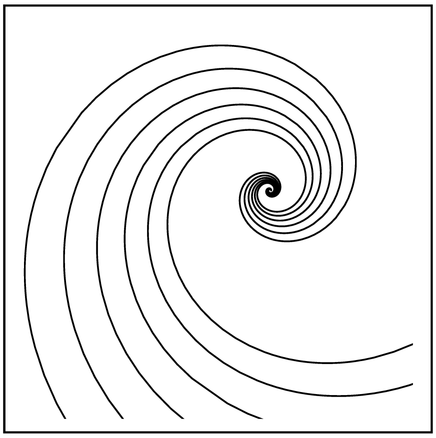
Urs Stammbach

Prof. em. ETH



Algebra

Gruppen
Ringe
Körper

Modultheorie
Elemente der Darstellungstheorie
Abriss der Galoistheorie

Wissen entsteht nicht durch Anhäufung von Einzelinformationen, sondern durch theoretisch angeleitete Integration in grössere Zusammenhänge.

T.A. Becker

Vorwort

Der vorliegende Text entspricht dem Skript der Vorlesung *Algebra*, die ich an der ETH für Mathematiker und Physiker mehrmals gehalten habe. Der Text wurde zwischen 1993 (Kapitel I, II, III, VI) und 1995 (Kapitel IV, V) fertiggestellt und in vervielfältigter Form abgegeben; im Jahre 1999 wurde er im Internet verfügbar gemacht. Er erscheint hier erstmals, nur an einigen wenigen Stellen korrigiert und ergänzt, als kleines Buch.

Begriffe und Resultate der abstrakten Algebra spielen in fast allen Gebieten der Mathematik eine grundlegende Rolle. Die Vorlesung, aus der dieser Text entstanden ist, hat zum Ziel, die Studierenden der Mathematik und Physik an der ETH Zürich mit dem zentralen Inhalt der Algebra bekannt zu machen.

Im ersten Teil des Textes werden die grundlegenden Begriffe *Gruppe*, *Ring* und *Körper* eingeführt. Inhalt und Aufbau dieser Kapitel entsprechen im wesentlichen dem Kanon, dem Algebra-Lehrbücher üblicherweise verpflichtet sind. Allerdings sind hier zusätzlich einige Abschnitte aufgenommen, die in anderen Algebra-Texten nicht zu finden sind. Es sind dies das Resultat über die Darstellung von Primzahlen als Summe von zwei Quadraten (II.5), ein Abschnitt über den Satz von Fermat für komplexe Polynomringe (II.6), eine elementare Behandlung des Problems der Konstruktion mit Zirkel und Lineal (III.3) und ein Abschnitt über Codierungstheorie (III.5), in dem u.a. auch die klassischen Newtonschen Identitäten behandelt werden.

Jedes der drei Kapitel zu Gruppen, Ringen und Körpern beginnt mit einer Einleitung, welche ganz kurz die Bedeutung und die historische Entwicklung der Gebiete beschreiben.

Im zweiten Teil des Textes werden drei algebraische Gebiete näher behandelt, nämlich die *Modultheorie*, die *Darstellungstheorie* und die *Galoistheorie*. Es werden damit drei algebraische Themenkreise berührt, die bei jeder weiteren Beschäftigung mit Algebra fundamental sind und die ferner historisch zu Resultaten geführt haben, die für benachbarte Fachgebiete wichtig sind: Die Modultheorie bildet die Grundlage der homologischen Algebra und stellt damit für das Gebiet der algebraischen Topologie den abstrakten, algebraischen Apparat bereit. Die Darstellungstheorie der Gruppen führt nicht nur zu tiefliegenden mathematischen Resultaten innerhalb der Gruppentheorie, sondern sie spielt beispielsweise auch in der mathematischen Behandlung der Quantentheorie eine grosse Rolle. Die Galoistheorie, ursprünglich entstanden, um die Auflösung von polynomialen Gleichungen durch Radikale zu behandeln, wurde in der historischen Entwicklung bald auch grundlegend für viele Resultate der algebraischen Zahlentheorie. Der Text folgt dem Grundsatz, die einzelnen Gebiete nicht völlig voneinander getrennt darzustellen, sondern immer auch Querbezüge zuzulassen. So enthält der Abschnitt IV.5 als Anwendung der Modultheorie nicht nur den Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen sondern auch einige Resultate zu Normalformen von Matrizen, im Abschnitt V.8 wird in einem Beispiel gezeigt, wie die Darstellungstheorie in der Quantenmechanik verwendet wird und im Abschnitt VI.11 wird mit Hilfe der Galoistheorie ein wichtiger Satz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen bewiesen.

Zürich, im September 2009 Urs Stammbach

Inhaltsverzeichnis