

# Lineare Algebra

U. Stambach

Professor an der ETH-Zürich



# Vorwort

Dieser Text über lineare Algebra ist aus einer Vorlesung im ersten Studienjahr an der Abteilung für Mathematik und Physik der ETH Zürich entstanden; er ist natürlicherweise von der Situation dieser Lehrveranstaltung in diesem speziellen Studienplan geprägt. Die folgenden Bemerkungen mögen die dem Text zugrunde liegenden Ideen etwas beleuchten.

“Lineare Algebra” ist im Studium des Mathematikers und Physikers traditionsgemäß eine der Vorlesungen, welche neben der reinen Stoffvermittlung auch die Aufgabe hat, den Studenten mit der mathematischen Denkweise, ihrer Schwierigkeit und ihrer Effizienz bekannt zu machen. Das ist einer der Gründe dafür, dass wir in diesem Text einen vergleichsweise abstrakten Standpunkt einnehmen; insbesondere gehen wir basisunabhängig vor. Ein anderer Grund liegt natürlich darin, dass erst von einem abstrakten Standpunkt aus die volle Kraft der linearen Algebra – dies gilt auch für Anwendungen – verfügbar wird. Auf der anderen Seite darf in einer Anfängervorlesung die Allgemeinheit und die Rigorosität auch nicht überbetont werden. Wir sind der Überzeugung, dass der Student Begriffe und Resultate erst dann voll erfasst, wenn er damit zusammenhängende konkrete Probleme selbständig löst. Aus diesem Grund fügen wir neben vielen Beispielen auch eine grosse Zahl von Übungsaufgaben ein und bringen explizite rechnerische Verfahren zur Sprache. Da unsere Studenten parallel zur Vorlesung “Lineare Algebra” eine Lehrveranstaltung über Computer besuchen, gehen wir allerdings auf eine computergerechte Behandlung von Problemen der linearen Algebra nicht ein.

Dieser Text sieht seine Aufgabe *nicht* darin, es dem Studenten möglichst leicht zu machen; er ist recht knapp gehalten und verlangt vom Leser eine grosse Bereitwilligkeit, mitzuarbeiten und selbst aktiv zu werden. Dies allerdings ist überall in der Mathematik ähnlich: mathematisches Wissen erwirbt man nur, indem man mathematisch tätig ist.

Die Kapitel sind mit römischen Zahlen numeriert. Innerhalb eines Kapitels numerieren wir Theoreme, Sätze, Bemerkungen, etc. jeweils durch ein Paar arabischer Zahlen; die erste Zahl bezieht sich auf den Abschnitt, die zweite auf den speziellen Unterabschnitt oder Satz etc. Stellen, auf die wir uns beziehen wollen, bezeichnen wir durch das entsprechende Paar arabischer Zahlen, falls sie sich im gleichen Kapitel befinden. Befinden sie sich in einem anderen Kapitel, so lassen wir dem Paar eine römische Zahl vorangehen, welche das Kapitel bezeichnet.

Ein Dank gebührt meinen Studenten, die mitgeholfen haben, Fehler und Unklarheiten einer früheren Fassung zu verbessern.

Zürich, im Januar 1980

## Vorwort zur elektronischen Fassung

Nach vier aufeinanderfolgende Druckauflagen beim Teubner-Verlag machen wir nun den Text in der Form eines .pdf-Files im Internet zugänglich. Damit wird in beschränktem Mass auch eine Textsuche ermöglicht.

Die Umsetzung des Textes in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X hat es erlaubt, da und dort die Formulierung zu verbessern. Zu befürchten ist allerdings, dass sich dabei einige neue Tipp- und Druckfehler eingeschlichen haben.

Zürich, im April 1999  
U. Stambach

Es freut mich, feststellen zu können, dass die “Lineare Algebra” auch im Internet auf Interesse stösst. – Viele Benutzer und Benutzerinnen haben mir Druckfehler mitgeteilt, die jetzt korrigiert werden konnten. An sie alle geht ein herzlicher Dank!

Zürich, im August 2000  
U. Stambach

Die Nachfrage nach diesem Text hat sich in der letzten Zeit erfreulich entwickelt. In der nun vorliegenden *neuen Version* habe ich einige weitere bekannt gewordene Druckfehler korrigiert. Die weit wichtigere Neuerung ist aber, dass nun sämtliche Verweise, auch diejenigen des neu hinzugekommenen Sachverzeichnisses, als .pdf-Links ausgebildet sind. Voraussetzung für das einwandfreie Funktionieren unter dem Acrobat Reader ist, dass sämtliche Files LA.pdf, LAI.pdf, LAII.pdf, LAIII.pdf, LAIV.pdf, LAV.pdf, LAVI.pdf, LAVII.pdf, SA.pdf im gleiche Directory angelegt sind. Selbstverständlich bleibt ein Papiausdruck nach wie vor möglich.

Zürich, im Februar 2002  
U. Stambach

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel I. Vektorräume</b>	<b>1</b>
I.1 Lineare Gleichungssysteme .....	1
I.2 Beispiele von Vektorräumen .....	7
I.3 Definition eines Vektorraumes .....	8
I.4 Linearkombinationen, Unterräume .....	13
I.5 Vektorräume über beliebigen Körpern .....	17
<b>Kapitel II. Die Struktur endlich dimensionaler Vektorräume</b>	<b>21</b>
II.1 Lineare Unabhängigkeit .....	22
II.2 Basen .....	25
II.3 Dimension .....	27
II.4 Isomorphismen, Koordinaten .....	31
II.5 Berechnungsmethoden .....	35
II.6 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme .....	40
II.7 Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix .....	46
II.8 Basiswechsel .....	49
<b>Kapitel III. Lineare Abbildungen</b>	<b>57</b>
III.1 Komplemente, direkte Summen .....	58
III.2 Definition der linearen Abbildung .....	60
III.3 Matrizen .....	65
III.4 Rang einer linearen Abbildung .....	70
III.5 Basiswechsel .....	73

III.6 Der Vektorraum $\text{Hom}(V, W)$ .....	77
III.7 Lineare Selbstabbildungen eines Vektorraumes .....	81
<b>Kapitel IV. Determinanten</b> .....	<b>89</b>
IV.1 Permutationen .....	90
IV.2 Determinanten .....	94
IV.3 Das Rechnen mit Determinanten .....	100
IV.4 Das charakteristische Polynom .....	104
IV.5 Diagonalisierung und Trigonalisierung .....	109
<b>Kapitel V. Vektorräume mit Skalarprodukt</b> .....	<b>117</b>
V.1 Euklidische Vektorräume .....	118
V.2 Unitäre Vektorräume .....	122
V.3 Norm .....	124
V.4 Orthonormierte Basen .....	127
V.5 Orthogonale und unitäre Selbstabbildungen .....	134
V.6 Orthogonale Komplemente .....	137
V.7 Adjungierte Abbildungen .....	140
V.8 Diagonalisierung von selbstadjungierten linearen Selbstabbildungen .....	144
V.9 Die Kästchenform orthogonaler Matrizen .....	149
<b>Kapitel VI. Bilinearformen</b> .....	<b>155</b>
VI.1 Bilinearformen; quadratische Formen .....	156
VI.2 Bilinearformen in euklidischen Vektorräumen .....	161
VI.3 Hauptachsentransformation .....	164

VI.4 Extremaleigenschaft der Eigenwerte .....	168
VI.5 Flächen zweiten Grades in $\mathbb{R}^3$ .....	171
<b>Kapitel VII. Anhang: Gruppen, Ringe, Körper</b>	<b>179</b>
VII.1 Gruppen .....	179
VII.2 Faktorgruppen, Faktorräume .....	182
VII.3 Ringe, Algebren, Körper .....	183
VII.4 Polynome .....	185
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>189</b>