Lineare Algebra

U. Stammbach

Professor an der ETH-Zürich

Vorwort

Dieser Text über lineare Algebra ist aus einer Vorlesung im ersten Studienjahr an der Abteilung für Mathematik und Physik der ETH Zürich entstanden; er ist natürlicherweise von der Situation dieser Lehrveranstaltung in diesem speziellen Studienplan geprägt. Die folgenden Bemerkungen mögen die dem Text zugrunde liegenden Ideen etwas beleuchten.

"Lineare Algebra" ist im Studium des Mathematikers und Physikers traditionsgemäss eine der Vorlesungen, welche neben der reinen Stoffvermittlung auch die Aufgabe hat, den Studenten mit der mathematischen Denkweise, ihrer Schwierigkeit und ihrer Effizienz bekannt zu machen. Das ist einer der Gründe dafür, dass wir in diesem Text einen vergleichsweise abstrakten Standpunkt einnehmen; insbesondere gehen wir basisunabhängig vor. Ein anderer Grund liegt natürlich darin, dass erst von einem abstrakten Standpunkt aus die volle Kraft der linearen Algebra – dies gilt auch für Anwendungen – verfügbar wird. Auf der anderen Seite darf in einer Anfängervorlesung die Allgemeinheit und die Rigorosität auch nicht überbetont werden. Wir sind der Überzeugung, dass der Student Begriffe und Resultate erst dann voll erfasst, wenn er damit zusammenhängende konkrete Probleme selbständig löst. Aus diesem Grund fügen wir neben vielen Beispielen auch eine grosse Zahl von Übungsaufgaben ein und bringen explizite rechnerische Verfahren zur Sprache. Da unsere Studenten parallel zur Vorlesung "Lineare Algebra" eine Lehrveranstaltung über Computer besuchen, gehen wir allerdings auf eine computergerechte Behandlung von Problemen der linearen Algebra nicht ein.

Dieser Text sieht seine Aufgabe *nicht* darin, es dem Studenten möglichst leicht zu machen; er ist recht knapp gehalten und verlangt vom Leser eine grosse Bereitwilligkeit, mitzuarbeiten und selbst aktiv zu werden. Dies allerdings ist überall in der Mathematik ähnlich: mathematisches Wissens erwirbt man nur, indem man mathematisch tätig ist.

Die Kapitel sind mit römischen Zahlen numeriert. Innerhalb eines Kapitels numerieren wir Theoreme, Sätze, Bemerkungen, etc. jeweils durch ein Paar arabischer Zahlen; die erste Zahl bezieht sich auf den Abschnitt, die zweite auf den speziellen Unterabschnitt oder Satz etc. Stellen, auf die wir uns beziehen wollen, bezeichnen wir durch das entsprechende Paar arabischer Zahlen, falls sie sich im gleichen Kapitel befinden. Befinden sie sich in einem anderen Kapitel, so lassen wir dem Paar eine römische Zahl vorangehen, welche das Kapitel bezeichnet.

Ein Dank gebührt meinen Studenten, die mitgeholfen haben, Fehler und Unklarheiten einer früheren Fassung zu verbessern.

Zürich, im Januar 1980

Vorwort zur elektronischen Fassung

Nach vier aufeinanderfolgende Druckauflagen beim Teubner-Verlag machen wir nun den Text in der Form eines .pdf-Files im Internet zugänglich. Damit wird in beschränktem Mass auch eine Textsuche ermöglicht.

Die Umsetzung des Textes in LaTeX hat es erlaubt, da und dort die Formulierung zu verbessern. Zu befürchten ist allerdings, dass sich dabei einige neue Tipp- und Druckfehler eingeschlichen haben.

Zürich, im April 1999
U. Stammbach

Es freut mich, feststellen zu können, dass die "Lineare Algebra" auch im Internet auf Interesse stösst. – Viele Benutzer und Benutzerinnen haben mir Druckfehler mitgeteilt, die jetzt korrigiert werden konnten. An sie alle geht ein herzlicher Dank!

Zürich, im August 2000
U. Stammbach

Die Nachfrage nach diesem Text hat sich in der letzten Zeit erfreulich entwickelt. In der nun vorliegenden *neuen Version* habe ich einige weitere bekannt gewordene Druckfehler korrigiert. Die weit wichtigere Neuerung ist aber, dass nun sämtliche Verweise, auch diejenigen des neu hinzugekommenen Sachverzeichnisses, als .pdf-Links ausgebildet sind. Voraussetzung für das einwandfreie Funktionieren unter dem Acrobat Reader ist, dass sämtliche Files LA.pdf, LAI.pdf, LAII.pdf, LAIII.pdf, LAIV.pdf, LAV.pdf, LAVI.pdf, LAVII.pdf, SA.pdf im gleiche Directory angelegt sind. Selbstverständlich bleibt ein Papierausdruck nach wie vor möglich.

Zürich, im Februar 2002
U. Stammbach

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Vektorräume **1**

I.1 Lineare Gleichungssysteme 1

I.2 Beispiele von Vektorräumen 7

I.3 Definition eines Vektorraumes 8

I.4 Linearkombinationen, Unterräume 13

I.5 Vektorräume über beliebigen Körpern 17

Kapitel II. Die Struktur endlich dimensionaler Vektorräume **21**

II.1 Lineare Unabhängigkeit 22

II.2 Basen 25

II.3 Dimension 27

II.4 Isomorphismen, Koordinaten 31

II.5 Berechnungsmethoden 35

II.6 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme 40

II.7 Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix 46

II.8 Basiswechsel 49

Kapitel III. Lineare Abbildungen **57**

III.1 Komplemente, direkte Summen 58

III.2 Definition der linearen Abbildung 60

III.3 Matrizen 65

III.4 Rang einer linearen Abbildung 70

III.5 Basiswechsel 73

III.6 Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, W)$ 77

III.7 Lineare Selbstabbildungen eines Vektorraumes 81

Kapitel IV. Determinanten **89**

IV.1 Permutationen 90

IV.2 Determinanten 94

IV.3 Das Rechnen mit Determinanten 100

IV.4 Das charakteristische Polynom 104

IV.5 Diagonalisierung und Trigonalisierung 109

Kapitel V. Vektorräume mit Skalarprodukt **117**

V.1 Euklidische Vektorräume 118

V.2 Unitäre Vektorräume 122

V.3 Norm 124

V.4 Orthonormierte Basen 127

V.5 Orthogonale und unitäre Selbstabbildungen 134

V.6 Orthogonale Komplemente 137

V.7 Adjungierte Abbildungen 140

V.8 Diagonalisierung von selbstadjungierten linearen Selbstabbildungen 144

V.9 Die Kästchenform orthogonaler Matrizen 149

Kapitel VI. Bilinearformen **155**

VI.1 Bilinearformen; quadratische Formen 156

VI.2 Bilinearformen in euklidischen Vektorräumen 161

VI.3 Hauptachsentransformation 164

VI.4 Extremaleigenschaft der Eigenwerte 168

VI.5 Flächen zweiten Grades in $\mathbb{R}^3$ 171

Kapitel VII. Anhang: Gruppen, Ringe, Körper **179**

VII.1 Gruppen 179

VII.2 Faktorgruppen, Faktorräume 182

VII.3 Ringe, Algebren, Körper 183

VII.4 Polynome 185

Sachverzeichnis **189**