \geq \frac{1}{2} \Lambda_{F_2}([a, b]) \quad (5.3.4)$$

für alle  $a < b \in \mathbb{R}$ , und  $F$  ist absolut stetig genau dann, wenn  $F_1$  und  $F_2$  absolut stetig sind.

**Beweis:** Offenbar ist für festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$F_1: x \mapsto \begin{cases} V_F([x_0, x]) & , x > x_0 \\ 0 & , x = x_0 \\ -V_F([x, x_0]) & , x < x_0 \end{cases}$$

monoton wachsend und nach Lemma 5.3.2 von links stetig. Für  $F_2 := F_1 - F$  und  $x_0 < x \leq y$  gilt dann

$$\begin{aligned} F_2(y) - F_2(x) &= (F_1(y) - F_1(x)) - (F(y) - F(x)) \\ &\geq |F(y) - F(x)| - (F(y) - F(x)) \geq 0, \end{aligned}$$

und analog unter Verwendung von Lemma 5.3.2 für allgemeine  $x \leq y \in \mathbb{R}$ ; das heisst,  $F_2$  ist monoton wachsend. Da  $F$  und  $F_1$  von links stetig sind, gilt dies auch für  $F_2$ .

Nach Konstruktion und Satz 1.5.3 gilt weiter

$$F_1(b) - F_1(a) = \Lambda_{F_1}([a, b]) = V_F([a, b])$$

sowie

$$\Lambda_{F_2}([a, b]) = F_2(b) - F_2(a) \leq F_1(b) - F_1(a) + |F(b) - F(a)| \leq 2V_F([a, b]);$$

das heisst, wir erhalten (5.3.4).

Eindeutigkeit folgt aus (5.3.4), da diese Bedingung  $F_1$  bis auf eine Konstante bestimmt, also auch  $F_2 = F_1 - F$ .

Offenbar sind analog zu Satz 5.3.1 die folgenden Aussagen äquivalent:

i)  $F$  ist absolut stetig.

ii)  $\Lambda_{F_1}$  ist absolut stetig. (Genauer: die Carathéodory-Erweiterung von  $V_F$ , welche jedoch nach (5.3.4) mit  $\Lambda_{F_1}$  übereinstimmt.)

iii)  $F_1$  ist absolut stetig.

Wegen iii)  $\Rightarrow$  i) ist dann auch die folgende Bedingung zu den vorgenannten äquivalent:

iv)  $F_1$  und  $F_2 = F_1 - F$  sind absolut stetig.

Das Lemma ist damit vollständig bewiesen.  $\square$

**Korollar 5.3.1** Eine absolut stetige Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{L}^1$ -a.e. differenzierbar mit

$$F' = f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

und für alle  $x_0, x \in \mathbb{R}$  gilt

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(y) dy.$$

**Beweis:** Zerlege  $F = F_1 - F_2$  gemäss Lemma 5.3.3 und setze

$$f_i = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_{F_i} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2$$

gemäss Satz 5.3.2,  $f = f_1 - f_2$ . Aus Satz 5.3.2 folgt nun zunächst die Darstellung

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) &= (F_1(x_1) - F_1(x_0)) - (F_2(x_1) - F_2(x_0)) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f_1 dy - \int_{x_0}^{x_1} f_2 dy = \int_{x_0}^{x_1} f dy. \end{aligned}$$

Für  $h > 0$  schätze ab

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx. \end{aligned}$$

Da  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , strebt die rechte Seite nach Korollar 5.1.1 gegen 0 für  $h \rightarrow 0$ ; also ist  $F$   $\mathcal{L}^1$ -a.e. differenzierbar mit  $F' = f$ .  $\square$

## 5.4 Lebesgue-Zerlegung

Auch ohne die Voraussetzung  $\nu \ll \mu$  erhalten wir eine interessante Darstellung von  $\nu$ .

**Satz 5.4.1** (*Lebesgue-Zerlegung*) Seien  $\mu, \nu$  Radonmasse auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung  $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$  von  $\nu$  in Radonmasse  $\nu_{ac} \ll \mu, \nu_s \perp \mu$  mit  $D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}, D_\mu \nu_s = 0$   $\mu$ -a.e., und es gilt

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu d\mu + \nu_s(A)$$

für jede Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Beweis:** Wir führen den Beweis auf Satz 5.2.2 zurück.

OBdA seien  $\mu(\mathbb{R}^n), \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Setze

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^n; A \text{ Borelsch, } \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0\}.$$

Wähle  $B_k \in \mathcal{E}$  mit

$$\nu(B_k) \leq \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k}.$$

OBdA dürfen wir annehmen  $B_k \supset B_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ . Setze  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$  mit

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^n \setminus B_k) = 0;$$

also  $B \in \mathcal{E}$ , und

$$\nu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(B_k) = \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A).$$

Setze nun

$$\nu_{ac} = \nu|_B, \nu_s = \nu|_{(\mathbb{R}^n \setminus B)}.$$

$\nu_{ac}$  und  $\nu_s$  sind Radonmasse nach Beispiel 1.7.1.iii), und  $\nu_s \perp \mu$ , da

$$\nu_s(B) = 0 = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Weiter gilt für jede Borelmenge  $A \subset B$  mit  $\mu(A) = 0$  offenbar  $B \setminus A \in \mathcal{E}$ , also

$$\nu(A) = \nu(B) - \nu(B \setminus A) \leq 0 \quad (5.4.1)$$

wegen Minimalität von  $\nu(B)$ ; das heisst

$$\nu_{ac} \ll \mu.$$

(Da  $\mu, \nu$  als Radonmasse insbesondere Borel-regulär sind, genügt es, die Bedingung (5.4.1) für Borelmengen zu prüfen.)

**Behauptung 1:**  $D_\mu \nu_s = 0$   $\mu$ -a.e.

**Beweis:** Für  $0 < \alpha < \infty$  setze

$$C = \{x \in B; D_\mu \nu_s(x) \geq \alpha\}.$$

Mit Lemma 5.2.1 erhalten wir

$$\alpha \mu(C) \leq \nu_s(C) \leq \nu_s(B) = 0;$$

das heisst  $\mu(C) = 0$ . Somit folgt  $D_\mu \nu_s = 0$   $\mu$ -a.e. □

Es folgt  $D_\mu \nu_{ac} = D_\mu \nu$   $\mu$ -a.e. Satz 5.2.2 liefert daher für Borel messbares  $A \subset \mathbb{R}^n$  die gewünschte Darstellung

$$\nu_{ac}(A) = \int_A D_\mu \nu_{ac} d\mu = \int_A D_\mu \nu d\mu,$$

aus der auch die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt. □

**Anwendung 5.4.1** (*Ableitung monotoner Funktionen*) Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, von links stetig mit assoziiertem Lebesgue-Stieltjes Mass  $\Lambda_F$ . Gemäss Satz 5.4.1 besitzt  $\Lambda_F$  eine Zerlegung  $\Lambda_F = \Lambda_F^{ac} + \Lambda_F^s$  bezüglich  $\mu = \mathcal{L}^1$ , und es existiert

$$F' = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F = D_{\mathcal{L}^1} \Lambda_F^{ac} =: f \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

Weiter gilt  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , und

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f dx &= \Lambda_F^{ac}([x_0, x_1]) = \Lambda_F([x_0, x_1]) - \Lambda_F^s([x_0, x_1]) \\ &\leq \Lambda_F([x_0, x_1]) = F(x_1) - F(x_0), \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

da trivialerweise  $\Lambda_F^s([x_0, x_1]) \geq 0$ .

**Beispiel 5.4.1** *i)* Sei  $F = \chi_{[0, \infty[}$  die "Heaviside function". Da  $F \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  mit  $F'(x) = 0$  für  $x \neq 0$ , folgt  $\Lambda_F^{ac} = 0$ . Weiter gilt

$$\Lambda_F([a, b]) = 1, \text{ falls } a \leq 0 < b,$$

und  $\Lambda_F([a, b]) = 0$  sonst; also  $\Lambda_F = \Lambda_F^s = \delta_0$ . Beachte:  $F$  ist unstetig bei  $x = 0$ .

*ii)* Sei  $F$  die in den Übungen definierte Cantor-Lebesgue Funktion. Da  $F$  stückweise konstant ist auf  $\mathbb{R} \setminus C$ , wobei  $C$  die klassische Cantor-Menge ist mit  $\mathcal{L}^1(C) = 0$ , folgt  $F' = 0$   $\mathcal{L}^1$ -a.e. und  $\Lambda_F^{ac} = 0$ . Weiter gilt  $\text{supp } \Lambda_F^s \subset C$ ; jedoch enthält  $\Lambda_F^s$  keine Punktmassen der Form  $a \cdot \delta_{x_0}$ , da  $F$  stetig ist.

## 5.5 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir gehen nun der Frage nach, ob man auch abstrakte Masse analog zum vorangegangenen Abschnitt zerlegen kann.

Sei  $X$  eine Menge,  $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  ein Mass auf  $X$ ,  $\Sigma$  die  $\sigma$ -Algebra der  $\mu$ -messbaren Mengen. Weiter sei  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  endlich und  $\sigma$ -additiv. Beispiele sind die zuvor betrachteten Fälle i)  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$ ,  $\Phi = \int f d\mu$  für ein  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , oder ii)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Phi = \Lambda_F$  für  $F \in BV(\mathbb{R})$ .

**Definition 5.5.1** Für  $S \in \Sigma$  setze

$$\bar{V}(S) = \sup_{A \subset S} \Phi(A), \quad \underline{V}(S) = \sup_{A \subset S} (-\Phi(A)).$$

Die Zahl

$$V(S) = \overline{V}(S) + \underline{V}(S)$$

heißt die **totale Variation** von  $\Phi$  auf  $S$ .

**Bemerkung 5.5.1** Da  $\Phi$   $\sigma$ -additiv, gilt insbesondere  $\Phi(\emptyset) = 0$ . Folglich sind die Mengenfunktionen  $\underline{V}$ ,  $\overline{V}$  und  $V$  nicht negativ, endlich, und  $\sigma$ -subadditiv.

**Satz 5.5.1** i)  $V$ ,  $\underline{V}$  und  $\overline{V}$  sind nicht negative Masse, und es gilt die Jordan-Zerlegung

$$\Phi(S) = \overline{V}(S) - \underline{V}(S), \quad \forall S \in \Sigma.$$

ii) Weiter existiert  $P \in \Sigma$  mit

$$\overline{V}(S) = \Phi(S \cap P), \quad \underline{V}(S) = -\Phi(S \setminus P)$$

für  $S \in \Sigma$  (Hahn-Zerlegung).

**Beispiel 5.5.1** i) Falls  $\Phi = \int f d\mathcal{L}^n$ , so gilt  $P = \{x; f(x) \geq 0\}$ ,  $V = \int |f| d\mathcal{L}^n$ .

ii) Falls  $\Phi = \Lambda_F$ , so ist  $V = \Lambda_F$ .

**Beweis von Satz 5.5.1:** Es genügt, eine Menge  $P \in \Sigma$  zu finden mit

$$\begin{aligned} \Phi(A) &\geq 0 \text{ für alle } A \subset P, A \in \Sigma, \\ \Phi(A) &\leq 0 \text{ für alle } A \subset X \setminus P, A \in \Sigma. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Es folgt,  $\overline{V} := \Phi|_P \geq 0$ , und  $\overline{V}$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\Sigma$ ; analog für  $\underline{V}$  und  $V$ . Die Mengenfunktionen  $\overline{V}$ ,  $\underline{V}$  und  $V$  lassen sich nach Satz 1.2.2 zu Massen auf  $X$  erweitern. Die Darstellungen i) und ii) ergeben sich unmittelbar aus (5.5.1).

Zur Konstruktion von  $P$  betrachte eine Folge  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Sigma$  mit

$$\overline{V}(P_k) \geq \Phi(P_k) \geq \overline{V}(X) - 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.5.2)$$

Mit

$$\sup_{A \subset P_k} \Phi(P_k \setminus A) \leq \overline{V}(P_k) \leq \overline{V}(X)$$

folgt für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\underline{V}(P_k) = \sup_{A \subset P_k} (-\Phi(A)) \leq \sup_{A \subset P_k} \Phi(P_k \setminus A) - \Phi(P_k) \leq 2^{-k}.$$

Setze

$$P = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq l} P_k \in \Sigma.$$

Die  $\sigma$ -Subadditivität von  $\underline{V}$  liefert

$$\underline{V}(P) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{V}\left(\bigcup_{k \geq l} P_k\right) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \geq l} \underline{V}(P_k)\right) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} 2^{-l} = 0.$$

Für alle  $A \subset P$ ,  $A \in \Sigma$  gilt somit

$$\Phi(A) \geq -\underline{V}(P) = 0$$

und daher

$$\Phi(P) = \Phi(A) + \Phi(P \setminus A) \geq \Phi(A).$$

Nach Übergang zum Supremum bzgl.  $A$  erhalten wir die Ungleichung

$$\overline{V}(P) \geq \Phi(P) \geq \sup_{A \subset P, A \in \Sigma} \Phi(A) = \overline{V}(P);$$

das heisst,

$$\Phi(P) = \overline{V}(P). \quad (5.5.3)$$

Für  $l \in \mathbb{N}$  schreibe

$$P_l \subset P \cup \bigcup_{k \geq l} P_k \setminus P_{k+1}.$$

Es folgt

$$\overline{V}(P_l) \leq \overline{V}(P) + \sum_{k=l}^{\infty} \overline{V}(P_k \setminus P_{k+1}).$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  und jedes  $A \subset X \setminus P_k$  gilt nun

$$\Phi(A) = \Phi(A \cup P_k) - \Phi(P_k) \leq \overline{V}(X) - \Phi(P_k) \leq 2^{-k}.$$

Damit erhalten wir für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\overline{V}(P_k \setminus P_{k+1}) \leq \sup_{A \subset X \setminus P_{k+1}} \Phi(A) \leq 2^{-k-1},$$

und mit (5.5.2) folgt

$$\overline{V}(P) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \overline{V}(P_l) - \sum_{k=l}^{\infty} \overline{V}(P_k \setminus P_{k+1}) \right) = \overline{V}(X).$$

Mit (5.5.3) gilt daher

$$\Phi(P) = \overline{V}(X).$$

Für  $A \subset X \setminus P$ ,  $A \in \Sigma$  können wir daher abschätzen

$$\Phi(A) + \Phi(P) = \Phi(A \cup P) \leq \overline{V}(X) = \Phi(P).$$

Da  $|\Phi(P)| < \infty$ , folgt nach Subtraktion von  $\Phi(P)$

$$\Phi(A) \leq 0, \quad \forall A \subset X \setminus P, A \in \Sigma,$$

wie gewünscht. □

**Lemma 5.5.1** *Sei  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$   $\sigma$ -additiv,  $\Phi \geq 0$ . Sei weiter  $S \in \Sigma$  mit  $\mu(S) < \infty$ ,  $0 < \alpha < \infty$ . Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung*

$$S = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

mit  $\mu(N) = 0$ ,  $S_k \in \Sigma$  so, dass für  $\mu$ -messbares  $A \subset S_k$  gilt

$$\alpha(k-1) \cdot \mu(A) \leq \Phi(A) \leq \alpha k \cdot \mu(A), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 5.5.2** *Vergleiche Lemma 5.2.2!*

**Beweis:** OBdA sei  $S = X$ ,  $\alpha = 1$ . (Sonst betrachte  $\tilde{\Phi} = \frac{\Phi|_S}{\alpha}$ ).

Für  $k \in \mathbb{N}$  betrachte

$$\Phi_k = \Phi - k \mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Phi_k$  ist  $\sigma$ -additiv. Wähle  $P_k \in \Sigma$  zu  $\Phi_k$  gemäss Satz 5.5.1 mit

$$\Phi_k|_{P_k^c} \leq 0 \leq \Phi_k|_{P_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das heisst

$$\Phi(A) \geq k\mu(A), \quad \forall A \subset P_k, \quad A \in \Sigma,$$

bzw.

$$\Phi(A) \leq k\mu(A), \quad \forall A \subset P_k^c, \quad A \in \Sigma.$$

Aus  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  erhalten wir eine monotone Folge von Mengen mit denselben Eigenschaften, indem wir setzen

$$Q_k = \bigcup_{l \geq k} P_l.$$

Wir prüfen leicht, dass gilt

$$\Phi(A) \geq k\mu(A), \quad \forall A \subset Q_k, \quad A \in \Sigma,$$

bzw.

$$\Phi(A) \leq k\mu(A), \quad \forall A \subset Q_k^c, \quad A \in \Sigma.$$

Definiere weiter

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad S_1 = Q_1^c, \quad S_k = Q_{k-1} \setminus Q_k, \quad k \geq 2.$$

Aus der Abschätzung

$$k \mu(N) \leq \Phi(N) \leq \Phi(X), \quad \forall k,$$

erhalten wir unmittelbar  $\mu(N) = 0$ . Für  $A \subset S_k$ ,  $A \in \Sigma$ , folgt zudem

$$(k-1) \mu(A) \leq \Phi(A) \leq k \mu(A),$$

wie gewünscht. □

Beachte, dass man das  $\mu$ -Integral einer Funktion  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  analog zu Abschnitt 3.1 auch in einem beliebigen Massraum  $(X, \mu, \Sigma)$  definieren kann. Die Konstruktion der Räume  $L^p(X, \mu)$  verläuft dann wie in Abschnitt 3.5, und es gelten die zu Satz 3.5.1, Korollar 3.5.2 analogen Resultate, insbesondere sind diese Räume auch vollständig analog zu Lemma 3.5.2. Im folgenden sei der Einfachheit halber stets  $\mu(X) < \infty$  vorausgesetzt.

**Satz 5.5.2** *Sei  $(X, \mu, \Sigma)$  ein Massraum mit  $\mu(X) < \infty$ ,  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$   $\sigma$ -additiv. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$\Phi = \Phi_{ac} + \Phi_s \quad (\text{Lebesgue-Zerlegung})$$

mit  $\sigma$ -additiven Mengenfunktionen  $\Phi_s \perp \mu$ ,  $\Phi_{ac} \ll \mu$ , und

$$\Phi_{ac}(A) = \int_A f d\mu, \quad \Phi_s(A) = \Phi(A \cap N)$$

für ein geeignetes  $f \in L^1(X, \mu)$  und ein geeignetes  $N \in \Sigma$  mit  $\mu(N) = 0$ .

**Beweis:** *i)* Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei

$$\Phi = \beta + \sigma = \gamma + \tau$$

mit  $\beta, \gamma \ll \mu$  sowie  $\sigma, \tau \perp \mu$ . Dann ist  $\rho := \sigma - \tau = \gamma - \beta$  absolut stetig und zugleich singular bezüglich  $\mu$ . Da  $\rho$  singular, existiert  $S \in \Sigma$  mit  $\mu(S) = 0$  und

$$\rho(A) = \rho(A \cap S), \quad \forall A \in \Sigma.$$

Da andererseits  $\rho \ll \mu$  und  $\mu(A \cap S) \leq \mu(S) = 0$  für alle  $A \in \Sigma$ , folgt

$$\rho(A) = \rho(A \cap S) = 0, \quad \forall A \in \Sigma;$$

das heisst,  $\rho = 0$ .

*ii)* Zum Beweis der Existenz der Zerlegung genügt es, den Fall  $\Phi \geq 0$  zu betrachten. (Sonst betrachte  $\bar{V}$ , bzw.  $\underline{V}$ .)

Für  $l \in \mathbb{N}$  wähle  $\alpha = 2^{-l}$  und zerlege disjunkt

$$X = N_l \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{kl}$$

gemäss Lemma 5.5.1 mit  $\mu(N_l) = 0$  und mit  $S_{kl} \in \Sigma$ , so dass für  $\mu$ -messbares  $A \subset S_{kl}$  gilt

$$2^{-l}(k-1) \cdot \mu(A) \leq \Phi(A) \leq 2^{-l}k \cdot \mu(A), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.5.4)$$

Setze weiter

$$f_l = 2^{-l} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \chi_{S_{kl}}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Schliesslich sei  $N = \bigcup_{l=1}^{\infty} N_l$  mit  $\mu(N) = 0$ .

Es folgt für alle  $A \in \Sigma$ :

$$\begin{aligned} \int_A f_l d\mu &= \int_{A \setminus N} f_l d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A \cap S_{kl} \setminus N} f_l d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A \cap S_{kl} \setminus N) \\ &= \Phi(A \setminus N) \leq \int_A (f_l + 2^{-l}) d\mu = \int_A f_l d\mu + 2^{-l} \mu(X). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

**Behauptung 1:** Es gilt  $|f_l - f_{l+1}| \leq 2^{-l}$   $\mu$ -a.e. auf  $X$ .

**Beweis:** Es genügt, die Ungleichung für  $\mu$ -a.e.  $x \in S_{kl} \setminus N \subset \bigcup_{k'=1}^{\infty} S_{kl} \cap S_{k'(l+1)}$  und beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  zu zeigen.

Setze  $a := 2^{-l}(k-1) < b := 2^{-l}k$ ,  $a' := 2^{-(l+1)}(k'-1) < b' := 2^{-(l+1)}k'$ . Gemäss (5.5.4) gelten für  $\mu$ -messbares  $A \subset S_{kl} \cap S_{k'(l+1)}$  somit die Abschätzungen

$$a \mu(A) \leq \Phi(A) \leq b \mu(A),$$

sowie

$$a' \mu(A) \leq \Phi(A) \leq b' \mu(A).$$

Kombination dieser Abschätzungen ergibt

$$(a - b')\mu(A) \leq 0, \quad (a' - b)\mu(A) \leq 0.$$

Falls also  $\mu(S_{kl} \cap S_{k'(l+1)}) > 0$  für einen Index  $k'$ , so folgt für  $x \in S_{kl} \cap S_{k'(l+1)}$  nach Definition von  $f_l, f_{l+1}$

$$\begin{aligned} f_l(x) = a \leq b' = a' + 2^{-(l+1)} &= f_{l+1}(x) + 2^{-(l+1)}, \\ f_{l+1}(x) = a' \leq b = a + 2^{-l} &= f_l(x) + 2^{-l}. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\mu$ -a.e. auf  $S_{kl}$  die Abschätzung

$$|f_l - f_{l+1}| \leq 2^{-l},$$

wie gewünscht. □

Da  $\mu(X) < \infty$ , ist  $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$  gemäss Behauptung 1 Cauchy-Folge in  $L^1(X, \mu)$ . Nach Lemma 3.5.2 existiert  $\lim_{l \rightarrow \infty} f_l =: f \in L^1(X, \mu)$ .

Setze  $\sigma = \Phi \llcorner N$  und definiere

$$\beta(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Offenbar gilt  $\sigma \perp \mu, \beta \ll \mu$ . Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  in (5.5.5) liefert zudem

$$\beta(A) = \int_A f d\mu = \Phi(A \setminus N), \quad A \in \Sigma.$$

Für alle  $A \in \Sigma$  erhalten wir somit die Darstellung

$$\Phi(A) = \Phi(A \setminus N) + \Phi(A \cap N) = \beta(A) + \sigma(A),$$

wie gewünscht. □

**Korollar 5.5.1** (*Radon-Nikodym*) Seien  $X, \mu, \Sigma, \Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben, wobei  $\Phi \ll \mu$ . Dann existiert  $f \in L^1(X, \mu)$  mit

$$\Phi(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \Sigma.$$

**Bemerkung 5.5.3** *Der Satz von Radon-Nikodym ist kein Differenzierbarkeitstheorem; wir können jedoch die in Korollar 5.5.1 konstruierte Funktion  $f$  wiederum ansehen als Dichte von  $\Phi$  bezüglich  $\mu$ .*

## 6 Anhang

Zum Abschluss geben wir noch einen vom Besicovitch-Überdeckungssatz unabhängigen Beweis der Lebesgue-Zerlegung nach Satz 5.4.1, der ebenfalls zum klassischen Repertoire der Masstheorie gehört.

### 6.1 Ein wenig Funktionalanalysis

**Definition 6.1.1** Sei  $(H, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum. Eine lineare Abbildung  $l: H \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **beschränkt**, falls

$$\sup_{u \in H, \|u\| \leq 1} l(u) \leq C < \infty.$$

**Bemerkung 6.1.1** Offenbar sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $l$  ist beschränkt.
- ii)  $l$  ist stetig bei 0.
- iii)  $l$  ist stetig in jedem Punkt.

**Beweis:** i)  $\Rightarrow$  ii): Für  $u \rightarrow 0$  gilt wegen Linearität

$$l(u) = l\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \cdot \|u\| \leq C\|u\| \rightarrow 0.$$

ii)  $\Rightarrow$  i): Sei  $l$  unbeschränkt,  $u_k \in H$  eine Folge mit  $\|u_k\| = 1$  und

$$\alpha_k := l(u_k) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für  $v_k = \alpha_k^{-1} u_k$  gilt dann

$$v_k \rightarrow 0, \quad l(v_k) = 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

ii)  $\Leftrightarrow$  iii): Dies folgt unmittelbar aus der Linearität von  $l$ . □

**Beispiel 6.1.1** Jedes  $u \in H$  induziert ein stetiges Funktional  $l_u: H \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$l_u(v) = (u, v), \quad \forall v \in H.$$

Die Stetigkeit folgt aus der Cauchy-Schwarzischen Ungleichung

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Umgekehrt wird nach dem folgenden Satz **jedes** stetige Funktional auf diesem Weg erzeugt.

**Satz 6.1.1 (Riesz)** Sei  $(H, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum,  $l: H \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es genau ein  $u \in H$  mit

$$(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \tag{6.1.1}$$

Dieses  $u$  wird charakterisiert durch

$$E(u) := \|u\|^2 - 2l(u) = \min_{v \in H} E(v).$$

**Beweis:** Sei  $u_k \in H$  eine Folge mit

$$E(u_k) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \alpha := \inf_{v \in H} E(v) \geq -\infty,$$

eine sogenannte “Minimalfolge” für  $E$ .

Wir zeigen:  $(u_k)$  konvergiert gegen die gesuchte Lösung von (6.1.1).

**Behauptung 1:**  $\alpha > -\infty$ .

**Beweis:** Schätze ab

$$E(u) = \|u\|^2 - 2l(u) \geq \|u\|(\|u\| - 2C) \geq -C^2,$$

gleichmässig für alle  $u \in H$ . □

**Behauptung 2:**  $(u_k)$  ist Cauchy-Folge.

**Beweis:** Mit der Parallelogrammidentität

$$\|u_k + u_l\|^2 + \|u_k - u_l\|^2 = 2\|u_k\|^2 + 2\|u_l\|^2 \quad (6.1.2)$$

erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha \leq E\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) &= \frac{1}{2}(\|u_k\|^2 + \|u_l\|^2) - l(u_k + u_l) - \frac{1}{4}\|u_k - u_l\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(E(u_k) + E(u_l)) - \frac{1}{4}\|u_k - u_l\|^2. \end{aligned}$$

Da  $E(u_k) \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ), folgt  $\|u_k - u_l\|^2 \rightarrow 0$  ( $k, l \rightarrow \infty$ ). □

Da  $H$  vollständig, existiert  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \in H$ . Dieses  $u$  ist die gesuchte Lösung. Da  $l$  sowie  $(\cdot, \cdot)$  stetig sind, folgt zunächst  $E(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k) = \alpha$ .

**Behauptung 3:**  $u$  löst (6.1.1).

**Beweis:** Für  $v \in H$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} E(u) = \inf_H E &\leq E(u + \varepsilon v) = (u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - 2l(u + \varepsilon v) \\ &= \|u\|^2 + 2\varepsilon(u, v) + \varepsilon^2\|v\|^2 - 2l(u) - 2\varepsilon l(v) \\ &= E(u) + 2\varepsilon[(u, v) - l(v)] + \varepsilon^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} E(u + \varepsilon v) = 2[(u, v) - l(v)].$$

□

**Bemerkung 6.1.2** Die Gleichung (6.1.2) ist eine Art Konvexitätsbedingung; betrachte zum Beispiel  $\|u_k\| = \|u_l\| = 1$ . Zu Satz 6.1.1 analoge Darstellungssätze gelten auch in allgemeineren strikt konvexen Räumen.

## 6.2 Alternativer Beweis von Satz 5.4.1

Es gelten die Annahmen von Satz 5.4.1. Betrachte das Radonmass  $\rho = \mu + \nu$  auf  $\mathbb{R}^n$ . OBdA seien  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ,  $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$  und daher auch  $\rho(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Mit

Korollar 3.5.2 folgt  $L^2(\mathbb{R}^n, \rho) \subset L^1(\mathbb{R}^n, \rho) \subset L^1(\mathbb{R}^n, \nu)$ , und die Abbildung

$$L^2(\mathbb{R}^n, \rho) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu \in \mathbb{R}$$

ist stetig und linear.

Nach Satz 6.1.1 existiert  $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \rho)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} fg d\rho = \int_{\mathbb{R}^n} fg d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} fg d\nu, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n, \rho); \quad (6.2.1)$$

das heisst,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(1-g) d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} fg d\mu, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n, \rho). \quad (6.2.2)$$

Beachte, dass  $g$   $\rho$ -messbar ist, also auch  $\mu$ - und  $\nu$ -messbar. Weiter folgt aus (6.2.1)

$$0 \leq g \leq 1 \text{ } \rho\text{-a.e., also auch } \mu\text{-a.e. und } \nu\text{-a.e.}$$

(Falls  $g < 0$  auf einer  $\rho$ -messbaren Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\rho(A) > 0$ , setze  $f = \chi_A$  mit  $0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} fg d\rho < 0$ , um einen Widerspruch zu erhalten. Analog zeigt man  $g \leq 1$ .) Setze

$$B = \{x; g(x) < 1\}$$

und definiere

$$\nu_{ac} = \nu|_B, \quad \nu_s = \nu|_{(\mathbb{R}^n \setminus B)}.$$

Beachte, dass  $B$  bzgl.  $\rho$  und daher auch bzgl.  $\mu$  und  $\nu$  messbar ist;  $\nu_{ac}$  und  $\nu_s$  sind also Radon-Masse. Offenbar gilt

$$\nu_s(B) = 0 = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B);$$

also  $\nu_s \perp \mu$ . (Wähle  $f = \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B}$  in (6.2.2).)

Für  $A \subset B$ ,  $l \in \mathbb{N}$  setze

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^l g^k(x) = 1 + g(x) + \dots + g^l(x), \quad x \in A,$$

und  $f_l(x) = 0$  sonst, mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_l(1-g) d\nu &= \int_A (1-g^{l+1}) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_l g d\mu = \int_A (g + g^2 + \dots + g^{l+1}) d\mu. \end{aligned}$$

Da  $g^l \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ) punktweise auf  $A$ , ist die geometrische Reihe  $h = \sum_{k=1}^{\infty} g^k$  auf  $A$  konvergent, und mit Satz 3.2.2 und Satz 3.2.3 folgt

$$\nu(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_A (1-g^{l+1}) d\nu = \int_A h d\mu.$$

Insbesondere erhalten wir  $h \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ ,  $\nu_{ac} = \nu|_B \ll \mu$ . □

**Bemerkung 6.2.1** Falls  $\mu = \mathcal{L}^n$ , so folgt aus Satz 5.1.1 die Gleichung

$$h = D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}.$$

Im allgemeinen Fall benötigen wir Satz 5.2.3 für diese letzte Aussage. Zumindest für  $\mu = \mathcal{L}^n$  ist nun jedoch die Darstellung auch ohne den Überdeckungssatz von Besicovitch vollständig.

### 6.3 Masstheoretische Begriffe in der Wahrscheinlichkeitstheorie

In der Wahrscheinlichkeitstheorie erscheinen viele Begriffe der Masstheorie unter anderem Namen. Ist  $(X, \mu, \Sigma)$  ein Massraum, und gilt  $\mu(X) = 1$ , so heisst  $\mu$  ein *Wahrscheinlichkeitsmass* auf dem *Ereignisraum*  $X$ . Eine  $\mu$ -messbare Menge  $A \in \Sigma$  heisst ein *Ereignis*, deren Mass  $\mu(A)$  die *Wahrscheinlichkeit* von  $A$ . Die Elemente  $x$  von  $X$  heissen *Elementarereignisse*. Eine *Zufallsvariable* ist eine  $\mu$ -messbare Funktion  $f$  auf  $X$ , deren  $\mu$ -Integral der *Erwartungswert* von  $f$ . Das Bildmass  $\mu \circ f^{-1}$  auf der Borel-Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  heisst die *Verteilung* von  $f$ .

Der Raum  $X$  tritt in der Wahrscheinlichkeitstheorie oft in den Hintergrund; wichtiger sind die Zufallsvariablen und deren gemeinsame Verteilung.  $X$  muss nur "genügend gross" sein, damit alle Zufallsvariablen von Interesse darauf definiert sein können. Analog geht man meist von einer Klasse  $\mathcal{E}$  von Teilmengen aus, die man als mögliche Ereignisse betrachten will, und definiert dann  $\Sigma$  als die kleinste  $\sigma$ -Algebra, welche  $\mathcal{E}$  enthält.

Es haben sich in der Wahrscheinlichkeitstheorie auch andere Standardbezeichnungen eingebürgert: So schreibt man  $\Omega$  statt  $X$ ,  $P$  statt  $\mu$ ,  $\mathcal{F}$  statt  $\Sigma$  und  $X$  statt  $f$ .

(Ich danke meinen Kollegen Hans-Ruedi Künsch und Hans Bühlmann für wertvolle Hinweise und Ergänzungen zu diesem Abschnitt.)