Grundlagen

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

In diesem Vorkapitel werden eine Reihe von grundlegenden Gegenständen der Mathematik des Gymnasiums zusammenfassend dargestellt.

Die Titel der einzelnen Abschnitte sind wie folgt:

- **Koordinatensysteme**
- **Darstellung von Geraden**
- **Ungleichungen**
- **Potenzfunktionen**
- **Trigonometrische Funktionen**
- **Sinus- und Cosinus-Satz**
- **Ellipse und Hyperbel**

Zu den einzelnen Abschnitten gehören neben der zusammenfassenden Darstellung der wichtigsten Tatsachen jeweils eine Anzahl von einfachen Testfragen und einige *multiple choice* Fragen.

Ausserdem ist ein kurzer Text über Vektoralgebra beigefügt, der dieses Gebiet kurz und kompakt beschreibt. Hinzuweisen ist auch auf *Teil C Anhang* mit dem Abschnitt über Komplexe Zahlen.

Wir empfehlen, diese Seiten möglichst früh im Semester durchzuarbeiten. Dies empfiehlt sich insbesondere im Hinblick auf die nichtmathematischen Vorlesungen, die Sie besuchen, da auch dort von Anfang an vom üblichen Gymnasiallehrstoff ohne weitere Kommentare Gebrauch gemacht wird.

Sollten Sie beim Durcharbeiten oder bei den hier gestellten Fragen irgendwelche Schwierigkeiten haben, so werten Sie dies als Zeichen dafür, dass Ihr Mathematik-Wissen Lücken aufweist, die sich in den kommenden Wochen unvorteilhaft auswirken können.

Denken Sie daran, dass in der Mathematik das Neue immer auf dem Alten aufbaut!

In diesem Fall sollten Sie den entsprechenden Stoff mit Hilfe eines Buches sorgfältig nacharbeiten. Entsprechende Literaturangaben finden Sie jeweils zu Beginn der einzelnen Abschnitte.

Grundlagen

1. Koordinatensysteme

Kurzer Text über die verschiedenen Koordinatensysteme in zwei und drei Dimensionen.

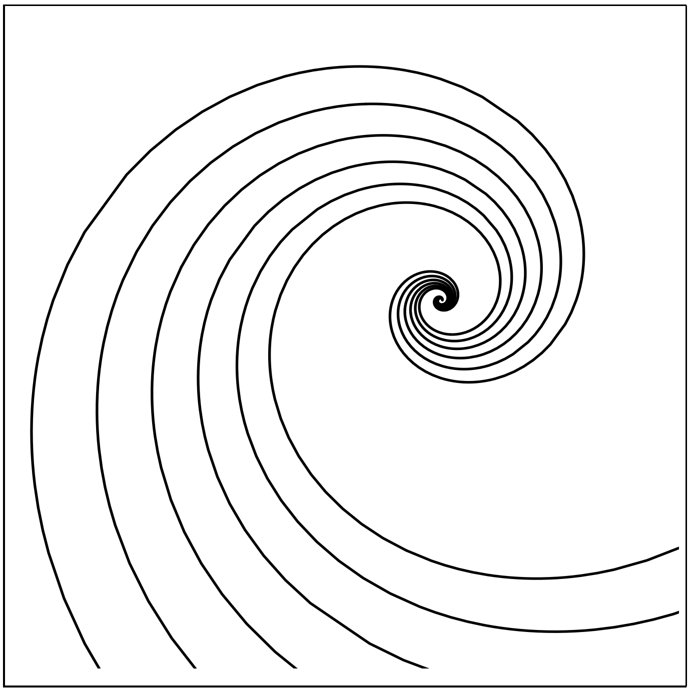
Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Text über Koordinatensysteme

Versuchen Sie die Antworten auf die in der Zusammenfassung zu findenden Fragen *ohne Nachsehen* im Skript zu geben. Es ist eine gute Idee, die Antworten schriftlich festzuhalten, als ob Sie sie von einer anderen Person korrigieren lassen müssten.

Geben Sie sich nicht mit ``ungefährem" Wissen zufrieden!

Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen zu.

Koordinatensysteme



Auf die Plätze, fertig, los!

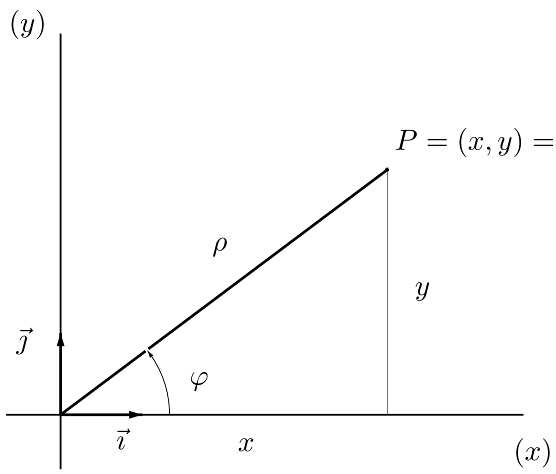
Mögliche Aussage des virtuellen Rektors der ETH zu Beginn des Studienjahres.

In diesem Nullkapitel unserer Vorlesung wollen wir eine Übersicht über einige viel gebrauchte Koordinatensysteme geben.

1 Koordinatensysteme in der Ebene

Wohlbekannt ist das *Kartesische Koordinatensystem*: Es wird ein Punkt O gewählt, sowie zwei senkrecht zueinander stehende Einheitsvektoren $\vec{\imath}$ und $\vec{\jmath}$. Dabei nehmen wir zwingend an, dass $\vec{\jmath}$ aus $\vec{\imath}$ durch Drehung um $\pi/2$ im *Gegenuhrzeigersinn* entsteht. Wir nennen die (Zahl-)Gerade durch O in Richtung $\vec{\imath}$ die x-Achse und die (Zahl-)Gerade durch O in Richtung $\vec{\jmath}$ die y-Achse. Dann wird jeder Punkt P der Ebene durch ein geordnetes Zahlenpaar (x, y) beschrieben: Die Zahl x entspricht der Projektion längs $\vec{\jmath}$ von P auf die x-Achse und die Zahl y der Projektion längs $\vec{\imath}$ von P auf die y-Achse. Die Zahlen x, y heissen die *(Kartesischen) Koordinaten* von P (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Das Zahlenpaar (x, y) beschreibt die Lage des Punktes P in der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) offensichtlich ein Punkt P in der Ebene. Wir nennen die Ebene versehen mit einem festen (x, y)-Koordinatensystem auch etwa die (x, y)-Ebene.

Der Punkt P lässt sich auch beschreiben, indem man seinen Abstand ρ von O und den Winkel φ angibt, den man zwischen der Richtung von $\vec{\imath}$ und der Richtung $\vec{OP}$ im Gegenuhrzeigersinn misst. (Offensichtlich ist φ durch P nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt!) Man nennt (ρ, φ) die *Polarkoordinaten* von P (bezüglich des gewählten Koordinatensystems).



Will man vom Kartesischen Koordinatensystem zum Polarkoordinatensystem wechseln, oder umgekehrt, so hat man folgende einfachen Formeln:

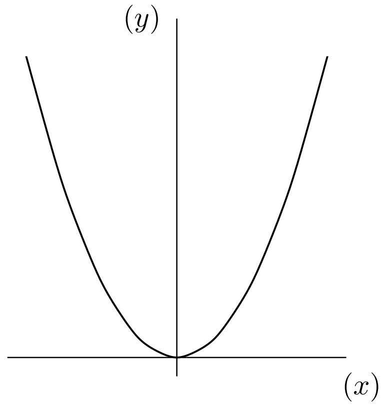
$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

und

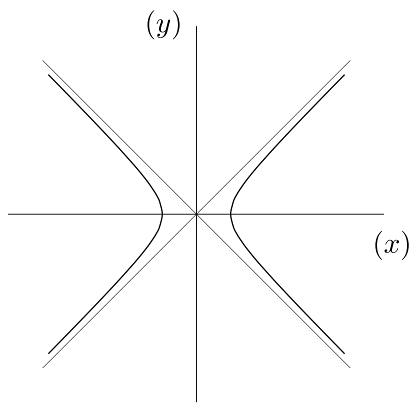
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = y/x$$

Beispiel Es sei eine Funktion $f : x \to f(x)$ gegeben. Dann gehört zu f der sogenannte Graph von f, nämlich die (Punkt-)Menge $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$. Ist z.B. $f(x) = x^2$, so erhält man das Bild der sogenannten Normparabel.

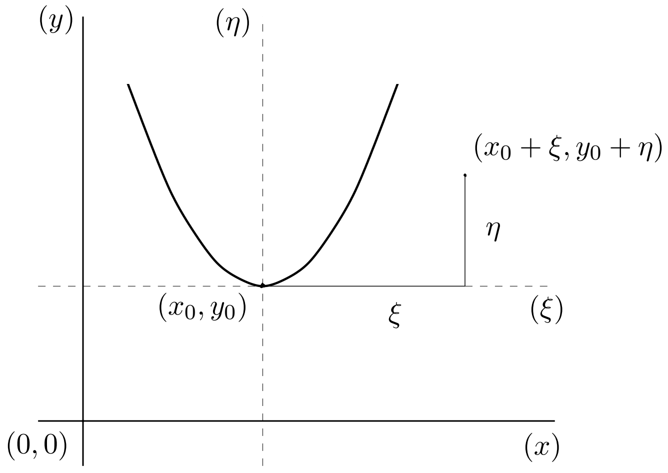


Beispiel Ist die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ gegeben, so entspricht ihr in der (x, y)-Ebene die (Punkt-)Menge $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Dies ist definitionsgemäss eine gleichseitige Hyperbel.



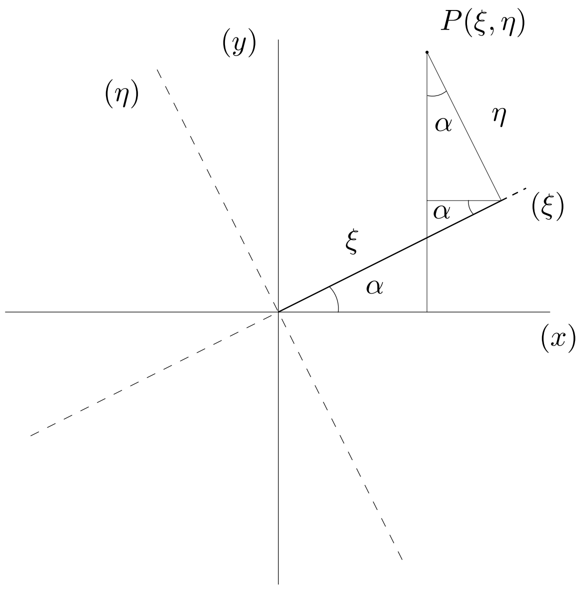
Es ist klar, dass es in der Ebene viele verschiedene Kartesische Koordinatensysteme gibt; sie gehen aber alle durch Parallelverschiebung und Drehung auseinander hervor. Wir untersuchen den Effekt dieses Wechsels an zwei ganz einfachen Beispielen.

Beispiel Das Kartesische (ξ, η)-Koordinatensystem sei aus dem (x, y)-Koordinatensystem durch Parallelverschiebung entstanden: die ξ-Achse ist parallel zur x-Achse und die η-Achse ist parallel zur y-Achse. Der Nullpunkt des (ξ, η)-Koordinatensystems habe im (x, y)-Koordinatensystem die Koordinaten (x_0, y_0). Dann gilt die Beziehung $(\xi, \eta) = (x - x_0, y - y_0)$. Ist im (ξ, η)-Koordinatensystem die Normparabel $\eta = \xi^2$ gegeben, so stellt diese sich im (x, y)-Koordinatensystem durch die Gleichung $y - y_0 = (x - x_0)^2$, also durch $y = x^2 - 2x_0 x + (x_0^2 + y_0)$ dar.



Beispiel Das Kartesische (ξ,η)-Koordinatensystem sei aus dem (x,y)-Koordinatensystem bei festem Nullpunkt durch Drehung um den Winkel α entstanden. Dann gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \\ y &= \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{aligned}$$



Es sei nun im (x,y)-Koordinatensystem die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ gegeben. Wählen wir $\alpha = -\pi/4$, so gilt

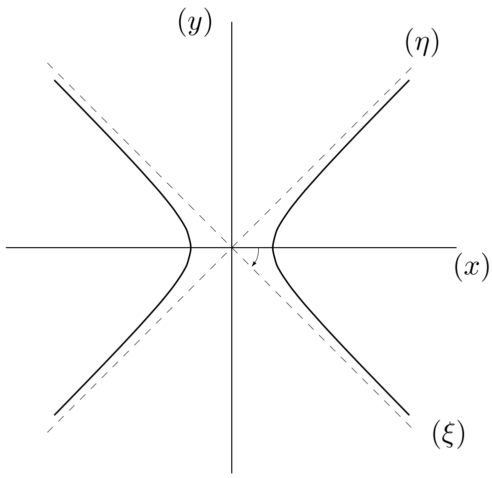
$$\begin{aligned} x &= \xi\frac{\sqrt{2}}{2} + \eta\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= -\xi\frac{\sqrt{2}}{2} + \eta\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Reihe nach

$$\begin{aligned}
1 &= x^2 - y^2 \\
1 &= \frac{1}{2}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2) \\
1 &= \frac{1}{2}4\xi\eta \\
1 &= 2\xi\eta
\end{aligned}$$

Die Gleichung der ursprünglich im (x, y)-Koordinatensystem gegebenen Hyperbel lautet im (ξ, η)-Koordinatensystem

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{1}{\xi} \ .$$

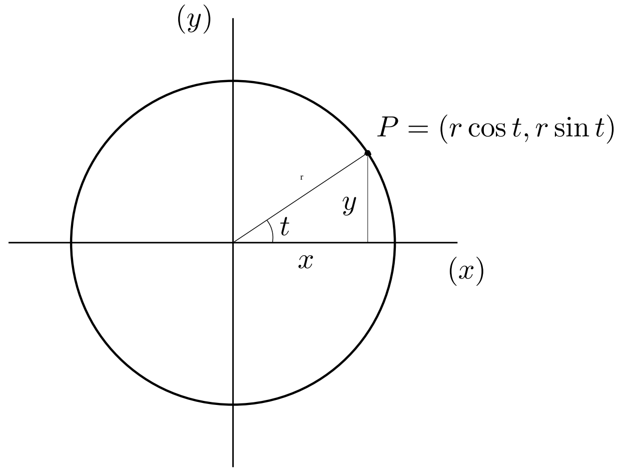


Neben Gleichungen zwischen x und y gibt es auch andere Arten, Kurven darzustellen. Will man z.B. die Bewegung eines punktförmigen Gegenstandes A in der (x, y)-Ebene beschreiben, so bietet sich an, die Koordinaten des Punktes anzugeben, an dem sich A zur Zeit t befindet, also $x(t), y(t)$.

Beispiel Es befinde sich A zur Zeit t beispielsweise im Punkt mit den Kartesischen Koordinaten $(x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$. In diesem Fall beschreibt unser punktförmige Gegenstand im Laufe der Zeit einen Kreis mit Radius r um O. Es gilt nämlich

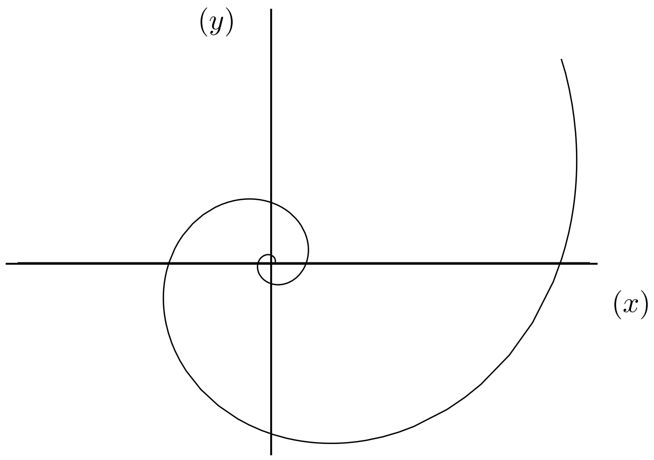
$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2 \ ,$$

so dass der Abstand zum Nullpunkt O immer gleich gross ist, nämlich r.

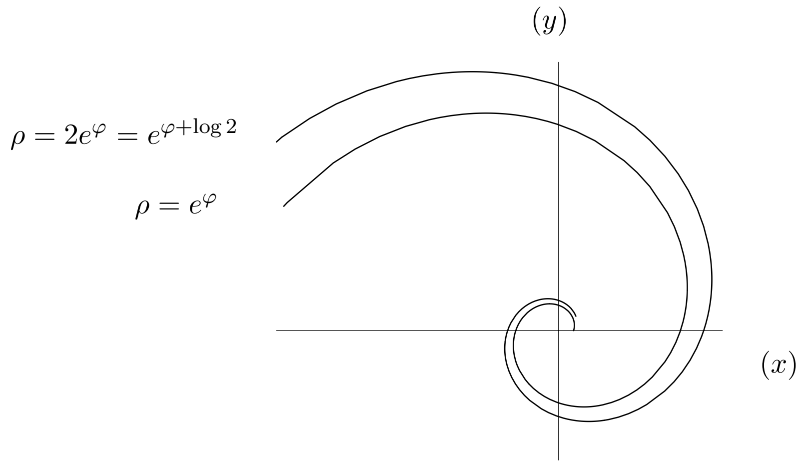


Schliesslich lässt sich eine Kurve auch durch eine Gleichung in Polarkoordinaten beschreiben.

Beispiel Es sei die Gleichung $\rho = e^{\varphi}$ gegeben. Welche Punkte in der Ebene haben die Eigenschaft, dass ihre Polarkoordinaten (ρ, φ) diese Gleichung erfüllen? Es ist dies die logarithmische Spirale, die nach ihrem Entdecker Johann Bernoulli auch etwa Bernoullische Spirale genannt wird.

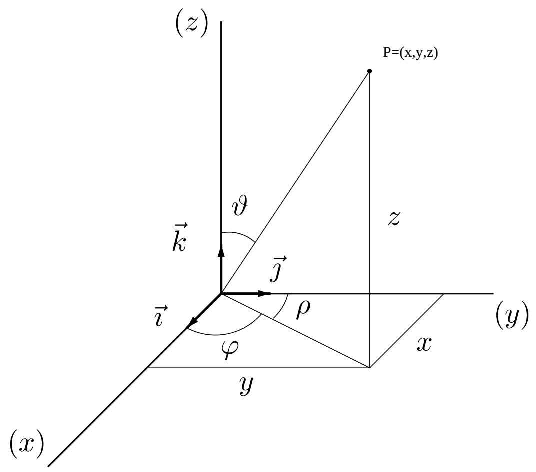


Strecken wir das Bild der logarithmischen Spirale vom Ursprung aus um den Faktor c, $c > 0$, so erhalten wir die Kurve $\rho = c \cdot e^{\varphi}$. Nun gilt $\rho = c \cdot e^{\varphi} = e^{\log c} \cdot e^{\varphi} = e^{\log c + \varphi}$. Setzen wir $\log c + \varphi = \psi$, so folgt $\rho = e^{\psi}$. Das gestreckte Bild der logarithmischen Spirale ist also wieder die gleiche logarithmische Spirale, nur wird jetzt der Winkel anders gemessen: an Stelle von φ wird $\psi = \log c + \varphi$ genommen. Das gestreckte Bild der Kurve entsteht also aus der ursprünglichen Spirale durch eine Drehung im Uhrzeigersinn um $\varphi_0 = \log c$.



2 Koordinatensysteme im Raum

Ein *Kartesisches Koordinatensystem* im Raum besteht aus einem Punkt O und aus drei senkrecht zueinander stehenden Einheitsvektoren $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Dabei geht man von der Konvention aus, dass diese drei Vektoren ein *rechtshändiges* System bilden. Die (Zahl-)Geraden in Richtung $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$ und $\vec{k}$ heissen die x-, y- und z-Achsen des Koordinatensystems. Jedem Punkt P im Raum entspricht ein Tripel (x, y, z) von Zahlen, dabei sind x, y die Koordinaten der Projektion P' von P (längs der z-Achse) auf die (x, y)-Ebene, und z beschreibt den (positiven oder negativen) Abstand von P von der (x, y)-Ebene. Die Zahlen x, y, z heissen die (Kartesischen) Koordinaten von P (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Das Zahlentripel (x, y, z) beschreibt dann die Lage des Punktes P im Raum. Umgekehrt entspricht jedem Zahlentripel (x, y, z) ein Punkt im Raum.



Neben dem Kartesischen Koordinatensystem gibt es andere. Zum Beispiel kann man in der (x, y)-Ebene eines räumlichen Koordinatensystems ein Polarkoordinatensystem benützen, um die Lage der Projektion P' zu beschreiben. Dann entsprechen dem Punkt P im Raum die drei Zahlen ρ, φ, z (in dieser Reihenfolge!). Man nennt dies die *Zylinder-Koordinaten* des Punktes P. Der Name kommt daher, dass alle Punkte des dreidimensionalen Raumes, die zur festen Zylinderkoordinaten ρ gehören, einen (Kreis-)Zylinder bilden (mit Achse gleich der z-Achse und mit Radius ρ).

Um vom Zylinder-Koordinatensystem ins Kartesische Koordinatensystem, oder umgekehrt, zu wechseln, hat man folgende Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

und

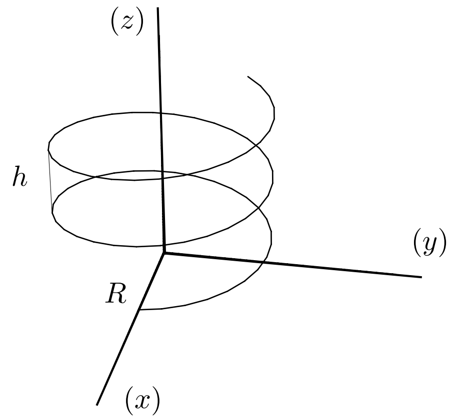
$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

Beispiel Stellt man sich vor, dass die Kurve K im Raum entsteht, indem sich ein Punkt A auf K bewegt, so führt dies direkt auf die Beschreibung der Kurve durch eine Parameterdarstellung: Es werden die drei Koordinaten des Punktes A zur Zeit t angegeben, $x(t), y(t), z(t)$.

Die Parameterdarstellung (im Kartesischen Koordinatensystem)

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cdot \cos t \\ y(t) &= R \cdot \sin t \\ z(t) &= \frac{h}{2\pi} \cdot t \end{aligned}$$

beschreibt auf diese Art eine Schraubenlinie mit reduzierter Ganghöhe h auf einem Kreis-Zylinder mit Radius R und Achse gleich der z-Achse.



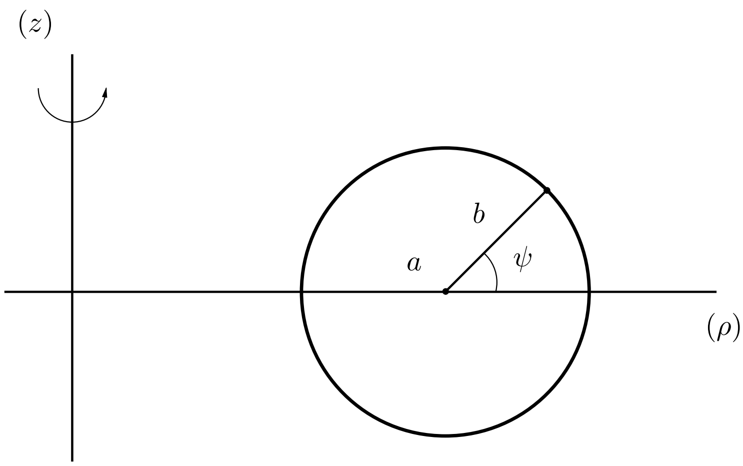
Wählt man ein Zylinder-Koordinatensystem, so stellt sich diese Schraubenlinie dar durch

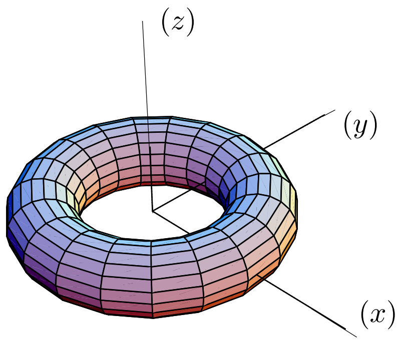
$$\begin{aligned} \rho &= R \\ \varphi &= t \\ z(t) &= \frac{h}{2\pi} \cdot t \end{aligned}$$

Beispiel Man betrachte in der (ρ, z)-Ebene den Kreis K mit Radius b und Mittelpunkt $(a, 0)$. Rotiert dieser Kreis um die z-Achse, so entsteht ein sogenannter Torus. Der Kreis K hat (in der (ρ, z)-Ebene) die Gleichung

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2 \ .$$

Fasst man ρ und z als Zylinder-Koordinaten auf, so ist dies gleichzeitig die Gleichung des Torus.





Will man zum zugehörigen Kartesischen Koordinatensystem wechseln, so hat man alle Koordinaten in x, y, z auszudrücken. Damit erhält man

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2 \ .$$

Man kann die Torusfläche auch mit Hilfe von Parametern beschreiben: Man erreicht offenbar jeden Punkt des Torus, wenn man auf dem Kreis K einen Punkt Q fixiert und diesen um die z-Achse rotieren lässt. Den Punkt Q auf dem Kreis können wir in der (ρ, z)-Ebene mittels einer Parameterdarstellung von K mit Parameter s beschreiben:

$$\begin{aligned} \rho &= a+b\cos s \\ z &= b\sin s \end{aligned}$$

Die Rotation um die z-Achse wird durch die Zylinderkoordinate φ beschrieben. Damit hat man die folgende Parameterdarstellung der Torusfläche in Zylinder-Koordinaten mit Parametern s und t:

$$\begin{aligned} \rho(s,t) &= a+b\cos s \\ \varphi(s,t) &= t \\ z(s,t) &= b\sin s \end{aligned}$$

Geht man zum zugehörigen Kartesischen Koordinatensystem über, so erhält man

$$\begin{aligned} x(s,t) &= (a+b\cos s)\cdot\cos t \\ y(s,t) &= (a+b\cos s)\cdot\sin t \\ z(s,t) &= b\sin s \end{aligned}$$

Variieren beide Parameter s und t zwischen 0 und 2π, so erhält man die ganze Torusfläche.

Neben dem Kartesischen Koordinatensystem und dem Zylinder-Koordinatensystem spielt im dreidimensionalen Raum auch das sogenannte *Kugel-Koordinatensystem* eine Rolle. In diesem System wird die Lage eines Punktes P durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und durch die beiden Winkel φ und θ beschrieben. Der Winkel φ ist dabei der gleiche wie im Zylinder-Koordinatensystem und der Winkel θ ist der Winkel zwischen der positiven z-Achse und der Verbindungsstrecke OP.

Ein Wechsel vom Kugel-Koordinatensystem ins Kartesische Koordinatensystem wird durch die folgenden Formeln beschrieben:

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z &= r\cdot\cos\theta \end{aligned}$$

Beim Wechsel in der umgekehrten Richtung gelten die Formeln

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{aligned}$$

Beispiel Eine Kugel mit Radius R und Mittelpunkt O stellt sich im Kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichung

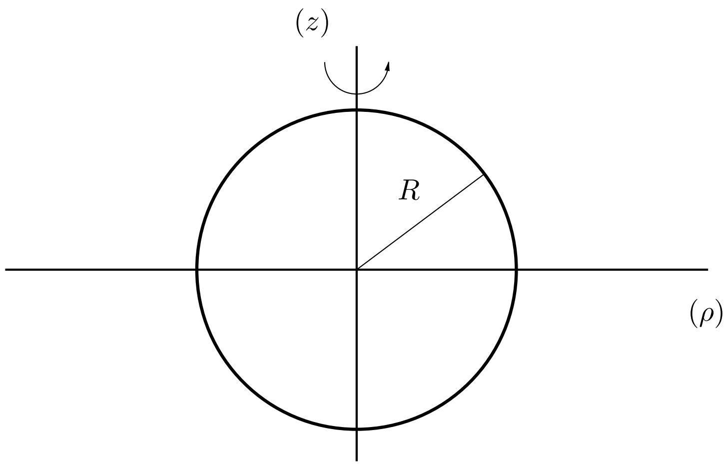
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

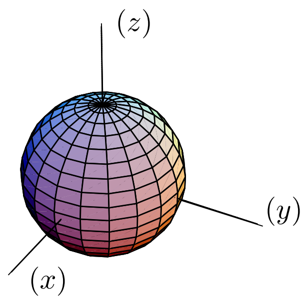
dar, im Zylinder-Koordinatensystem durch

$$\rho^2+z^2=R^2$$

und im Kugel-Koordinatensystem durch

$$r=R\ .$$





Die Tatsache, dass im Kugel-Koordinatensystem zu festem r eine Kugeloberfläche gehört, ist natürlich der Grund für die Namensgebung.

Repetition: Grundlagen

Koordinatensysteme

Man rufe sich in Erinnerung, was ein *kartesisches Koordinatensystem* in zwei Dimensionen, in drei Dimensionen ist. Was versteht man unter Rechts- bzw. Linkshändigkeit des Koordinatensystems?

Was sind *Polarkoordinaten* in der Ebene?

Test *Was sind die Kartesischen Koordinaten (x, y) des Punktes P der Ebene, der in Polarkoordinaten durch $P = (\rho, \phi)$ gegeben ist?*

Test *Was sind die Polarkoordinaten $P = (\rho, \phi)$ des Punktes Q der Ebene, der in kartesischen Koordinaten durch $Q = (x, y)$ gegeben ist?*

Was sind *Zylinderkoordinaten* im dreidimensionalen Raum?

Test *Was sind die kartesischen Koordinaten (x, y, z) des Punktes P, der in Zylinderkoordinaten durch $P = (\rho, \phi, z)$ gegeben ist?*

Test *Was sind die Zylinderkoordinaten $P = (\rho, \phi, z)$ des Punktes Q, der in kartesischen Koordinaten durch $Q = (x, y, z)$ gegeben ist?*

Was sind *Kugelkoordinaten* im dreidimensionalen Raum?

Test *Was sind die kartesischen Koordinaten (x, y, z) des Punktes P, der in Kugelkoordinaten durch $P = (r, \phi, \theta)$ gegeben ist?*

Test *Was sind die Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ) des Punktes Q, der in kartesischen Koordinaten durch $Q = (x, y, z)$ gegeben ist.*

Test *Man betrachte in der Ebene zwei kartesische Koordinatensysteme, deren Koordinaten durch (x, y) bzw. (ξ, η) bezeichnet werden. Der Ursprung des (ξ, η)-Koordinatensystems hat die (x, y)-Koordinaten $(1, 2)$. Die ξ-Achse bildet mit der x-Achse einen Winkel von $30°$. Man berechne die (x, y)-Koordinaten des Punktes P, der im (ξ, η)-Koordinatensystem durch $(2, 3)$ gegeben ist.*

Frage 1, Polarkoordinaten

Gegeben ist der Punkt mit den kartesischen Koordinaten $(-1, \sqrt{3})$. Was sind seine Polarkoordinaten?

A $\rho = 1\ , \quad \phi = \pi/4$

B $\rho = 2\ , \quad \phi = \pi/3$

C $\rho = 1\ , \quad \phi = 2\pi/3$

D $\rho = 2\ , \quad \phi = 2\pi/3$

Frage 1: Polarkoordinaten

Antworten:

A: Nein, diese Aussage ist nicht richtig.

B: Nein, diese Aussage ist nicht (vollständig) richtig. Man beachte das Vorzeichen.

C: Nein, diese Aussage ist nicht (vollständig richtig. Der Winkel stimmt. Wie gross ist der Abstand vom Ursprung?

D: Ja, dies ist die richtige Aussage.

Frage 2, Raumkoordinaten

Welche der folgenden Gleichungen stellt einen Kreiszylinder mit der y-Achse als Achse und dem Grundkreisradius 3 dar?

A $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

B $x^2 + z^2 = 9$

C $x^2 + z^2 = 3$

D $y^2 + z^2 = 9$

Frage 2: Raumkoordinaten

Antworten:

A: Nein, diese Gleichung stellt eine Kugel dar.

B: Ja, diese Gleichung stellt den vorgegebenen Zylinder dar.

C: Nein, diese Gleichung stellt zwar einen Zylinder mit der richtigen Achse dar, aber der Grundkreisradius ist nicht richtig.

D: Nein, diese Gleichung stellt einen Kreiszylinder mit der x-Achse als Achse und dem Grundkreisradius 3 dar.

Grundlagen

2. Darstellung von Geraden

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Abschnitt
Darstellung von Geraden

Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen (9) zu.

U. Stammbach: Analysis I/II
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Im Kapitel Grundlagen *stellen wir unter dem Titel ...* und das setzen wir als wohlbekannt voraus! *Dinge zusammen, die zum Gymnasialstoff gehören. Wer beim Durcharbeiten dieser Seiten* irgendwelche Schwierigkeiten *hat, ist gut beraten, den Stoff nachzuarbeiten. Wir verweisen wenn möglich auf die entsprecheneden Abschnitte im Buch von Burg, Haf, Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I Analysis, Teubner Verlag, oder geben eine andere Referenz an.*

Analytische Beschreibung von Geraden in der Ebene.

Burg, Haf, Wille, Band I, Seiten 151-158.

Ist in der Ebene E ein kartesisches Koordinatensystem ausgezeichnet, so wird eine Gerade g durch eine *lineare* Gleichung in x und y beschrieben:

$$y = ax + b \ .$$

Die Grössen a und b sind durch g eindeutig bestimmt. Umgekehrt beschreibt jede derartige lineare Gleichung eine Gerade.

Zwei Fälle treten in natürlicher Weise auf:

Fall a: Kennt man zwei Punkte P_0 und P_1 der Geraden g, so ergeben sich die zugehörigen Grössen a und b, indem man benutzt, dass die Koordinaten der Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_2)$ die Gleichung $ax + b$ erfüllen. Dies führt auf zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und b. *Einfacher* ist es allerdings, die Gleichung direkt hinzuschreiben:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \ .$$

Diese Gleichung drückt aus, dass *erstens* der Punkt (x_0, y_0) auf der Geraden liegt und *zweitens* die zu den Punkten $P = (x, y)$ (allgemeiner Punkt der Geraden) und $P_0 = (x_0, y_0)$ gehörige Steigung übereinstimmt mit der Steigung, die durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_0 = (x_0, y_0)$ vorgegeben ist.

Fall b: Ist die Gerade durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ und die Steigung m gegeben, so ist $a = m$. Die noch fehlende Grösse b lässt sich erhalten, indem man benutzt, dass die Koordinaten des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)$ die Gleichung $y = mx + b$ erfüllen. *Einfacher* ist es, die Gleichung direkt hinzuschreiben:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ .$$

Sie drückt – ähnlich wie oben – aus, dass *erstens* $P_0 = (x_0, y_0)$ auf der Geraden liegt und *zweitens* die zu den Punkten $P = (x, y)$ (allgemeiner Punkt der Geraden) und $P_0 = (x_0, y_0)$ gehörige Steigung m ist.

Man zeige, dass sowohl im Falle (a) wie auch im Falle (b) die beiden skizzierten Wege zum gleichen Resultat führen.

Bemerkung: Man beachte, das die hier besprochene analytische Beschreibung die Parallelen zur y-Achse *nicht* umfasst. Treten solche Geraden auf, so kann man sie durch Gleichungen der Form $x = c$ beschreiben.

Fragen:

Woran erkennt man an der Geradengleichung. ob die Gerade fällt oder steigt oder horizontal ist?

Die Gerade g sei parallel zur x-Achse und verlaufe durch den Punkt $(1, 3)$. Wie lautet ihre Gleichung?

Wie lautet die Gleichung der ersten Winkelhalbierenden, also der Geraden durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Wie lautet die Gleichung der zweiten Winkelhalbierenden, also der Geraden durch die Punkte $(0, 0)$ und $(-1, 1)$.

Was ist die geometrische Bedeutung von b in der linearen Gleichung $y = ax + b$?

Man gebe die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte $(2, -3)$ und $(-1, 1)$ verläuft?

Soviel zu Geraden in der Ebene. Im dreidimensionalen Raum ist die Situation etwas anders. *Geraden im dreidimensionalen Raum entsprechen nicht einfach linearen Gleichungen in x, y und z.* (Die lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ beschreibt bekanntlich ein anderes geometrisches Gebilde! Was für eines?) Um Geraden darzustellen, müssen andere Mittel verwendet werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Gerade durch eine *Parameterdarstellung* zu beschreiben (vgl. Skript Vektoralgebra):

Die Gerade g, die durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ geht und die Richtung $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ besitzt, wird durch die Parameteterdarstellung

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{a}$$

beschrieben. Der Parameter t variiert von $-\infty$ bis $+\infty$. Jeder Punkt der Geraden g tritt bei dieser Beschreibung für genau einen Wert des Parameters t auf.

Frage 1, Geraden

Welche Gleichung bzw. Parameterdarstellung stellt eine Gerade dar?

A $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

B $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$

C $yx + 2y - 1 = 0$

D $3x + 4y + 5 = 0$

E $(x + y)^2 = 1$

Frage 1: Geraden

Antworten:

A: Nein. Quadratische Terme sind bei einer solchen parametrischen Darstellung nicht erlaubt.

B: Nein. Der Graph dieser Funktion ist keine Gerade.

C: Nein. Gemischte Terme, wie hier xy, gehören nicht zur Gleichung einer Geraden.

D: Ja. Diese Gleichung stellt eine Gerade dar.

E: Nein. Durch diese Gleichung werden die beiden Geraden $x + y = 1$ und $x + y = -1$ beschrieben.

Frage 2, Geraden

Welches Paar von Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen stellt zueinander parallele Geraden dar ?

A $y = 2x - 4 \quad ; \quad y - \frac{1}{2}x + 17 = 0$

B $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad ; \quad y = -x + 4$

C $y - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0 \quad ; \quad y = -\frac{2}{3}x + 4$

D $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 + 6t \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}t \end{cases}$

E $y = 2x + 1 \quad ; \quad x = -2y + 1$

Frage 2: Geraden

Antworten:

A: Nein. Die Steigungen (2 bzw. 1/2) sind verschieden.

B: Nein. Der Richtungsvektor der ersten Geraden hat nicht dieselbe Steigung wie der Richtungsvektor der zweiten Geraden.

C: Nein. Die Steigungen sind $2/3$ bzw. $-2/3$.

D: Ja. Die Richtungsvektoren $((3,6)$ bzw. $(5/4,5/2))$ sind zueinander parallel.

E: Nein. Die zwei Geraden sind züinander orthogonal (Warum ?).

Frage 3, Geraden

Welches Paar von Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen definiert Geraden, die **nicht** zueinander senkrecht sind?

A $y = \frac{1}{3}x \qquad ; \qquad 3x + y - \frac{1}{4} = 0$

B $\begin{cases} x = \frac{3}{4}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

C $y = \frac{2}{3}x + 1 \qquad ; \qquad x = -\frac{3}{2}y - 9$

D $y = -\frac{1}{4}x \qquad ; \qquad x = \frac{1}{4}y + 4$

E $y = x \qquad ; \qquad y = 1 - x$

Frage 3: Geraden

Antworten:

A: Nein. Die Geraden sind zueinander orthogonal: das Produkt der Steigungen ist gleich -1 !

B: Nein. Die Geraden sind zueinander orthogonal: die Richtungsvektoren $(3/4, 1/2)$ und $(-2, 3)$ sind zueinander orthogonal.

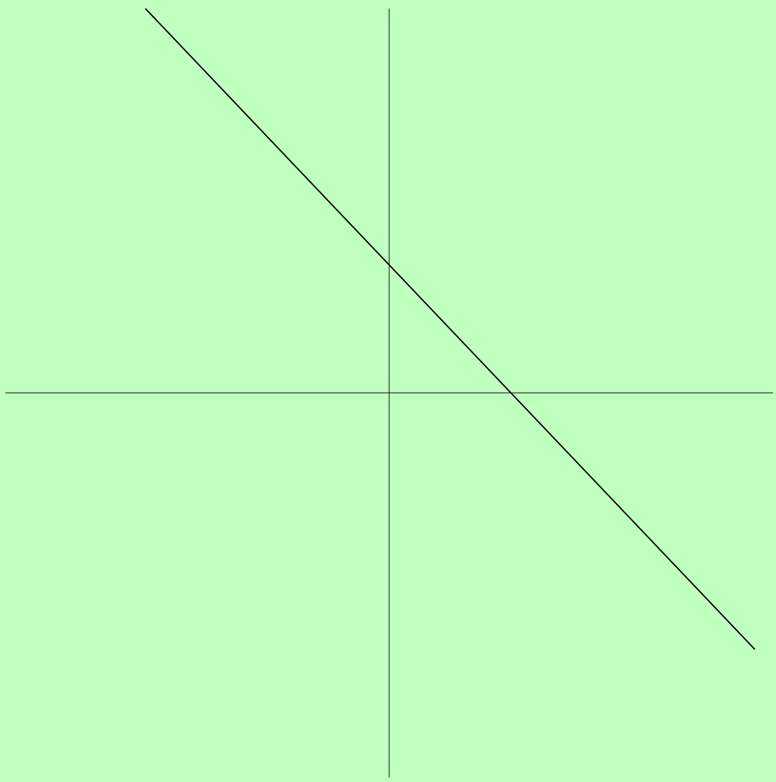
C: Richtig. Das Produkt der Steigungen ist nicht -1.

D: Nein. Die Geraden sind zueinander orthogonal: das Produkt der Steigungen ist gleich -1 !

E: Nein. Die Geraden sind zueinander orthogonal: das Produkt der Steigungen ist gleich -1 !

Frage 4, Geraden

Welche Gleichung passt zur folgenden Gerade ?



A $\frac{2}{3}x + y = 0$

B $x - y = 0$

C $1 - y - x = 0$

Frage 4: Geraden

Antworten:

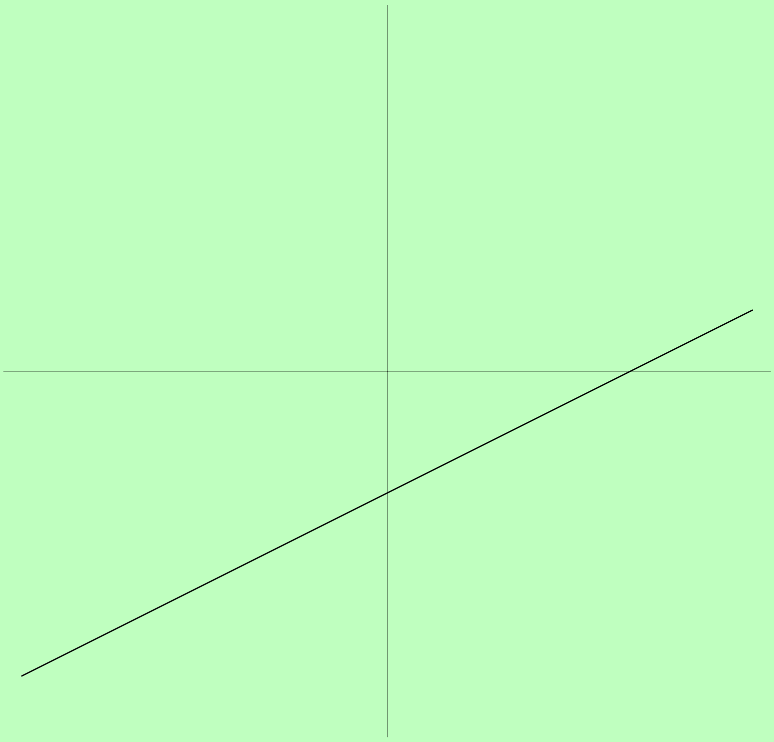
A: Nein. Die Steigung der gezeichneten Geraden ist negativ !

B: Nein. Die gezeichnete Gerade geht nicht durch den Nullpunkt !

C: Richtig.

Frage 5, Geraden

Welche Gleichung (Parameterdarstellung) passt zur folgenden Gerade?



A $y = 2x - 2$

B $y = x - 1$

C $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \end{cases}$

Frage 5: Geraden

Antworten:

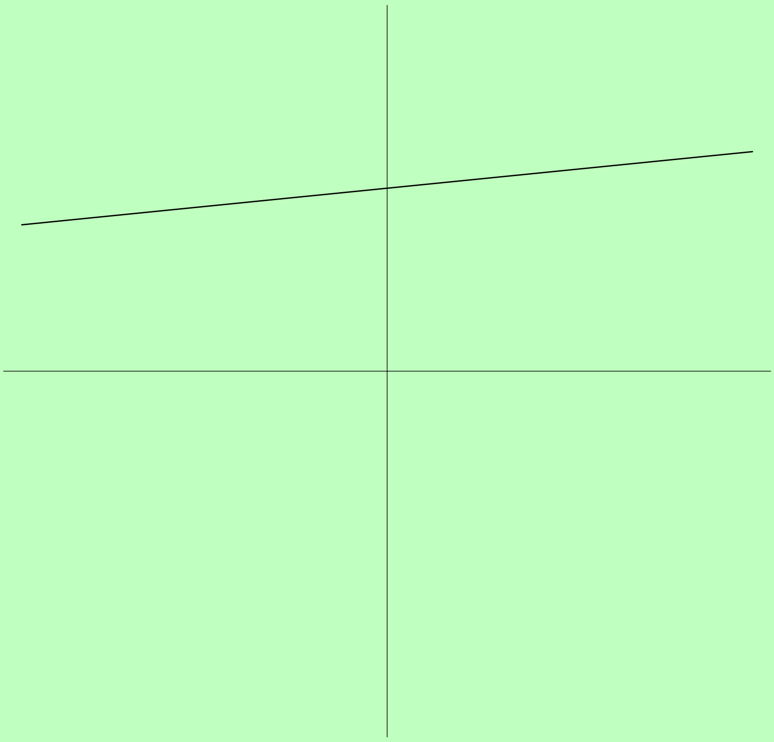
A: Nein. Die Steigung der gezeichneten Gerade ist sicher nicht gleich 2.

B: Nein. Die Steigung der gezeichneten Gerade ist sicher nicht gleich 1.

C: Richtig.

Frage 6, Geraden

Welche Gleichung passt zur folgenden Gerade ?



A $y = \frac{1}{10}x + \frac{3}{2}$

B $y = -4x + \frac{3}{2}$

C $y = \frac{1}{10}x - 4$

Frage 6: Geraden

Antworten:

A: Richtig.

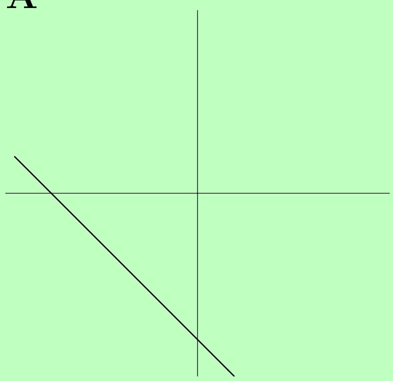
B: Nein. Die gezeichnete Gerade hat positive Steigung.

C: Nein. Die gezeichnete Gerade schneidet die y-Achse im positiven Bereich.

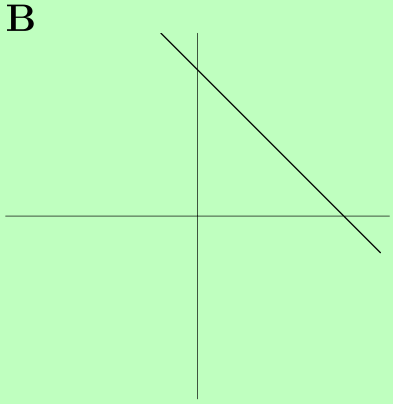
Frage 7, Geraden

Welche Gerade passt zur Gleichung $y = -x + 4$?

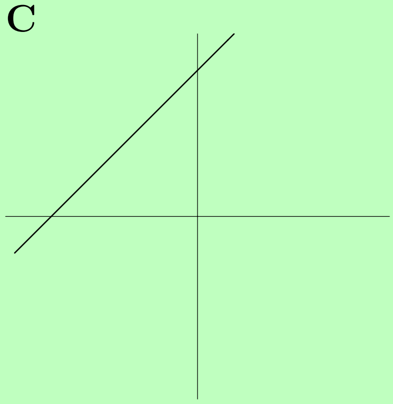
A



B



C



Frage 7: Geraden

Antworten:

A: Nein. Die gezeichnete Gerade schneidet die y-Achse im negativen Bereich.

B: Richtig.

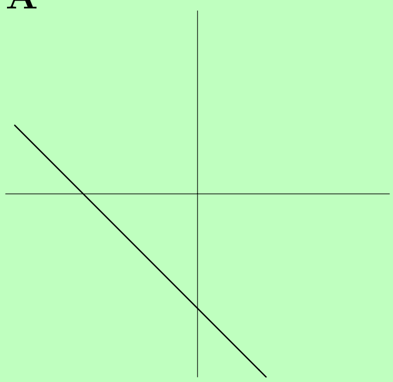
C: Nein. Die gezeichnete Gerade hat positive Steigung.

Frage 8, Geraden

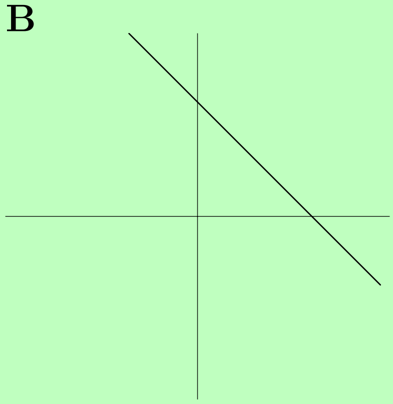
Welche Gerade passt zur Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 2 - t \end{cases} ?$$

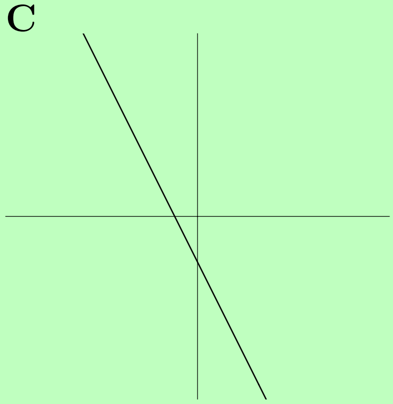
A



B



C



Frage 8: Geraden

Antworten:

A: Nein. Die gezeichnete Gerade geht nicht durch den Punkt $(1/2, 2)$.

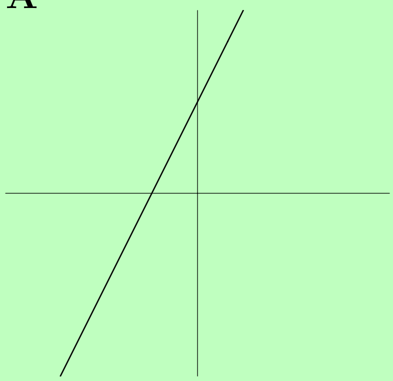
B: Richtig.

C: Nein. Die gezeichnete Gerade hat nicht $(1, -1)$ als Richtungsvektor.

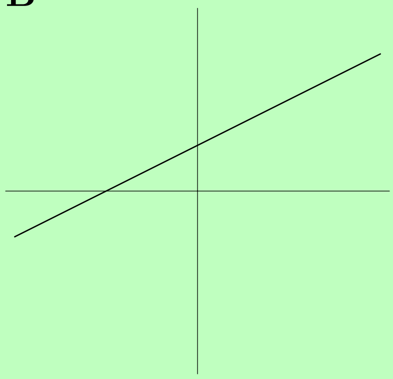
Frage 9, Geraden

Welche Gerade passt zur Gleichung $-\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$?

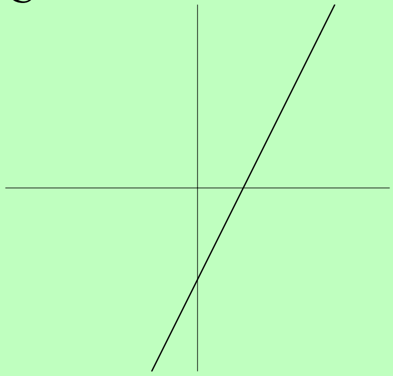
A



B



C



Frage 9: Geraden

Antworten:

A: Nein. Die gezeichnete Gerade hat nicht die Steigung 1/2.

B: Richtig.

C: Nein. Die gezeichnete Gerade schneidet die y-Achse im negativen Bereich.

Grundlagen

3. Ungleichungen

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Abschnitt
Ungleichungen

Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen (5) zu.

U. Stammbach: Analysis I/II
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Ungleichungen

Vgl. *Mathematiklehrbuch des Gymnasiums*

In einer Ebene E, in der ein Koordinatensystem ausgezeichnet ist, beschreibt eine Gleichung in x und y bekanntlich in aller Regel eine **Kurve** K. Ist eine **Ungleichung** in x und y gegeben, (z.B. $xy > 1$) so wird in aller Regel damit ein Gebiet B der (x, y)-Ebene beschrieben. Es wird von der Kurve K begrenzt, die zur zugehörigen Gleichung (im Beispiel $xy = 1$) gehört.

Will man B bestimmen, so wird man als erstes die Kurve K bestimmen und im Anschluss daran untersuchen, in welchen der durch K abgegrenzten Gebiete die Ungleichung erfüllt ist. Dazu genügt es, Testpunkte einzusetzen.

Man führe dies für die Ungleichung $xy > 1$ explizit durch. Gehört der Punkt $(1, 1)$ zum dadurch beschriebenen Gebiet B?

Man beachte: Steht in der Ungleichung das Zeichen $\geq$ (oder $\leq$) so gehört die begrenzende Kurve K zum Gebiet B, andernfalls nicht.

Oft wird man Ungleichungen umformen, bevor man zur zugehörigen Gleichung übergeht. Dabei sind die gleichen Regeln zu beachten wie beim Umformen von Gleichungen. Das Gebiet B verändert sich nicht, wenn

- auf beiden Seiten der Ungleichung die gleiche Zahl addiert bzw. subtrahiert wird;
- beide Seiten der Ungleichung mit der gleichen **positiven** Zahl multipliziert oder dividiert werden;
- beide Seiten der Ungleichung mit der gleichen **negativen** Zahl multipliziert oder dividiert werden **und** gleichzeitig die Richtung des Ungleichheitszeichens **umgekehrt** wird.

Bemerkung: Bei Multiplikation bzw. Division mit Ausdrücken, die x bzw. y enthalten ist besondere Vorsicht geboten, da i.a. das Vorzeichen solcher Ausdrücke nicht von vorneherein feststeht. Gewöhnlich müssen sich dann Fallunterscheidungen anschliessen.

Fragen:

Man bestimme das Gebiet, das durch die Ungleichung $3x - 7 > y + 1$ *beschrieben wird.*

Man bestimme das Gebiet, das durch die Ungleichung

$$\frac{y+1}{x-3} \leq 2$$

beschrieben wird.

Frage 1, Ungleichungen

Welches Paar von Ungleichungen beschreibt dasselbe Gebiet in der Ebene ?

A $\dfrac{-x-2}{y-1} \geq 1$; $x+2 \leq 1-y$

B $(x+1)(y+2) < 0$; $\begin{cases} x < -1 \\ y > -2 \end{cases}$

C $\dfrac{x+5}{y+1} \geq 0$; $x+5 \geq 0$

D $(x+y)^2 \geq 1$; $x \geq 1-y$

E $(x+y)^5 \geq 1$; $x \geq 1-y$

Frage 1: Ungleichungen

Antworten:

A: Nein. Hier braucht man eine Fallunterscheidung.

B: Nein. Auch $x > -1$ und $y < -2$ muss betrachtet werden.

C: Nein. Auch $y + 1$ spielt eine Rolle...

D: Nein. Hier braucht man eine Fallunterscheidung. Beim Wurzelziehen muss sowohl das negative als das positive Bereich betrachtet werden.

E: Ja. In der Tat, jede reelle Zahl ist eine fünfte Wurzel von genau einer reellen Zahl.

Frage 2, Ungleichungen

Welcher Punkt gehört zur Lösungsmenge der Ungleichung
$xy + 2x + y + 2 \geq 0$?

A $P_1 = (38, -2)$

B $P_2 = (-2, 3)$

C $P_3 = (-2, 5)$

Frage 2: Ungleichungen

Antworten:

A: Richtig.

B: Falsch.

C: Falsch.

Frage 3, Ungleichungen

Welcher Punkt gehört **nicht** zur Lösungsmenge der Ungleichung
$\dfrac{x+5}{y-4} \geq 7$?

A $P_1 = (1, 4)$

B $P_2 = (-55, -1)$

C $P_3 = (2, 5)$

Frage 3: Ungleichungen

Antworten:

A: Richtig.

B: Falsch.

C: Falsch.

Frage 4, Ungleichungen

Welche Lösungsmenge gehört zur Ungleichung $x + y \geq 2$?

A Die Region unterhalb der Geraden $y = -x + 2$.

B Die Region oberhalb der Geraden $y = -x + 2$.

C Die Region unterhalb der Geraden $y = x - 2$.

Frage 4: Ungleichungen

Antworten:

A: Falsch.

B: Richtig.

C: Falsch.

Frage 5, Ungleichungen

Welche Lösungsmenge gehört zur Ungleichung $(x-1)(y-2) \geq 0$?

A Die Region $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, y \geq 2\}$

B Die Region oberhalb der Geraden $y = 2$

C Die Region $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, y \geq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \leq 1, y \leq 2\}$.

Frage 5: Ungleichungen

Antworten:

A: Falsch. Was passiert mit dem Produkt zweier negativen Zahlen ?

B: Falsch.

C: Richtig.

Grundlagen

4. Potenzfunktionen

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Abschnitt
Potenzfunktionen

Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen (6) zu.

U. Stammbach: Analysis I/II
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Potenzfunktionen

Vgl. *Schirotzek/Scholz: Starthilfe Mathematik, Teubner Verlag; p. 33-35*
oder *Mathematiklehrbuch des Gymnasiums*

Wir betrachten hier zuerst für eine gegebene natürliche Zahl n die Funktion

$$f : x \to x^n$$

und zwar auf dem Definitionsbereich $D(f) = [0, \infty)$.

Ausser im Ausnahmefall $n = 0$ ist die Funktion $x \to x^n$ strikt monoton wachsend. Der Graph von $x \to x^1$ ist die rechte Hälfte der ersten Winkelhalbierenden, der Graph von $x \to x^2$ ist der rechte Ast der quadratischen Normparabel, der Graph von $x \to x^3$ ist der rechte Ast der kubischen Normparabel, etc. Der Wertebereich der Funktion $x \to x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ ist das Intervall $[0, \infty)$.

Die Graphen von $x \to x^n$ und $x \to x^m$ für $n < m$ schneiden sich in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Im Intervall $(0, 1)$ verläuft der Graph von $x \to x^m$ *unterhalb*, im Intervall $(1, \infty)$ *oberhalb* des Graphen von $x \to x^n$.

Wie oben bereits festgestellt worden ist, ist die Potenzfunktionen zum Exponenten n, $n = 1, 2, \ldots$ strikt monoton wachsend, sie ist deshalb injektiv, und es existiert die dazu inverse Funktion. Man bezeichnet sie definitionsgemäss mit $x \to x^{\frac{1}{n}}$, und nennt $x^{\frac{1}{n}}$ die *n-te Wurzel* von x. Der Definitionsbereich ist (wiederum) das Intervall $[0, \infty)$.

Da die Graphen einer Funktion f und der dazu inversen Funktion f^{-1} zur ersten Winkelhalbierenden spiegelbildlich sind, lassen sich die Graphen der *Wurzelfunktionen* ohne Schwierigkeiten zeichnen.

Frage *Man skizziere die Graphen von $x \to x^{\frac{1}{2}}$, $x \to x^{\frac{1}{3}}$ und $x \to x^{\frac{1}{5}}$. Wo schneiden sich diese Graphen? Wo schneiden sich die Graphen von $x \to x^3$ und $x \to x^{\frac{1}{3}}$?*

Frage *Es sei $n < m$. In welchem Intervall verläuft der Graph von $x \to x^{\frac{1}{m}}$* oberhalb*, in welchem Intervall* unterhalb *des Graphen von $x \to x^{\frac{1}{n}}$?*

Für einen *rationalen Exponenten* m/n definiert man

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} \ .$$

Frage *Für die rationale Zahl* $10/3$ *gilt* $3 < 10/3 < 4$. *Man überlege sich, was für Ungleichungen zwischen den Zahlen a^3, $a^{\frac{10}{3}}$ und a^4 gelten? (Achtung: Es ist eine*

Fallunterscheidung $a \in (0,1)$ bzw. $a \in (1,\infty)$ notwendig!) Ausgehend von diesem Resultat skizziere man die Graphen von $x \to x^3$, $x \to x^4$, $x \to x^{\frac{10}{3}}$, $x \to x^{\frac{1}{3}}$, $x \to x^{\frac{1}{4}}$ und $x \to x^{\frac{3}{10}}$.

Frage *Wie lassen sich diese Überlegungen auf beliebige rationale Exponenten übertragen? Man skizziere die Graphen der Funktionen $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to x^{\frac{1}{2}}$, $x \to x^{\frac{1}{3}}$, $x \to x^{\frac{2}{3}}$, $x \to x^{\frac{3}{2}}$, $x \to x^{\frac{4}{3}}$ und $x \to x^{\frac{3}{4}}$.*

Bemerkung: Es lassen sich auch Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten α, nicht nur rationalen, definieren. Man stellt zu diesem Zweck die reelle Zahl α als Limes einer Folge von rationalen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dar, und setzt

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \ .$$

Die oben gewonnenen Erkenntnisse über rationale Exponenten lassen sich ohne weiteres übertragen. Wir verzichten hier darauf, die Details darzustellen.

Wir gehen zurück zu ganzzahligen Exponenten und betrachten noch einmal die Funktion

$$x \to x^n$$

aber dieses Mal mit dem Definitionsbereich $(-\infty,\infty)$. Man stellt fest:

Falls n gerade ist, ist der Graph symmetrisch zur y-Achse: die Funktion ist gerade. Falls n ungerade ist, ist der Graph symmetrisch zum Ursprung: die Funktion ist ungerade.

Schliesslich bemerken wir, dass die zu einem *ungeraden* Exponenten gehörigen Potenzfunktion auf dem ganzen Definitionsbereich $(-\infty,\infty)$ strikt monoton wachsend und damit injektiv ist. In diesem Fall lässt sich die inverse Funktion ebenfalls auf dem Intervall $(-\infty,\infty)$ definieren. (Weshalb lässt sich das nur für *ungerade* Exponenten durchführen?) Man skizziere die Graphen der beiden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $x \to x^3$ und $x \to x^{\frac{1}{3}}$.

Frage 1, Potenzfunktionen

Welche Aussage ist richtig ?

A Im Intervall $[0, \infty)$ ist die Funktion $x \mapsto x^\pi$ monoton wachsend.

B Im Intervall $[0, 1)$ verläuft der Graph von $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ oberhalb des Graphes von $x \mapsto x^{\frac{5}{4}}$.

C Die Funktion $x \mapsto x^5 - x^3$ ist gerade.

D Die Funktion $x \mapsto x^4 - x^3$ ist ungerade.

E Die Funktion $x \mapsto x^2 + x^3$ ist monoton wachsend.

Frage 1: Potenzfunktionen

Antworten:

A: Ja. In der Tat, der Exponent ist positiv.

B: Nein, denn $4/3 > 5/4$.

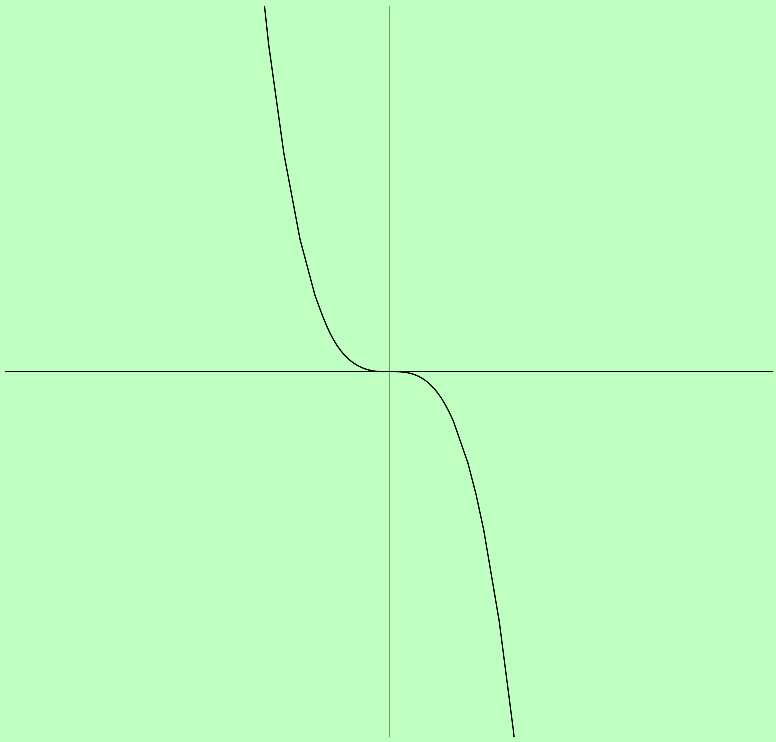
C: Nein. Was ist das Bild von $-x$?

D: Nein. Was ist das Bild von $-x$?

E: Nein. Was passiert im Intervall $[-1, 0]$?

Frage 2, Potenzfunktionen

Welche Funktion passt zur folgenden Kurve ?



A $x \longmapsto x^{-3}$

B $x \longmapsto -x^3$

C $x \longmapsto -x^4$

Frage 2: Potenzfunktionen

Antworten:

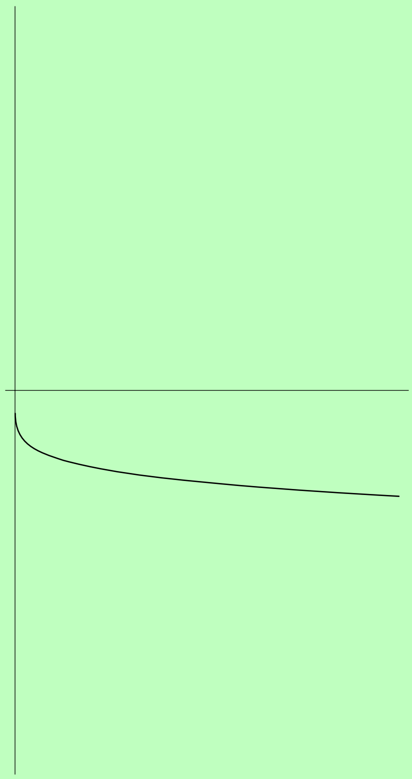
A: Nein. Diese Funktion nimmt für $x > 0$ nur positive Werte an.

B: Richtig.

C: Nein. Die gegebene Funktion ist negativ (ausser für $x = 0$).

Frage 3, Potenzfunktionen

Welche Funktion passt zur folgenden Kurve ?



A $x \longmapsto x^{-\frac{1}{5}}$

B $x \longmapsto x^{-5}$

C $x \longmapsto -x^{\frac{1}{5}}$

Frage 3: Potenzfunktionen

Antworten:

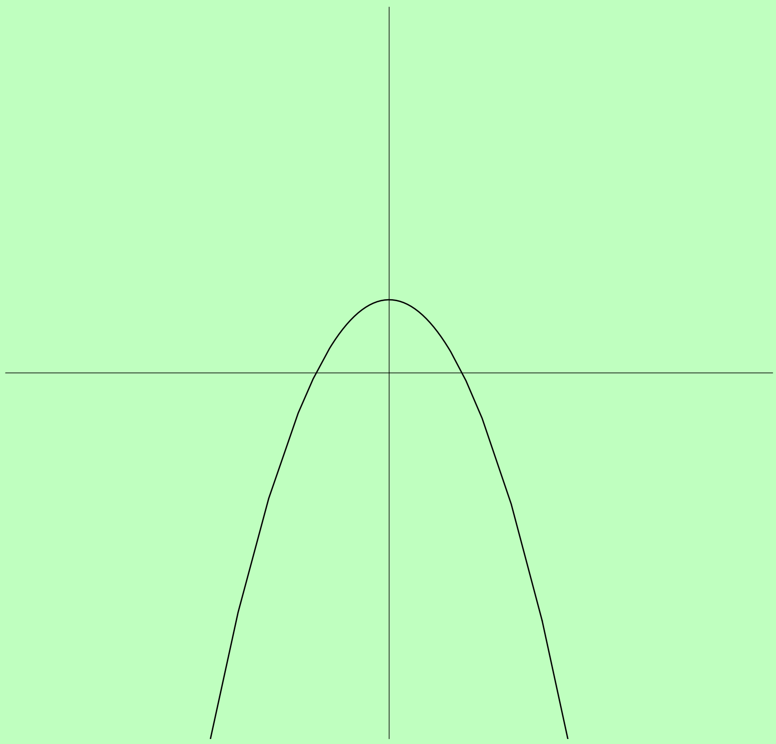
A: Nein. Diese Funktion nimmt für $x > 0$ nur positive Werte an.

B: Nein. Diese Funktion nimmt für $x > 0$ nur positive Werte an.

C: Richtig.

Frage 4, Potenzfunktionen

Welche Funktion passt zur folgenden Kurve ?



A $x \longmapsto x^{-2} + 1$

B $x \longmapsto -x^2 + 1$

C $x \longmapsto x^2 - 1$

Frage 4: Potenzfunktionen

Antworten:

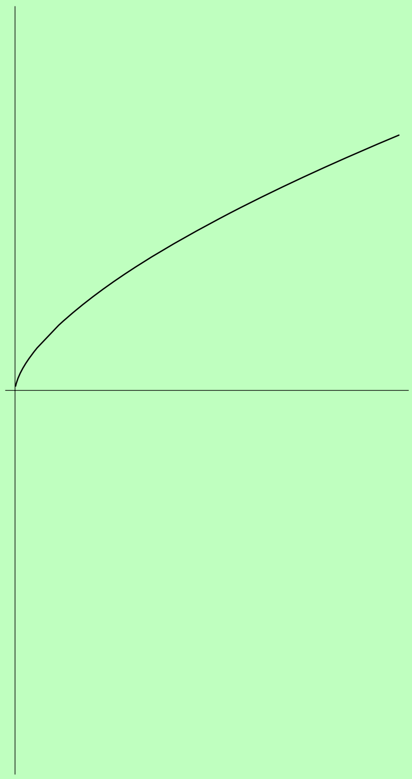
A: Nein. Der Graph dieser Funktion ist keine Parabel.

B: Richtig. Es handelt sich um eine gespiegelte und nach oben verschobene Normparabel.

C: Nein. Für $x = 0$ nimmt diese Funktion einen negativen Wert an.

Frage 5, Potenzfunktionen

Welche Funktion passt zur folgenden Kurve ?



A $x \longmapsto x^{\frac{4}{3}}$

B $x \longmapsto x^{\frac{\pi}{3}}$

C $x \longmapsto x^{\frac{\pi}{5}}$

Frage 5: Potenzfunktionen

Antworten:

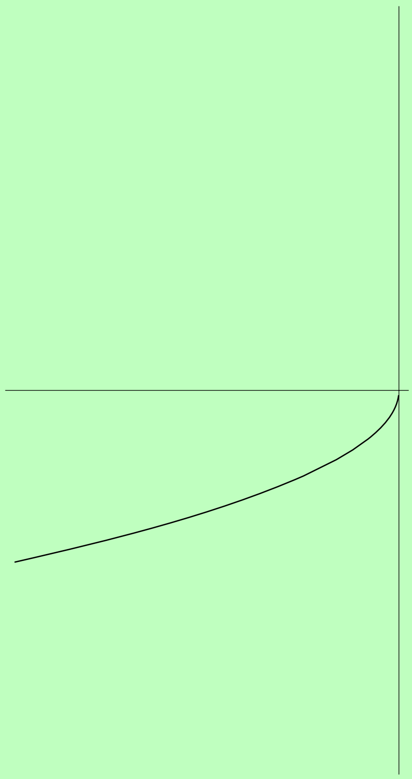
A: Nein. Der Exponent dieser Funktion ist grösser als 1.

B: Nein. Der Exponent dieser Funktion ist grösser als 1.

C: Richtig. Der Exponent dieser Funktion ist kleiner als 1.

Frage 6, Potenzfunktionen

Welche Funktion passt zur folgenden Kurve ?



A $x \longmapsto x^{-\frac{1}{2}}$

B $x \longmapsto -(-x)^{\frac{1}{2}}$

C $x \longmapsto -x^{\frac{1}{2}}$

Frage 6: Potenzfunktionen

Antworten:

A: Nein. Für $x < 0$ ist diese Funktion gar nicht definiert.

B: Richtig.

C: Nein. Für $x < 0$ ist diese Funktion gar nicht definiert.

Grundlagen

5. Trigonometrische Funktionen

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Abschnitt
Trigonometrische Funktionen

Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen (8) zu.

U. Stammbach: Analysis I/II

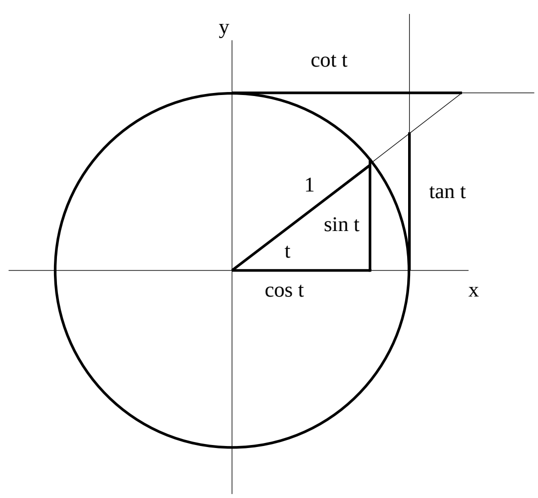
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Trigonometrische Funktionen

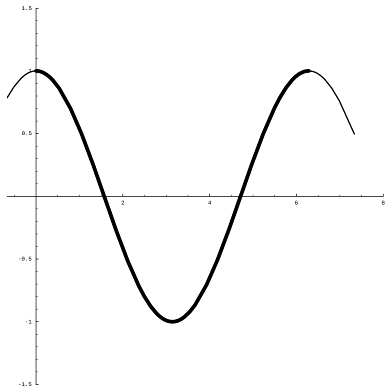
Vgl. *Burg, Haf, Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Analysis, Teubner Verlag; p. 203-212* oder *Schirotzek/Scholz: Starthilfe Mathematik, Teubner Verlag; p. 39-45*

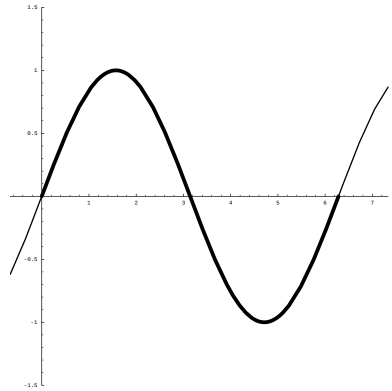
Ursprünglich als Verhältniszahlen am rechtwinkligen Dreieck eingeführt, werden Sinus und Cosinus heutzutage als Funktionen angesehen, die auf der ganzen reellen Zahlgeraden definiert sind.

Wir betrachten den Einheitskreis in der (x, y)-Ebene. Ist P ein Punkt der Peripherie dieses Kreises, so beschreiben wir die Lage von P durch die von $(1, 0)$ aus gemessene (Kreis-)Bogenlänge t. Dabei misst man t im Gegenuherzeigersinn positiv und im Uhrzeigersinn negativ. Die Grössen $\cos t$ und $\sin t$ sind dann wie folgt definiert: Es sei P der Punkt auf dem Einheitskreis, der zur Bogenlänge t gehört; dann ist $\cos t$ die x-Koordinate von P und $\sin t$ die y-Koordinate von P. Damit sind die Funktionen cos und sin für alle reellen t definiert. Offenbar ist der Wertebereich beider Funktionen $[-1, 1]$.



Da der ganze Umfang des Einheitskreises gerade 2π beträgt, gehört zu t und zu $t + 2\pi$ der gleiche Punkt P des Einheitskreises. Damit folgt $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ und $\sin(t + 2\pi) = \sin t$; die beiden Funktionen cos und sin sind *periodisch* mit Periode 2π. Es genügt deshalb eine einzige Periode zu skizzieren: (Welches ist der Cosinus? Welches ist der Sinus?)





Fragen:

Welche Punkte des Einheitskreises gehören zu $t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, -\pi/2, 7\pi$*?*

Was ist $\sin 0, \sin(\pi/2), \sin(-\pi/2), \sin\pi$*?*

Was ist $\cos 0, \cos(\pi/2), \cos(-\pi/2), \cos\pi)$*?*

Man zeige, dass aus der Definition für sin *und* cos *die Gleichungen*

$$\sin(-t) = -\sin t\ , \cos(-t) = \cos t$$

folgen.

Man zeige, dass aus der Definition für sin *und* cos *die Gleichungen*

$$\sin(\pi/2 - t) = \cos t\ , \cos(\pi/2 - t) = \sin t$$

folgen.

Man zeige, dass aus der Definition für sin *und* cos *die Gleichungen*

$$\sin(t + \pi) = -\sin t\ ,\ \cos(t + \pi) = -\cos t$$

folgen.

Liegt t zwischen 0 und $\pi/2$, so ist sowohl die x- wie auch die y-Koordinate des zu t gehörigen Punktes P positiv. Man zeige, dass in diesem Fall die oben gegebene Definition von $\sin t$ und $\cos t$ mit der ursprünglichen Definition am rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt, wenn man t als Mass (*Bogenmass*) für den (Polar-)Winkel auffasst.

Neben den beiden trigonometrischen Funktionen sin und cos sind zwei weitere gebräuchlich, die sich daraus herleiten lassen, nämlich der Tangens (tan) und der

Cotangens (cot). Diese sind definiert durch

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \ , \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \ .$$

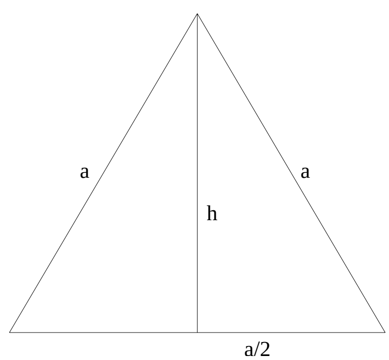
Sowohl $\tan t$ wie auch $\cot t$ lassen sich wie $\sin t$ und $\cos t$ als Koordinaten von Punkten deuten. Für $\tan t$ betrachte man die Tangente (daher der Name!) an den Einheitskreis im Punkte $(1,0)$ und betrachte den Schnittpunkt Q mit dem über P hinaus verlängerten Fahrstrahl. Dann ist $\tan t$ die y-Koordinate von Q. Für $\cot t$ betrachte man die Tangente an den Einheitskreis im Punkte $(0,1)$ und betrachte den Schnittpunkt R mit dem über P hinaus verlängerten Fahrstrahl. Dann ist $\cot t$ die x-Koordinate von R.

Bemerkung: Praktisch nur in der englischsprachigen Fachliteratur treten die zwei Winkelfunktionen Secans (sec) und Cosecans (cosec) auf.

Für gewisse ausgezeichnete Winkel t lassen sich die Werte der Winkelfunktionen sofort angeben. Dazu gehören die Winkel $0, \pi/6$ $(= 30°), \pi/4$ $(= 45°), \pi/3$ $(= 60°), \pi/2$ $(= 90°)$. Man erhält diese Werte wie folgt:

Im gleichseitigen Dreieck mit Seite a erhält man für die Höhe h

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \ .$$

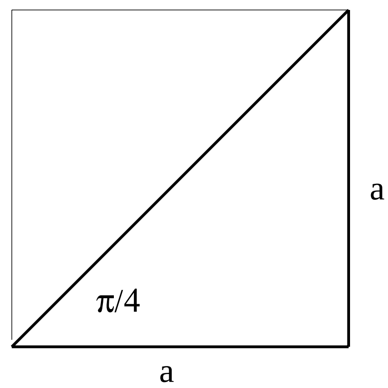


Für die Winkel $\pi/6$ und $\pi/3$ liest man dann am entstehenden rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten $a/2$, h und a ab:

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \ , \\ \cos\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \\ \sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \\ \cos\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Im Quadrat mit Seitenlänge a erhält man für die Diagonale d

$$d = \sqrt{2}a \ .$$



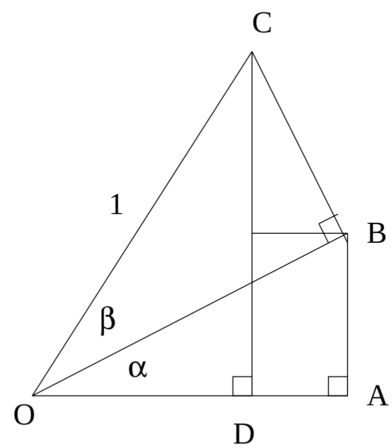
Man liest dann am "halben" Quadrat ab:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ,$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Fragen:
Man stelle in einer Tabelle die Werte der vier Winkelfunktionen $\sin, \cos, \tan, \cot$ *für die Winkel* $0, \pi/6\ (= 30°), \pi/4\ (= 45°), \pi/3\ (= 60°), \pi/2\ (= 90°)$ *zusammen.*

Man skizziere die Graphen der vier Winkelfunktionen $\sin, \cos, \tan, \cot$ *im Intervall* $[0, 2\pi]$*, das einer Periode von* $\sin$ *und* $\cos$ *entspricht. Für welche Werte von* t *sind* $\tan t$ *(*$\cot t$*) nicht definiert? Wie erklärt sich, dass die Funktionen* $\tan$ *und* $\cot$ *periodisch sind mit Periode* π *(und nicht nur* 2π*)?*

Für die Funktionen sin und cos gelten die sogenannten Summenformeln. Diese lassen sich an der folgenden Figur ablesen:



Es gilt nämlich $OD = \cos(\alpha+\beta)$, $DC = \sin(\alpha+\beta)$. Ferner gilt $OB = \cos\beta$ und $CB = \sin\beta$, woraus sich sich dann z.B. $AB = \sin\alpha\cdot\cos\beta$ ergibt, so dass folgt $DC = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$. Ähnlich lassen sich die übrigen Strecken berechnen. Die Details kann der Leser selbst nachvollziehen und so die folgenden Formeln bestätigen.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\ \cdot\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\ .$$

Frage *Wie lauten die entsprechenden Formeln für den Tangens und den Cotangens?* (Beachte, dass sich diese direkt aus den Additionsformeln für den Sinus und den Cosinus herleiten lassen!)

Frage 1, Trigonometrie

Welche Aussage ist richtig ?

A $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

B $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$

C Die Funktion $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ist konstant

D Die Funktion $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist konstant

E Die Funktion $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ ist gerade

Frage 1: Trigonometrie

Antworten:

A: Falsch. Man rechne die Werte explizit aus !

B: Nein. Die Cosinusfunktion ist nicht additiv (Additionsformeln !).

C: Richtig.

D: Falsch. Sie ist gleich $2\sin(x)$.

E: Falsch. Sie ist die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

Frage 2, Trigonometrie

Sei $\tan(\alpha) = 2$; dann :

A $\text{cotan}(\alpha) = -2$

B $\text{cotan}(\alpha) = \frac{1}{2}$

C $\text{cotan}(\alpha) = 2$

Frage 2: Trigonometrie

Antworten:

A: Falsch. Welche Beziehung gibt es zwischen Tangens und Cotangens?

B: Richtig. Denn $\tan(x) = 1/\mathrm{cotan}\,(x)$.

C: Falsch. Welche Beziehung gibt es zwischen Tangens und Cotangens?

Frage 3, Trigonometrie

Sei $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; dann :

A $\cos(\alpha) = -\sqrt{2}$

B $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oder $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Frage 3: Trigonometrie

Antworten:

A: Falsch. Welche Beziehung gibt es zwischen Sinus und Cosinus?

B: Falsch. Welche Beziehung gibt es zwischen Sinus und Cosinus?

C: Richtig. Für welche Winkeln nehmen Sinus und Cosinus diese Werte an?

Frage 4, Trigonometrie

Sei $\cos(\alpha) = 0$; dann :

A $\alpha = 0$

B $\alpha = \frac{\pi}{2}$

C $\alpha = \left(\frac{1+2k}{2}\right)\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

Frage 4: Trigonometrie

Antworten:

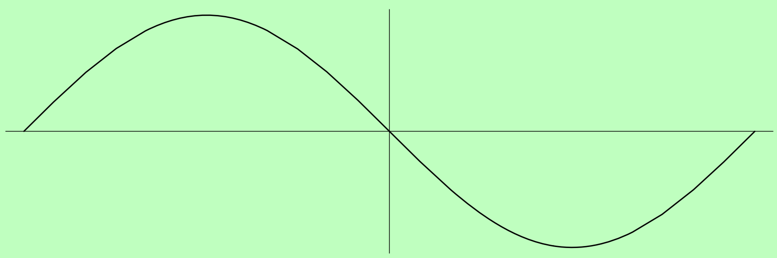
A: Falsch. Denn $\cos(0) = 1$.

B: Falsch. Die Cosinusfunktion verschwindet nicht nur an dieser Stelle.

C: Richtig.

Frage 5, Trigonometrie

Welche Funktion passt zum folgenden Graphen ?



A $x \longmapsto \sin(x)$

B $x \longmapsto \sin(-x)$

C $x \longmapsto -\cos(x)$

Frage 5: Trigonometrie

Antworten:

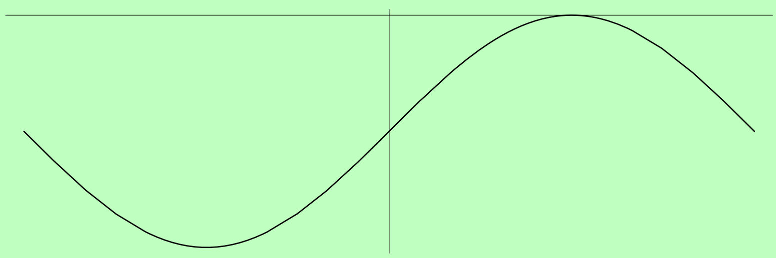
A: Falsch. Die Sinusfunktion wächst in der Nähe von Null...

B: Richtig. Es handelt sich um eine gespiegelte Sinusfunktion.

C: Nein. Denn $-\cos(0) = -1$.

Frage 6, Trigonometrie

Welche Funktion passt zum folgenden Graphen ?



A $x \longmapsto \sin(x) - 1$

B $x \longmapsto \sin(x - 1)$

C $x \longmapsto \cos(x) - 1$

Frage 6: Trigonometrie

Antworten:

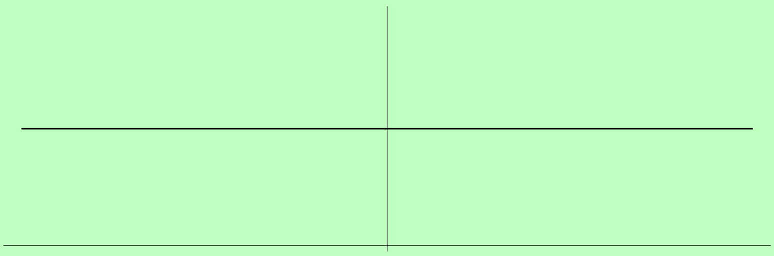
A: Richtig. Es handelt sich um eine (längs der y-Achse) verschobene Sinusfunktion.

B: Nein. Die Sinusfunktion ist hier nicht längs der x-Achse verschoben, sondern...

C: Nein. Denn $\cos(0) - 1 = 0$.

Frage 7, Trigonometrie

Welche Funktion passt zum folgenden Graphen ?



A $x \longmapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$

B $x \longmapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

C $x \longmapsto \sin(x) + \cos(x)$

Frage 7: Trigonometrie

Antworten:

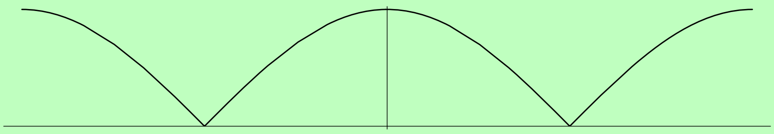
A: Richtig. Das folgt aus der berühmtesten Gleichung der Trigonometrie.

B: Nein. Diese Funktion ist zwar konstant, aber identisch Null.

C: Falsch. Diese Funktion ist nicht konstant.

Frage 8, Trigonometrie

Welche Funktion passt zum folgenden Graphen ?



A $x \longmapsto |\cos(x)|$

B $x \longmapsto \cos|x|$

C $x \longmapsto (\cos(x))^2$

Frage 8: Trigonometrie

Antworten:

A: Richtig. Die negative Teile werden von der Betragsfunktion nach oben gespiegelt.

B: Nein. Weil $\cos(-x) = \cos(x) = \cos|x|$.

C: Nein. Der Graph dieser Funktion weist keine “Ecken” auf.

Grundlagen

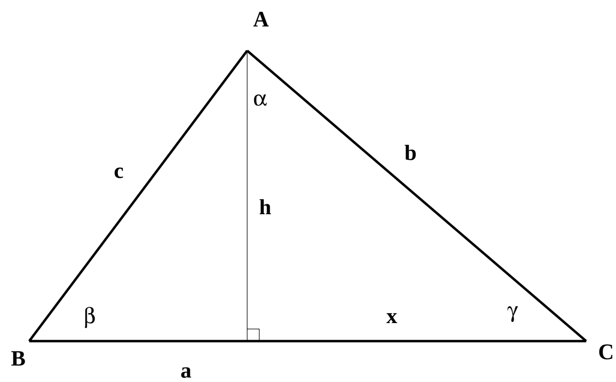
6. Sinus- und Cosinus-Satz

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum
Sinus- und Cosinus-Satz

U. Stammbach: Analysis I/II

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Die trigonometrischen Funktionen wurden ursprünglich am rechtwinkligen Dreieck definiert. So ist es keine Überraschung, dass sie für Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken dienlich sind. Die trigonometrischen Funktionen ermöglichen darüberhinaus aber auch die rechnerische Behandlung *beliebiger Dreiecke*. Für diesen Zweck sind die folgenden zwei leicht zu beweisenden Sätze nützliche Werkzeuge, der *Sinus-Satz* und der *Cosinus-Satz*.



Der Sinus-Satz *In einem beliebigen Dreieck gilt*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \ .$$

Beweis In den beiden rechtwinkligen Teildreiecken, die man erhält, wenn man die Höhe h_a einzeichnet, gilt

$$h = c\sin\beta = b\sin\gamma \ .$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \ .$$

Der Rest ergibt sich aus Symmetriegründen.

Der Cosinus-Satz *In einem beliebigen Dreieck gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \ .$$

Beweis Im rechten der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, die man erhält, wenn man die Höhe h_a einzeichnet, gilt $x = b\cos\gamma$. Man erhält dann mit dem Satz von Pythagoras im linken Dreieck

$$c^2 = h^2 + (a-x)^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \ .$$

Daraus ergibt sich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \ .$$

Grundlagen

7. Ellipse und Hyperbel

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Abschnitt
Ellipse und Hyperbel

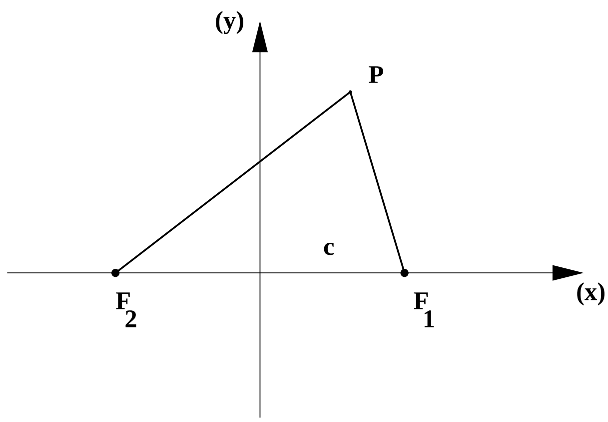
Nach dem Studium des zusammenfassenden Textes wende man sich den *multiple-choice*-Fragen (8) zu.

U. Stammbach: Analysis I/II
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Ellipse und Hyperbel

Wir konzentrieren uns hier auf die Ellipse *und verwenden für die Bemerkungen zur* Hyperbel *eine kleinere Schrift.*

In der Ebene E seien zwei Punkte F_1 und F_2 gegeben. Ihr Abstand sei $2c$. Ferner sei eine Zahl $a > c$ gegeben. Man suche alle Punkte P in der Ebene, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Abstände $|PF_1|$ und $|PF_2|$ gleich $2a$ ist.



In der Figur liest man für die Koordinaten (x, y) des Punktes P folgendes ab:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Quadrieren liefert

$$(x^2+2xc+c^2+y^2)+2\sqrt{(x^2+2cx+c^2+y^2)(x^2-2cx+c^2+y^2)}+(x^2-2xc+c^2+y^2)=4a^2\ .$$

Die Terme $2xc$ und $-2xc$ heben sich auf. Kürzt man mit 2, isoliert die Wurzel auf der linken Seite und quadriert noch einmal, so ergibt sich

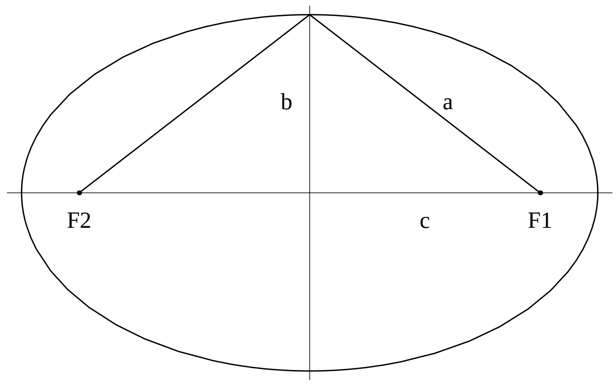
$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2\ .$$

Der erste und der letzte Term dieser Gleichung heben sich auf; den Rest kann man mit 4 kürzen. Man erhält

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\ .$$

Schliesslich ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\ .$$



Diese Gleichung beschreibt eine **Ellipse** mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und den Halbachsen a und b, wo b gegeben ist durch $b^2 = a^2 - c^2$.

In der Ebene E seien zwei Punkte F_1 und F_2 gegeben. Ihr Abstand sei $2c$. Ferner sei eine Zahl $a < c$ gebeben. Man suche alle Punkte P in der Ebene, welche die Eigenschaft haben, dass die Differenz der Abstände $|PF_1|$ und $|PF_2|$ gleich $2a$ ist.

Für die Koordinaten (x, y) des Punktes P gilt ähnlich wie oben:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \ .$$

Die analoge Rechnung wie oben für die Ellipse liefert schliesslich die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \ .$$

Man beachte, dass unter den getroffenen Voraussetzungen $c^2 - a^2$ positiv ist. Setzen wir $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$ so haben wir die Gleichung einer **Hyperbel** vor uns mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und den "Halbachsen" a und b.

Ellipse und Hyperbel lassen sich auch durch Parameterdarstellungen beschreiben:

Die Kurve mit Parameter t gegeben durch

$$x(t) = a \cos t$$

$$y(t) = b \sin t$$

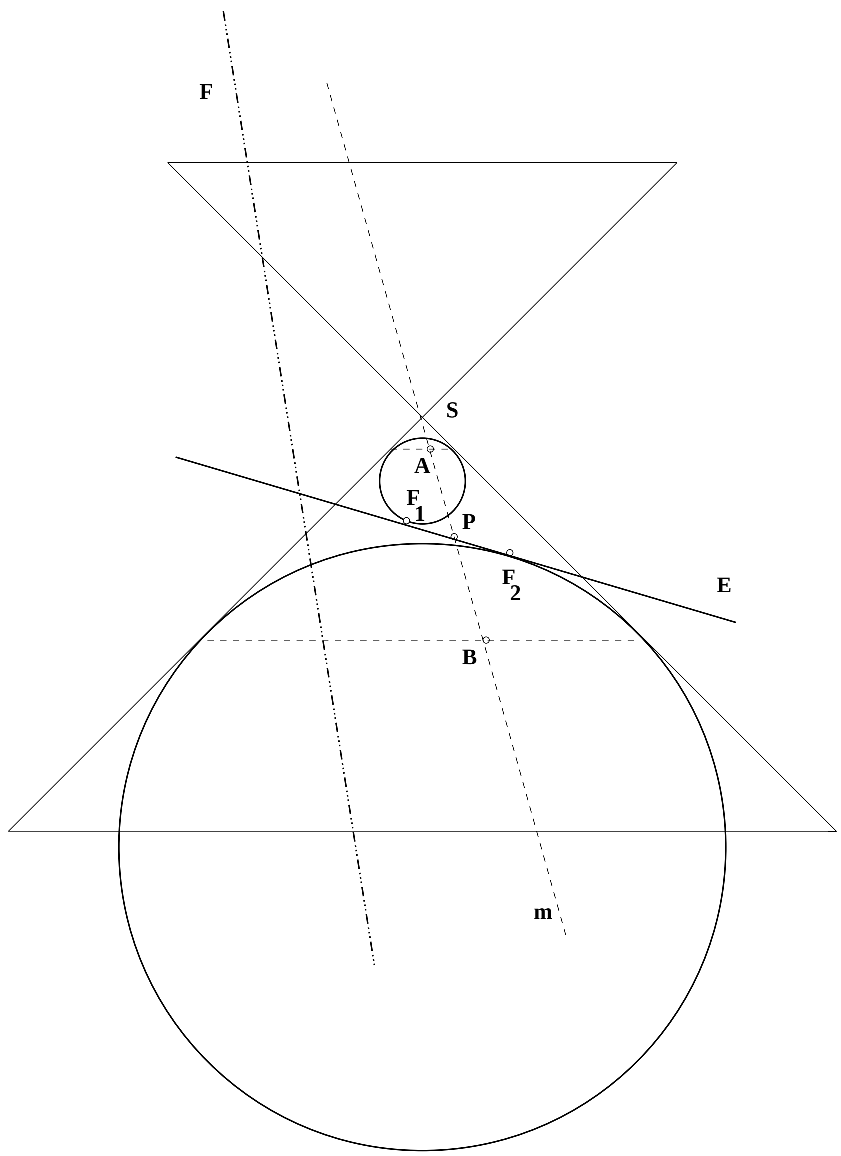
beschreibt eine **Ellipse** mit Halbachsen a und b. Die Brennpunkte liegen bei $F_1 = (-c, 0)$ und $F_2 = (c, 0)$, wo c durch $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ gegeben ist. In der Tat gilt, unabhängig vom Parameterwert, $x(t)/a^2 + y(t)^2/b^2 = 1$.

Die Kurve mit Parameter t gegeben durch

$$x(t) = a \cosh t$$
$$y(t) = b \sinh t$$

beschreibt eine **Hyperbel** mit "Halbachsen" a und b. Die Brennpunkte liegen bei $F_1 = (-c, 0)$ und $F_2 = (c, 0)$, wo c durch $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gegeben ist. In der Tat gilt, unabhängig vom Parameterwert, $x(t)/a^2 - y(t)^2/b^2 = 1$.

Ellipse und Hyperbel lassen sich geometrisch als Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene erhalten. Der Schnitt des Kegels mit der Ebene E (siehe Figur) erzeugt eine Ellipse, der Schnitt des Kegels mit der Ebene F (siehe Figur) erzeugt eine Hyperbel.



Die *Brennpunkte* der **Ellipse** erhält man, indem man dem Kegel Kugeln einbeschreibt, welche die Ebene E berühren (Dandelin'sche Kugeln): Die Berührpunkte mit der Ebene sind gerade die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 der Ellipse.

Der *Beweis*, dass die Schnittkurve der Ebene E mit dem Kegel eine Ellipse ist, lässt sich dann wie folgt führen. Man betrachte auf dem Kegel eine Mantellinie m. Diese schneidet die Schnittkurve mit der Ebene E im Punkte P. Von P legt man je zwei Tangenten an die beiden Kugeln: PF_1 und PA an die obere Kugel, PF_2 und PB an die untere Kugel. Die Punkte A und B liegen dabei auf den Berührkreisen der Kugeln mit dem Kegel. Natürlich gilt dann $|PF_1| = |PA|$ und $|PF_2| = |PB|$ und man erhält

$$|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PB| = |AB| \ .$$

Die Länge $|AB|$ ist aber für jede Mantellinie auf dem Kegel und deshalb auch für jeden Punkt der Schnittkurve gleich. Daraus folgt, dass die Schnittkurve eine Ellipse ist mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

Der Beweis dafür, das die Schnittkurve mit der Ebene F eine Hyperbel ist, wird analog geführt.

Frage 1, Ellipse und Hyperbel

Welche Aussage ist **falsch** ?

A Die Ellipse mit Gleichung $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,4)$, $(0,-4)$.

B Die Brennpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ sind $F_1=(0,+\sqrt{7})$ und $F_2=(0,-\sqrt{7})$.

C Die Gleichung $\frac{x^2}{2}+\alpha\frac{y^2}{3}=1$ beschreibt eine Ellipse, falls $\alpha>0$, und eine Hyperbel, falls $\alpha<0$.

D Die Ellipse mit Gleichung $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$.

E Die Hyperbel $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(0,3)$ und $(0,-3)$.

Frage 1: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

A: Ja. Diese Aussage ist falsch. Man gebe die Halbachsen dieser Ellipse an!

B: Nein. Diese Aussage ist richtig. Wie findet man die Brennpunkte einer Ellipse?

C: Nein. Das ist richtig. Das folgt unmittelbar aus der allgemeine Form für die Gleichung einer Ellipse bzw. einer Hyperbel.

D: Nein. Diese Aussage ist richtig. Man gebe die Halbachsen dieser Ellipse an !

E: Nein. Diese Aussage ist richtig. Wie findet man die Schnittpunkte?

Frage 2, Ellipse und Hyperbel

Die Gleichung $x^2 - y^2 = 5$ beschreibt...

A einen Kreis.

B eine Hyperbel.

C eine Ellipse.

Frage 2: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

A: Nein. Wie sieht die Gleichung eines Kreises aus?

B: Richtig.

C: Nein. Wie sieht die Gleichung einer Ellipse aus?

Frage 3, Ellipse und Hyperbel

Die Gleichung $x^2 - 4y^2 = 0$ beschreibt...

A eine Hyperbel.

B eine Ellipse.

C ein Paar von Geraden.

Frage 3: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

A: Nein. Was sieht man rechts in der Gleichung?

B: Nein. Was sieht man rechts in der Gleichung?

C: Richtig. Die Geraden $x + 2y = 0$ und $x - 2y = 0$.

Frage 4, Ellipse und Hyperbel

Die Gleichungen $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\cos(3t) \\ y = 3\sin(3t) \end{array} \right.$ beschreiben...

A einen Kreis.

B eine Spirale.

C eine Ellipse.

Frage 4: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

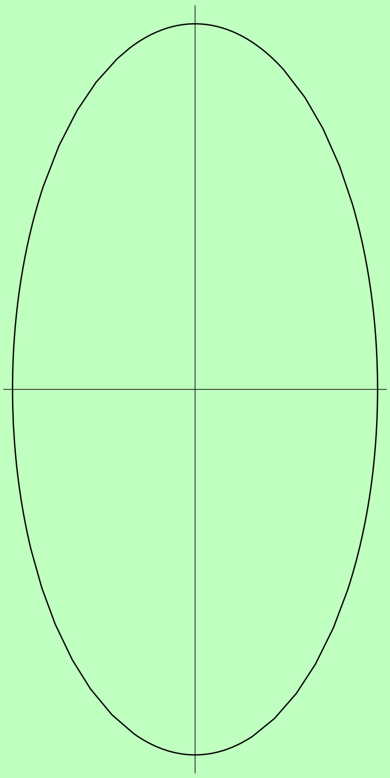
A: Falsch.

B: Falsch.

C: Richtig. Die Ellipse wird einfach “schneller als üblich” durchlaufen.

Frage 5, Ellipse und Hyperbel

Welche Gleichung passt zur folgenden Kurve ?



A $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

B $x^2 + 3y^2 = 1$

C $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

Frage 5: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

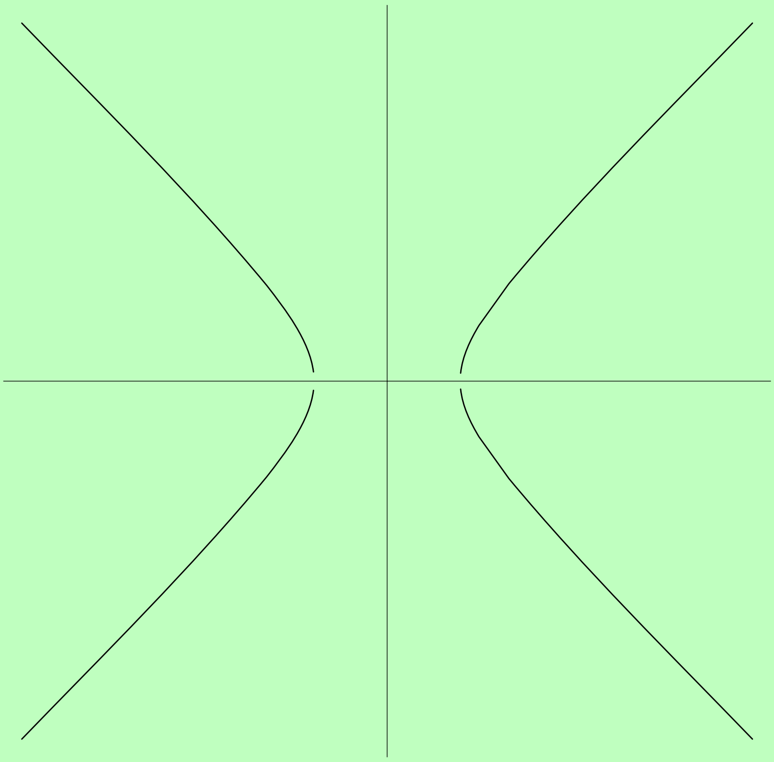
A: Richtig. Das Verhältnis zwischen den Halbachsen ist 1:3.

B: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

C: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

Frage 6, Ellipse und Hyperbel

Welche Gleichung passt zur folgenden Kurve ?



A $\frac{x^2}{10} - y^2 = 1$

B $x^2 - 10y^2 = 1$

C $x^2 - y^2 = 1$

Frage 6: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

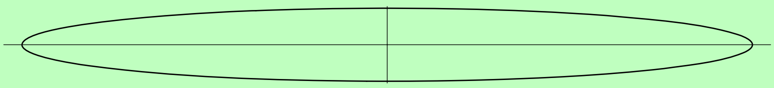
A: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

B: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

C: Richtig. Das Verhältnis zwischen den Halbachsen ist 1:1.

Frage 7, Ellipse und Hyperbel

Welche Gleichung passt zur folgenden Kurve ?



A $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$

B $10x^2 + 10y^2 = 1$

C $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$

Frage 7: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

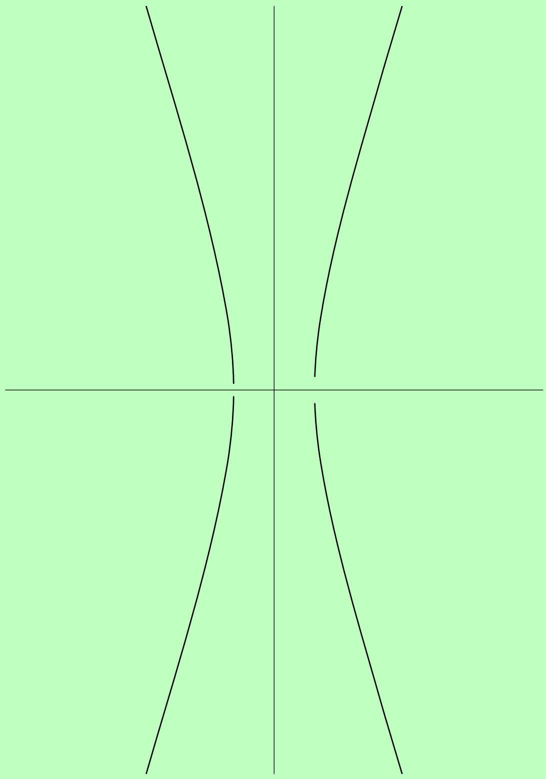
A: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

B: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

C: Richtig. Das Verhältnis zwischen den Halbachsen ist 10:1.

Frage 8, Ellipse und Hyperbel

Welche Gleichung passt zur folgenden Kurve ?



A $10x^2 - y^2 = 1$

B $\frac{x^2}{10} - y^2 = 1$

C $x^2 - \frac{y^2}{10} = 1$

Frage 8: Ellipse und Hyperbel

Antworten:

A: Richtig. Das Verhältnis zwischen den Halbachsen ist 1:10.

B: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

C: Falsch. Welchen Wert hat das Verhältnis zwischen den Halbachsen?

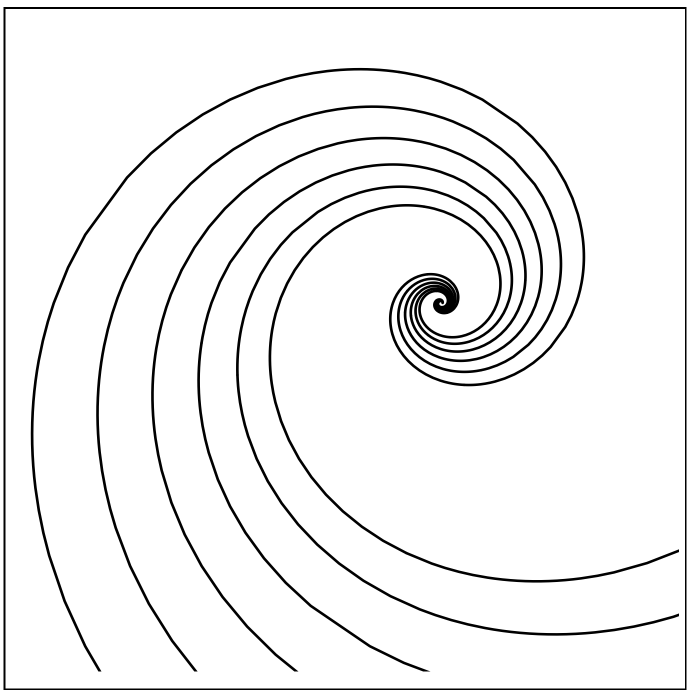
Grundlagen

8. Vektoralgebra

Kurzer Text zur Vektoralgebra und eine Reihe von zugehörigen Übungsaufgaben.

Zusammenfassung, Kommentare und Testfragen zum Text über Vektoralgebra

Vektoralgebra

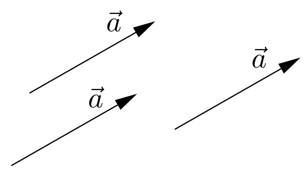


Wie nutzlos ist das Lernen, wenn es nicht mit Verständnis gepaart ist.

Menandros (342 - 291 v. Chr.)

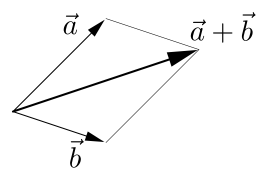
1 Addition von Vektoren und Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl

Ein **Vektor** ist eine gerichtete Strecke im Raum, wobei zwischen gerichteten Strecken, welche durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, nicht unterschieden wird. – Ein Vektor $\vec{a}$ ist also durch Länge (Betrag) $|\vec{a}|$ und Richtung bestimmt.

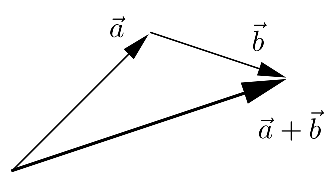


Wir definieren in der Folge eine *Addition* von Vektoren und eine *Multiplikation* von Vektoren mit einer reellen Zahl.

Die **Summe** $\vec{a}+\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die gerichtete Diagonale des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes.



Eine Variante dieser Definition ist wie folgt: Um den Vektor $\vec{a}+\vec{b}$ zu erhalten, setze man den Anfangspunkt von $\vec{b}$ an den Endpunkt von $\vec{a}$. Der Vektor $\vec{a}+\vec{b}$ ist dann durch die gerichtete Strecke gegeben, die vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ zeigt.



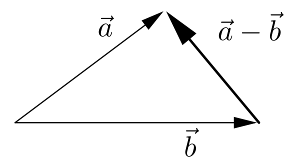
Die Addition genügt dem Kommutativgesetz

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

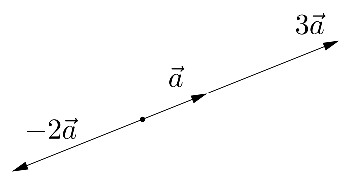
und dem Assoziativgesetz

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \ .$$

Es ist angezeigt, neben den 'normalen' Vektoren auch den *Nullvektor* $\vec{0}$ zu betrachten. Der Betrag des Nullvektors ist 0, eine Richtung kommt ihm nicht zu. Zur Addition von Vektoren gibt es auch eine umgekehrte Operation, die Subtraktion. Der Vektor $\vec{a}-\vec{b}$ ist der Vektor, welcher zu $\vec{b}$ addiert, $\vec{a}$ ergibt. Bringt man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im gleichen Punkt an, so ist die Differenz $\vec{a}-\vec{b}$ durch die gerichtete Strecke gegeben, die vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ führt.



Das **Produkt** $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ einer reellen Zahl λ mit einem Vektor $\vec{a}$ ist der Vektor $\vec{b}$, der den $|\lambda|$-fachen Betrag aufweist und dessen Richtung wie folgt bestimmt ist: für $\lambda \geq 0$ hat $\vec{b}$ die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und für $\lambda \leq 0$ hat $\vec{b}$ die zu $\vec{a}$ entgegengesetzte Richtung.

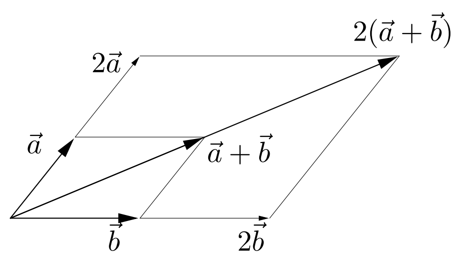


Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl ist mit den Operationen innerhalb der reellen Zahlen (Addition, Multiplikation) verträglich. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \ , \\ (\lambda\mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) \ . \end{aligned}$$

Ferner ist die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl auch mit der Addition von Vektoren verträglich:

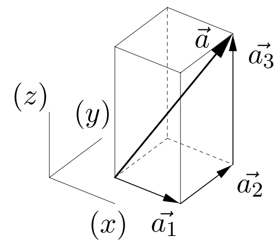
$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \ .$$



Führt man im Raum ein kartesisches Koordinatensysteme ein, so lassen sich Vektoren durch drei Komponenten beschreiben. Ist der Vektor $\vec{a}$ durch die Strecke mit Anfangspunkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ und Endpunkt $Q = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben, so wird $\vec{a} = \vec{PQ}$ durch das Tripel

$$(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

beschrieben. Man beachte, dass gerichtete Strecken, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen und die deshalb auch den gleichen Vektor beschreiben, zu den gleichen Komponenten führen.

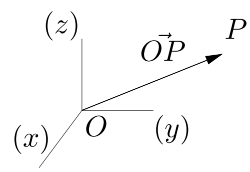


Wie man sich leicht überlegt, stellen sich in Komponentenschreibweise für die reelle Zahl λ und die Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl in der folgenden Form dar

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \ , \\ \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \ . \end{aligned}$$

In dieser algebraischen Form sind die oben genannten Rechenregeln sehr einfach zu verifizieren.

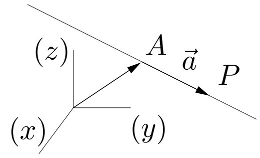
Beispiel Punkte im dreidimensionalen Raum, in dem ein kartesisches Koordinatensystem ausgezeichnet ist, werden durch ihre drei Koordinaten beschrieben. Es ist oft vorteilhaft, diese drei Koordinaten als Komponenten des *Ortsvektors* $\vec{OP}$ von P zu betrachten. Spricht man von einem Ortsvektor, so meint man implizit, dass der Vektor im Ursprung O des Koordinatensystems angebracht ist.



Ein **Beispiel**, wo die Vorteile dieser Auffassung klar werden, ist die Parameterdarstellung einer Gerade im Raum. Es sei ein Punkt A im dreidimensionalen Raum gegeben und eine Richtung, die durch den Vektor $\vec{a}$ festgelegt wird. Gesucht ist eine Beschreibung der (Punkte der) Geraden g, die durch A geht und die Richtung $\vec{a}$ hat. Es ist mit der neuen Auffassung sehr einfach, den Ortsvektor eines Punktes P der Geraden zu beschreiben: Der Ortsvektor $\vec{OP}$ ist eine Summe des Vektors $\vec{OA}$ und eines reellen Vielfachen des Vektors $\vec{a}$. Es gilt also

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a} \ ,$$

wo t eine durch P eindeutig bestimmte reelle Zahl bezeichnet. Wenn t alle reellen Zahlen durchläuft, so durchläuft P alle Punkte der Geraden g.

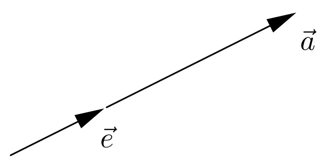


Beispiel Ähnliches geschieht bei der Parameterdarstellung einer Ebene im Raum. Es sei ein Punkt A im Raum gegeben und zwei (verschiedene) Richtungen, festgelegt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Gesucht ist eine Beschreibung der (Punkte der) Ebene E, die durch den Punkt A geht und die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel ist. Ähnlich wie oben bei der Geraden ist es leicht, den Ortsvektor eines Punktes P der Ebene zu beschreiben: Der Ortsvektor $\vec{OP}$ ist die Summe des Vektors $\vec{OA}$ und einer reellen Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es gilt also

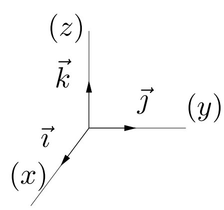
$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a} + s\vec{b} \ ,$$

wo t und s zwei durch P eindeutig bestimmte reelle Zahlen bezeichnen. Wenn t und s alle Paare reeller Zahlen durchläuft, so durchläuft P alle Punkte der Ebene E.

Beispiel Ein *Einheitsvektor* ist ein Vektor der Länge 1. Ist $\vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor, so ist $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$ ein Einheitsvektor in der Richtung von $\vec{a}$.



Beispiel Ein kartesisches Koordinatensystem wird durch den Ursprung und die Einheitspunkte auf den drei Koordinatenachsen bestimmt. Die Ortsvektoren dieser drei Einheitspunkte sind die *Grund*vektoren des Koordinatensystems $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Man beachte, dass sich der Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $\vec{a} = a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}$ schreiben lässt.

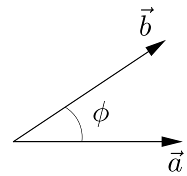


2 Skalarprodukt

Wir definieren als nächstes das sogenannte **Skalarprodukt**. Es ordnet dem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine reelle Zahl $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zu, nämlich

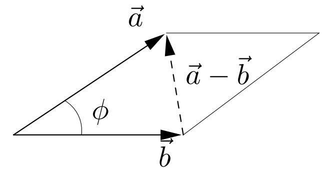
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi \ ,$$

wobei ϕ den Winkel zwischen den Richtungen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet.



Algebraisch, d.h. durch Komponenten drückt sich das Skalarprodukt auf sehr einfache Art und Weise aus. Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$



Beweis Nach dem Cosinus-Satz der Trigonometrie gilt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi \ .$$

Damit erhält man in Komponenten

$$(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1) + (a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2) + (a_3^2 + b_3^2 - 2a_3 b_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi \ ,$$

woraus die behauptete Gleichung sofort folgt.

Es ergibt sich aus der algebraischen Form des Skalarproduktes, dass die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a} \cdot \vec{b} & & = & & \vec{b} \cdot \vec{a} \ , \\ (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} & = & \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) & = & \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) \ , \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) & & = & & \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \ . \end{array}$$

Man beachte, dass für das Skalarprodukt kein Assoziativgesetz gilt.

Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich in der Vektoralgebra geometrische Begriffe wie Länge von Vektoren und Winkel zwischen Richtungen, so auch das Senkrechtstehen, rein algebraisch-rechnerisch beherrschen. Dazu einige Beispiele.

Beispiel Die *Länge* des Vektors $\vec{a}$ ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \ .$$

Beispiel Der *Winkel* ϕ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen:

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \ .$$

Beispiel Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, stehen genau dann *senkrecht*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Beispiel Die Ebene E sei gegeben durch den Punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$. Dann werden die Punkte $P = (x, y, z)$ der Ebene E charakterisiert durch die Bedingung

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \ .$$

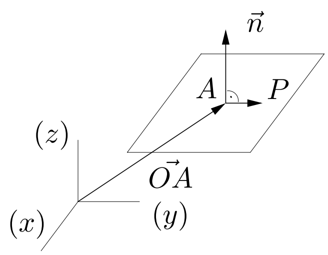
In Komponenten ausgedrückt liefert dies die *Gleichung* der Ebene E:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0 \ .$$

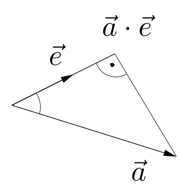
Insbesondere lässt sich jede Ebene in der Form

$$ax + by + cz = d$$

beschreiben. Dabei ist das Tripel (a, b, c) ein zur Ebene senkrecht stehender Vektor.



Beispiel Die *Projektion* eines Vektors $\vec{a}$ auf die durch den *Einheits*vektor $\vec{e}$ gegebene Richtung ist $\vec{a} \cdot \vec{e}$.



3 Vektorprodukt

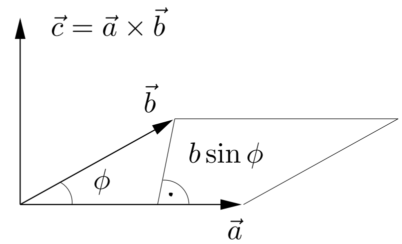
Neben dem Skalarprodukt von zwei Vektoren – das Resultat ist ein Skalar – gibt es auch ein *Vektorprodukt* – das Resultat ist ein Vektor.

Das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wie folgt bestimmt:

- Der Betrag von $\vec{c}$ ist gegeben durch $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\phi|$, wobei ϕ den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet.

- Der Vektor $\vec{c}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.
- Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes.



Wie das Skalarprodukt besitzt das Vektorprodukt eine einfache Beschreibung in Komponenten: Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \ .$$

Beweis Mit Ausnahme der dritten sind die definierenden Eigenschaften des Vektorproduktes für den in seinen drei Komponenten gegebenen Vektor einfach zu verifizieren:

Wie man mit dem Skalarprodukt nachprüft, steht der Vektor $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ senkrecht auf $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Für das Quadrat des Flächeninhaltes F des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes gilt

$$\begin{aligned} F^2 &= (|\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\phi) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \ . \end{aligned}$$

Die dritte Eigenschaft ist schwieriger nachzuweisen, und wir geben dafür keinen vollständigen Beweis. Immerhin können wir feststellen, dass für die Basisvektoren $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ und $\vec{k}$ die Formel in der Tat richtig ist. Der Beweis lässt sich dann mit Hilfe einer Stetigkeitsüberlegung vervollständigen.

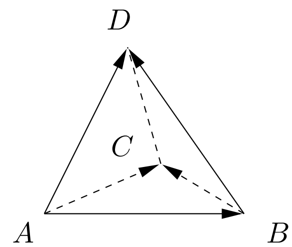
Es gelten für das Vektorprodukt die folgenden Rechenregeln; sie sind am einfachsten in der algebraischen Form nachzuprüfen:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{b} \times \vec{a} & & = & & -\vec{a} \times \vec{b} \ , \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) & & = & & \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \ , \\ (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} & = & \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) & = & \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) \ . \end{array}$$

Man beachte, dass für das Vektorprodukt kein Assoziativgesetz gilt.

Beispiel Die Achse einer Rotationsbewegung sei durch den Punkt A und den Einheitsvektor $\vec{e}$ gegeben, die Winkelgeschwindigkeit durch den zu $\vec{e}$ parallelen Vektor $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}$. Ein Punkt P, der die Rotationsbewegung mitmacht, hat dann die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{AP}$.

Beispiel Ein Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D stehe unter allseitig gleichem Druck p. Man zeige, dass die resultierend Auftriebskraft trivial ist.



Die auf die Seitenfläche ABC wirkende Kraft $\vec{K}_{ABC}$ ist proportional zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Proportionalitätsfaktor p) und senkrecht nach innen gerichtet. Sie lässt sich mit Hilfe des Vektorproduktes wie folgt beschreiben:

$$\vec{K}_{ABC} = \frac{p}{2}(\vec{AB} \times \vec{AC}) \ .$$

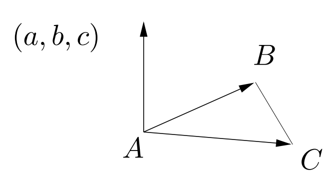
Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{K}_{ACD} &= \frac{p}{2}(\vec{AC} \times \vec{AD}) \ , \\ \vec{K}_{ABD} &= -\frac{p}{2}(\vec{AB} \times \vec{AD}) \ , \\ \vec{K}_{BCD} &= -\frac{p}{2}(\vec{BC} \times \vec{BD}) \ . \end{aligned}$$

Es gilt nun $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ und $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Damit folgt die Behauptung mit Hilfe der Rechenregeln.

Beispiel Es sei die Ebene E durch die drei Punkte A, B, C gegeben. Man bestimme die Gleichung der Ebene.

Die Gleichung hat die Form $ax + by + cz = d$. Es sind also die vier Koeffizienten a, b, c, d zu bestimmen. Wie wir wissen, ist der Vektor (a, b, c) ein zur Ebene senkrecht stehender Vektor. *Ein* solcher Vektor ist $\vec{AB} \times \vec{AC}$. Die noch fehlende Grösse d lässt sich dadurch bestimmen, dass die Koordinaten von A (oder B oder C) die Ebenengleichung erfüllen müssen.

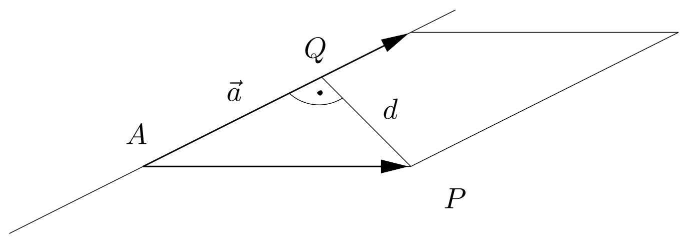


Beispiel Die Gerade g sei gegeben durch den Punkt A und die Richtung $\vec{a}$. Man bestimme den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Der Abstand d des Punktes P von der Geraden g lässt sich als Höhe des Parallelogrammes interpretieren, das A als Eckpunkt besitzt und das von den Vektoren $\vec{a}$ (als Grundlinie) und dem Vektor $\vec{AP}$ aufgespannt wird. Die Fläche dieses Parallelogrammes lässt sich dann einerseits berechnen als $d \cdot |\vec{a}|$ und andererseits als $|\vec{a} \times \vec{AP}|$. Der Abstand d ist somit durch

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{AP}|}{|\vec{a}|}$$

gegeben.



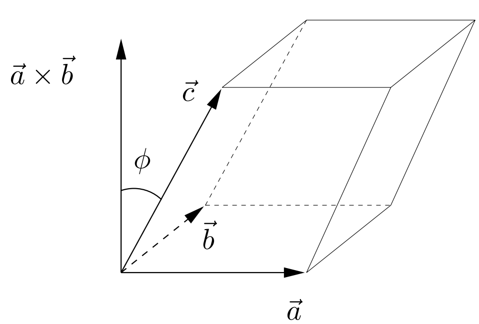
4 Das gemischte Produkt

Neben dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt betrachtet man in der Vektoralgebra auch eine Operation, an der *drei* Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beteiligt sind, nämlich das **gemischte Produkt** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Es ist definiert durch

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c \; .$$

Werden die drei Vektoren in einem Punkt angebracht, so spannen sie im dreidimensionalen Raum ein sogenanntes Parallelepiped auf. (Auf den Fall, wo die Vektoren in einer Ebene liegen, kommen wir später zurück.) Wir betrachten das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche des Parallelepipeds. Im gemischten Produkt hat man

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c \; = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot (|\vec{c}| \cdot \cos\phi) \; .$$



Dabei ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ der Flächeninhalt der Grundfläche, und ϕ ist der Winkel zwischen $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$, also zwischen der Normalenrichtung zur Grundfläche und $\vec{c}$. Ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein *Rechts*system, so ist der Winkel ϕ spitz, und $|\vec{c}| \cdot \cos\phi$ ist die *Höhe* des Parallelepipeds. In diesem Fall ist also $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ das Volumen V des Parallelepipeds. Ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein *Links*system, so ist der Winkel ϕ stumpf, und $|\vec{c}| \cdot \cos\phi$ ist das Negative der Höhe des Parallelepipeds. In diesem Fall ist $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ das negative Volumen $-V$ des Parallelepipeds.

Im Ausnahmefall, wo die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene liegen, erhält man $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Umgekehrt folgt offenbar aus $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene liegen.

Aus der eben angestellten Überlegung ergibt sich ferner

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \ .$$

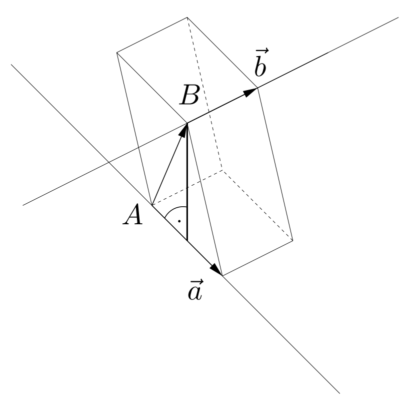
Um dies einzusehen, geht man beim Parallelepiped, das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird, von jeweils anderen (bzw. anders orientierten) Grundflächen aus.

Beispiel Gibt man sich die Vektoren durch ihre Komponenten vor, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, und drückt man das gemischte Produkt in diesen Komponenten aus, so folgt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \ .$$

Beispiel Die Gerade g sei gegeben durch den Punkt A und die Richtung $\vec{a}$ und die Gerade h durch den Punkt B und die Richtung $\vec{b}$. Man bestimme den Abstand der beiden (im allgemeinen) windschiefen Geraden.

Der Abstand d der beiden Geraden kann interpretiert werden als Höhe des Parallelepipeds, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{AB} = \vec{c}$ aufgespannt wird und das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche hat. Damit gilt $d = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| / |\vec{a} \times \vec{b}|$.



Analysis I

Aufgaben zur Vektoralgebra

1. Welche Vektoren $\vec{d}$ können als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = (1,0,0)$ und $\vec{a}_2 = (2,3,0)$ dargestellt werden, welche nicht?

2. Berechne den von den beiden Vektoren $\vec{a} = (-2,2,-1)$ und $\vec{b} = (0,-3,0)$ eingeschlossenen Winkel γ.

3. Bestimme den Einheitsvektor $\vec{e}$ in Richtung der Projektion von $\vec{a} = (7,-3,9)$ auf $\vec{b} = (2,1,-2)$.

4. Verifiziere, dass die Vektoren $\vec{a} = (2,1,-2)$ und $\vec{b} = (1,2,2)$ senkrecht aufeinander stehen.

5. Bestimme einen Vektor $\vec{c} \neq (0,0,0)$, der senkrecht auf den Vektoren $\vec{a} = (3,-4,5)$ und $\vec{b} = (3,2,-7)$ steht.

6. Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = (4,-1,5)$ und $\vec{b} = (2,3,-2)$ aufgespannten Dreiecks.

7. Die drei Punkte $A(1,3,1), B(-2,1,1)$ und $C(1,-1,0)$ sind gegeben. Bestimme

   a) eine Parameterdarstellung

   b) eine Gleichung

   c) einen Normaleneinheitsvektor

   der Ebene, die durch diese Punkte definiert wird.

8. a) Bestimme einen Normalenvektor $\vec{n}$ und den Abstand d vom Ursprung der Ebene $E : x + 2y - 2z = 12$.

   b) Bestimme den Abstand d' des Punktes $P(2,3,-4)$ von E.

   c) Bestimme eine Gleichung der Ebene F mit der Parameterdarstellung $(x,y,z) = (3,3,3) + \lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,1)$.

   d) Bestimme die Schnittgerade s von E und F.

   e) Durchstosse die Gerade $g : (x,y,z) = (2,1,-1) + \nu(3,1,-1)$ mit E.

   f) Bestimme den Schnittwinkel α von E und F.

./.

9. Zerlege den Vektor $\vec{x} = (2, -3, 1)$ in eine Komponente parallel zu $\vec{a} = (1, 0, 2)$ und in eine Komponente senkrecht zu $\vec{b} = (-1, 1, 1)$.

10. Eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(3, 1, 2)$ hat den Radius $r = 5$. Durch den Punkt $P(2, -1, 4)$ im Innern der Kugel ist die Ebene E so zu legen, dass sie aus der Kugel den kleinstmöglichen Kreis herausschneidet. Bestimme die Gleichung von E und den Radius des Kreises.

11. Die Gerade durch die Punkte $A(2, -1, 3)$ und $B(4, 0, 2)$ wirft auf die Ebene $E : 3x - 2y + z = 10$ einen Schatten, wenn sie von parallel einfallendem Licht mit Richtung $\vec{d} = (1, 1, 1)$ beleuchtet wird. Bestimme diesen Schatten.

12. Welche Parallele zur x-Achse schneidet die Geraden

$$\begin{aligned} g &: (x, y, z) = (3, -4, 2) + \lambda(-2, 3, 0) \quad \text{und} \\ h &: (x, y, z) = (2, 13, 6) + \mu(-1, 2, 1) \qquad ? \end{aligned}$$

13. a) Für welchen Wert von p haben die Ebenen $E : x + y - 7 = 0$, $F : x - y - z - 8 = 0$ und $G : px + y - 2z - 9 = 0$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt?

    b) Für welche Werte von p und q haben die Ebenen $E : x - 2y - 4 = 0$, $F : x - y + z + 5 = 0$ und $G : px + y + 3z + q = 0$ eine gemeinsame Schnittgerade?

14. Fünf Punkte $A(4, 1, 2), B(2, 6, 3), C(-3, 2, 4), P(0, 0, 5)$ und $Q(3, 9, -1)$ seien gegeben. Man denke sich das Dreieck ABC als undurchsichtige Fläche und begründe rechnerisch, ob P von Q aus sichtbar ist oder nicht.

15. Bestimme die Gleichung einer Kugel mit Radius 3, die durch die Punkte $A(0, 0, 2)$ und $B(2, 0, -2)$ geht, wenn der Kugelmittelpunkt auf der Ebene $E : 2x - y - 5z = 0$ liegt.

16. Die Punkte $A(9, -8, 8)$ und $C(-3, 4, 2)$ bestimmen die Diagonale eines Quadrates $ABCD$, das in der Ebene $ax + by - 2z + 6 = 0$ liegt. Der Punkt $S(9, 1, 11)$ ist die Spitze einer Pyramide über der Grundfläche $ABCD$. Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

17. Die folgenden Sätze sind vektoriell zu beweisen:

    a) Die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.

    b) Sind in einem Tetraeder die Kanten zweier Paare von Gegenkanten zueinander orthogonal, so sind es auch die Kanten des dritten Paares.

Repetition: Grundlagen

Vektoralgebra

Man gebe eine Anzahl von Beispielen physikalischer Grössen an, die durch Vektoren beschrieben werden.

Test *Auf einen Massenpunkt wirken die durch Vektoren gegebenen Kräfte* $\vec{K}_1 = (-1, 7, 6)$ *und* $\vec{K}_2 = (3, -4, 1)$. *Man berechne die resultierende Kraft.*

Test *Man möchte auf einen Massenpunkt die Kraft* $\vec{K} = (-2, 4, 0)$ *ausüben. Welche Kraft* $\vec{K}_2$ *muss man zusätzlich zur Kraft* $\vec{K}_1 = (3, 3, 3)$ *ausüben, damit die resultierende Kraft* $\vec{K}$ *ist?*

Man rufe sich die geometrische und die algebraische Definition des Skalarproduktes, des Vektorproduktes zweier Vektoren in Erinnerung.

Gegeben sind die Punkte $A = (5, -4, -1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (2, 2, -1)$.

Test *Ist einer der Winkel im Dreieck* ABC *ein rechter?*

Test *Die Ebene* E *sei bestimmt durch* A, B, C. *Man gebe die Gleichung* $ax+by+cz = d$ *von* E *an.*

Test *Man gebe einen zur Ebene* E *senkrecht stehenden Vektor* $\vec{n}$ *an. Ist* $\vec{n}$ *ein Einheitsvektor? Wenn nicht, normiere man* $\vec{n}$.

Test *Was kann über die Vektoren* $\vec{AB} \times \vec{AC}$, $\vec{BA} \times \vec{BC}$, $\vec{CA} \times \vec{CB}$ *gesagt werden?*

Test *Man gebe eine Parameterdarstellung (Parameter* t*) der durch* A, B *bestimmten Gerade an und bestimme, in Funktion von* t*, den Abstand des "laufenden Punktes"* P *vom Punkt* C.

> **In der Wissenschaft – wie wohl in den meisten Fällen – ist es normalerweise am besten, mit dem Anfang zu beginnen.**
>
> Lewis Carroll, Autor von Alice's Adventures in Wonderland

Frage 1, Skalarprodukt

Ein Vektor $\vec{a}$ besitze die Eigenschaft $(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{a} = \vec{a}$. Was kann über $\vec{a}$ gesagt werden?

Welche Aussage ist *richtig*?

A Jeder Vektor erfüllt diese Gleichung.

B Es gilt $\vec{a} = (1, 0, 0)$.

C Der Vektor $\vec{a}$ ist ein Einheitsvektor.

D Der Vektor $\vec{a}$ ist entweder ein Einheitsvektor oder der Nullvektor.

Frage 1: Skalarprodukt

Antworten:

A: Nein, diese Aussage ist nicht richtig.

B: Nein, diese Aussage ist nicht (vollständig) richtig. Zwar erfüllt der Vektor $(1, 0, 0)$ die Gleichung. Es gibt aber noch andere.

C: Nein, diese Aussage ist nicht (vollständig) richtig. Zwar erfüllt jeder Einheitsvektor diese Gleichung, es gibt aber noch andere.

D: Ja, dies ist die richtige Aussage.

Frage 2, Vektorprodukt

Ein Vektor $\vec{a}$ besitze die Eigenschaft $(\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{a}$. Was kann über $\vec{a}$ gesagt werden?

Welche Aussage ist *richtig*?

A Jeder Vektor erfüllt diese Gleichung.

B Der Vektor $\vec{a}$ ist ein Einheitsvektor.

C Der Vektor $\vec{a}$ ist der Nullvektor.

Frage 2: Vektorprodukt

Antworten:

A: Nein, diese Aussage ist nicht richtig.

B: Nein, diese Aussage ist nicht richtig. Zum Beispiel erfüllt der Vektor $(1, 0, 0)$ die Gleichung nicht.

C: Ja, dies ist die richtige Aussage. In der Tat ist das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst immer der Nullvektor.