

Analysis II:
DIE DETERMINANTE
Frühjahrssemester 2009

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

18. Februar 2009

1 Gruppen

Definition. Eine **Gruppe** ist ein Tripel $(G, \cdot, \mathbb{1})$, bestehend aus einer Menge G , einer Abbildung

$$G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$$

(der **Gruppenoperation**), und einem Element $\mathbb{1} \in G$ (dem **neutralen Element**), welche folgende Bedingungen erfüllen.

- (i) Die Gruppenoperation ist assoziativ, d.h. es gilt $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$.
- (ii) Es gilt $\mathbb{1} \cdot g = g \cdot \mathbb{1} = g$ für alle $g \in G$.
- (iii) Für jedes $g \in G$ gibt es ein Element $h \in G$ so dass $g \cdot h = h \cdot g = \mathbb{1}$.

Das Element h in (iii) ist eindeutig durch g bestimmt. Es heisst **Inverse von g** und wird mit g^{-1} bezeichnet. Eine Gruppe $(G, \cdot, \mathbb{1})$ heisst **kommutativ** (oder **abelsch**) wenn

$$g \cdot h = h \cdot g \quad \forall g, h \in G.$$

Beispiel 1. Die ganzen Zahlen bilden eine Gruppe \mathbb{Z} mit der Addition als Gruppenoperation und der Zahl 0 als neutralem Element. Gleiches gilt für die rationalen, die reellen oder die komplexen Zahlen.

Beispiel 2. Die von Null verschiedenen rationalen Zahlen bilden eine Gruppe mit der Multiplikation als Gruppenoperation und der Zahl 1 als neutralem Element. Gleiches gilt für die reellen oder die komplexen Zahlen.

Beispiel 3. Die zwei-elementige Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ ist eine Gruppe mit der Gruppenoperation $0 + 0 := 0$, $0 + 1 := 1$, $1 + 0 := 1$ und $1 + 1 := 0$. Die 0 ist das neutrale Element.

Beispiel 4. Die zwei-elementige Menge $\{\pm 1\}$ ist eine Gruppe mit der Gruppenoperation $1 \cdot 1 := 1$, $(-1) \cdot (-1) := 1$, $1 \cdot (-1) := -1$ und $(-1) \cdot 1 := -1$. Die 1 ist das neutrale Element.

Beispiel 5. Die Menge $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ aller komplexen Zahlen vom Betrag 1 ist eine Gruppe mit der Multiplikation als Gruppenoperation und der Zahl 1 als neutralem Element.

Beispiel 6. Sei X eine Menge. Die bijektiven Abbildungen $f : X \rightarrow X$ bilden eine Gruppe mit der Komposition als Gruppenoperation und der Identität als neutralem Element.

Beispiel 7. Sei $X := \{1, \dots, n\}$. Eine **Permutation (von X)** ist eine bijektive Abbildung $\sigma : X \rightarrow X$. Die Menge aller Permutationen von X bezeichnen wir mit S_n . Nach Beispiel 6 ist S_n eine Gruppe. Für $n \geq 3$ ist diese Gruppe nicht kommutativ.

Definition. Seien G und H zwei Gruppen. (Die beiden Gruppenoperationen bezeichnen wir mit \cdot und die beiden neutralen Elemente mit $\mathbb{1}_G$ und $\mathbb{1}_H$.) Eine Abbildung

$$\rho : G \rightarrow H$$

heißt **Gruppenhomomorphismus** (oder einfach **Homomorphismus**) wenn sie für alle $a, b \in G$ die Gleichung

$$\rho(a \cdot b) = \rho(a) \cdot \rho(b), \quad \rho(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H,$$

erfüllt. Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt **Gruppenisomorphismus** (oder einfach **Isomorphismus**).

Beispiel 8. Die Abbildung

$$\{0, 1\} \rightarrow \{\pm 1\} : a \mapsto (-1)^a$$

ist ein Isomorphismus.

Beispiel 9. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto \exp(it)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel 10. Die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

ist ein Isomorphismus von der Additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen. Die Umkehrabbildung

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist ebenfalls ein Gruppenisomorphismus.

Beispiel 11. Sei $(G, \cdot, \mathbb{1})$ eine Gruppe, X eine Menge, und $\mathcal{G}(X)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen $f : X \rightarrow X$. Eine **Gruppenaktion von G auf X** ist eine Abbildung

$$\varphi : G \times X \rightarrow X$$

so dass für alle $x \in X$ und alle $a, b \in G$ die Gleichungen

$$\varphi(a \cdot b, x) = \varphi(a, \varphi(b, x)), \quad \varphi(\mathbb{1}, x) = x$$

gelten. Ist φ eine solche Gruppenaktion und definieren wir die Abbildungen $\varphi_a : X \rightarrow X$ für $a \in G$ durch

$$\varphi_a(x) := \varphi(a, x), \quad x \in X,$$

so ist φ_a für jedes $a \in G$ bijektiv (mit Umkehrabbildung $\varphi_{a^{-1}}$) und die Abbildung

$$G \rightarrow \mathcal{G}(X) : a \mapsto \varphi_a$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$\varphi_{a \cdot b} = \varphi_a \circ \varphi_b, \quad \varphi_{\mathbb{1}} = \text{id},$$

für alle $a, b \in G$. Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathcal{G}(X)$ eine Gruppenaktion von G auf X .

Beispiel 12. Wir ordnen einer Permutation $\sigma \in S_n$ die natürliche Zahl

$$N(\sigma) := \#\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\} \quad (1)$$

zu. Die **Parität** von σ ist definiert durch

$$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{N(\sigma)}. \quad (2)$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Abbildung $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 1. *Es gilt $\varepsilon(\text{id}) = 1$ und, für alle $\sigma, \tau \in S_n$,*

$$\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma).$$

Beweis. Wir definieren

$$N(\sigma, \tau) := \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), \tau(\sigma(i)) < \tau(\sigma(j))\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} N(\tau \circ \sigma) &= \#\{(i, j) \mid i < j, \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ &= \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ &\quad + \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) < \sigma(j), \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ &= \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\} \\ &\quad - \#\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j), \tau(\sigma(i)) < \tau(\sigma(j))\} \\ &\quad + \#\{(i, j) \mid \sigma(i) < \sigma(j), \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ &\quad - \#\{(i, j) \mid i > j, \sigma(i) < \sigma(j), \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ &= N(\sigma) + N(\tau) - 2N(\sigma, \tau). \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Übung. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ definieren wir die Permutation $\sigma_{ij} \in S_n$ als die Bijektion welche i und j vertauscht:

$$\sigma_{ij}(\nu) := \begin{cases} \nu, & \text{wenn } \nu \neq i \text{ und } \nu \neq j, \\ i, & \text{wenn } \nu = j, \\ j, & \text{wenn } \nu = i. \end{cases}$$

Eine solche Permutation nennt man **Transposition**. Beweisen Sie, dass jede Transposition Parität -1 hat und dass sich jede Permutation als Komposition von Transpositionen schreiben lässt.

2 Vektorräume

Definition. Ein **reeller Vektorraum** besteht aus einer abelschen Gruppe $(V, +, 0)$ und einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

(der **skalaren Multiplikation**) mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v, \quad 1 \cdot v = v.$$

(ii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$$

Die Elemente von V nennen wir **Vektoren**.

Bemerkung. Um Verwirrungen zu vermeiden kann es manchmal nützlich sein, für den Nullvektor in V ein anderes Symbol zu verwenden, zum Beispiel 0_V . Mit dieser Bezeichnungsweise gelten die Regeln

$$\lambda \cdot 0_V = 0_V, \quad 0 \cdot v = 0_V$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$. (Beweisen Sie diese Gleichungen!) Im allgemeinen bezeichnen wir den Nullvektor in V jedoch mit dem gleichen Symbol 0 wie die reelle Zahl Null. Wir werden im folgenden auch oft den Punkt “ \cdot ” weglassen und λv statt $\lambda \cdot v$ schreiben.

Definition. Seien V und W zwei Vektorräume. Eine Abbildung $T : V \rightarrow W$ heisst **linear** wenn sie die Gleichungen

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2, \quad T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot Tv$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, v_1, v_2 \in V$ erfüllt. Eine lineare Abbildung wird auch **Vektorraumhomomorphismus** genannt. Ein **Vektorraumisomorphismus** (oder einfach **Isomorphismus**) ist ein bijektiver Vektorraumhomomorphismus.

Übung. Ist $T : V \rightarrow W$ eine bijektive lineare Abbildung so ist $T^{-1} : W \rightarrow V$ ebenfalls linear.

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine endliche Folge v_1, \dots, v_n von Vektoren in V heisst **linear unabhängig** wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Den Ausdruck $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ nennen wir eine **Linearkombination** der Vektoren v_1, \dots, v_n . Wir nennen die Vektoren v_1, \dots, v_n ein (**endliches**) **Erzeugendensystem** von V wenn sich jeder Vektor in V als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt, das heisst

$$\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Eine **endliche Basis** von V ist ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem v_1, \dots, v_n . Ein reeller Vektorraum V heisst **endlichdimensional** wenn er eine endliche Basis besitzt und **unendlichdimensional** wenn er keine endliche Basis besitzt.

Bemerkung. Man kann den Begriff einer Basis auch auf unendliche Systeme $\{v_i\}_{i \in I}$ von Vektoren in V erweitern. Hier ist I eine (möglicherweise unendliche) Menge und $I \rightarrow V : i \mapsto v_i$ eine Abbildung. Ein solches System heisst **linear unabhängig** wenn je endlich viele Vektoren v_{i_1}, \dots, v_{i_N} (mit $i_1, \dots, i_N \in I$ paarweise verschieden) linear unabhängig sind. Es heisst **Erzeugendensystem** wenn sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination endlich vieler v_i darstellen lässt. Eine **Basis** ist nun ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Mit diesem verallgemeinerten Begriff lässt sich zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. (Der Beweis beruht auf dem sogenannten *Zorn'schen Lemma* welches sich wiederum aus dem *Auswahlaxiom* herleiten lässt.) Wir werden uns hier jedoch nur für endliche Basen interessieren. (Unendlichdimensionale Vektorräume spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, nicht aber ihre Basen.)

Beispiel. Der Raum \mathbb{R}^n aller n -Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ reeller Zahlen ist ein Vektorraum. Die Vektoren $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (mit 1 an der i ten Stelle) bilden eine Basis von \mathbb{R}^n , welche die **Standardbasis** genannt wird. Ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die Form

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Bemerkung. Sei V ein reeller Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist die durch

$$Tx := \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ linear. Die Abbildung T ist genau dann injektiv wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind; sie ist genau dann surjektiv wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n ein Erzeugendensystem von V bilden. Also ist T genau dann ein Vektorraumisomorphismus wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n eine Basis von V bilden. Jeder Vektorraumisomorphismus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ hat diese Form mit $v_i := T e_i$.

Satz 2. Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis e_1, \dots, e_n . Dann gilt folgendes.

- (i) Ist v_1, \dots, v_m eine Basis von V so gilt $m = n$.
- (ii) Sind die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ linear unabhängig so gilt $m \leq n$.
- (iii) Bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ ein Erzeugendensystem so gilt $m \geq n$.

Die Zahl n heisst **Dimension** von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Beweis. Nach der vorherigen Bemerkung bestimmt die Basis e_1, \dots, e_n von V einen Isomorphismus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$. Daher genügt es die Behauptungen für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis e_1, \dots, e_n zu beweisen.

Schritt 1. Bilden die Vektoren v_1, \dots, v_m eine Basis des \mathbb{R}^n so ist $m = n$.

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus den folgenden elementaren Fakten.

- (a) Jede von Null verschiedene reelle Zahl bildet eine Basis von \mathbb{R} .
- (b) Jedes System von mehr als einem Element von \mathbb{R} ist linear abhängig.

Sei nun $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass das Resultat für den \mathbb{R}^{n-1} gilt und dass die Vektoren v_1, \dots, v_m eine Basis des \mathbb{R}^n bilden. Wir schreiben $v_\nu = (v_{\nu 1}, \dots, v_{\nu n})$ für $\nu = 1, \dots, m$. Da der Vektor e_n sich als Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_m schreiben lässt, gibt es mindestens ein $\nu \in \{1, \dots, m\}$ so dass $v_{\nu n} \neq 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen dass dies $\nu = m$ ist. Sei

$$w_\nu := v_\nu - \frac{v_{\nu n}}{v_{mn}} v_m, \quad \nu = 1, \dots, m-1.$$

Dann bilden die Vektoren w_1, \dots, w_{m-1}, v_m eine Basis des \mathbb{R}^n und es gilt $w_{\nu n} = 0$ ist für $\nu = 1, \dots, m-1$. Es folgt dass die Vektoren w_1, \dots, w_{m-1} (nach Fortlassen der letzten Koordinate) eine Basis des \mathbb{R}^{n-1} bilden. Nach Induktionsannahme gilt also $m-1 = n-1$ und daher $m = n$.

Schritt 2. Sind die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig so gilt $m \leq n$.

Wir können aus den Vektoren v_1, \dots, v_m durch hinzufügen von höchstens n weiteren Vektoren e_{i_1}, \dots, e_{i_k} (die wir aus den Elementen der Standardbasis auswählen) eine Basis $v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ bilden. (Dies folgt durch Induktion: Wenn die Vektoren v_1, \dots, v_m keine Basis bilden, so gibt es einen Index $i_1 \in \{1, \dots, n\}$, so dass die Vektoren v_1, \dots, v_m, e_{i_1} linear unabhängig sind. Wenn diese Vektoren immer noch keine Basis bilden, können wir weitere Elemente der Standardbasis hinzufügen ohne die lineare Unabhängigkeit zu verletzen.) Die neue Basis besteht aus $m+k$ Elementen mit $k \geq 0$. Es gilt daher $m+k = n$, nach Schritt 1, und deshalb $m \leq n$.

Schritt 3. Bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem so gilt $m \geq n$.

Wir erhalten eine Basis des \mathbb{R}^n durch fortlassen von geeigneten Vektoren. Die resultierende Basis hat dann höchstens m Elemente. Also folgt die Behauptung aus Schritt 1. \square

3 Die Determinante

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\varphi : V^n = V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **multilinear** wenn φ in jeder Variablen linear ist, das heißt es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + w_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &= \varphi(v_1, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

und

$$\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \varphi(v_1, \dots, v_n)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_1, \dots, v_n \in V$, $w_i \in V$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall $n = 2$ nennen wir eine solche Abbildung **bilinear**. Im Allgemeinen nennen wir eine multilineare Abbildung $\varphi : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ auch **n -linear**.

Bemerkung. Der Raum V^n ist selbst ein Vektorraum. Es macht also auch Sinn, von linearen Abbildungen $\varphi : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu sprechen. Dies ist aber etwas völlig anderes als eine multilineare Abbildung. Betrachten wir zum Beispiel den Fall $V = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$ bilinear, aber nicht linear. Hingegen ist die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x+y$ linear, aber nicht bilinear. (Ist $\varphi : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine multilineare Abbildung so gilt $\varphi(v_1, \dots, v_n) = 0$ wenn auch nur einer der Vektoren v_1, \dots, v_n gleich Null ist.)

Übung. Sei V ein reeller Vektorraum und $\varphi : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ sowohl linear als auch multilinear. Ist $n \geq 2$, so ist $\varphi \equiv 0$.

Satz 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine n -lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ und je n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\varphi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

(ii) Ist e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n so gilt

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz der Abbildung φ . Für

$$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (3)$$

wobei $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ die durch (1) und (2) definierte Parität der Permutation σ ist. Diese Abbildung hat die gewünschten Eigenschaften. Ist $a_i = e_i$ so gilt

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und damit ist der einzige von Null verschiedene Summand auf der rechten Seite von (3) der zur Permutation $\sigma = \text{id}$ gehörige und damit gilt (ii). Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\tau(i)\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(\tau^{-1}(j))} \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma \circ \tau^{-1}(j)} \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)} \\ &= \varepsilon(\tau) \varphi(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

für $\tau \in S_n$ und $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$. Also erfüllt φ auch Bedingung (i).

Wir beweisen die Eindeutigkeit von φ . Sind φ und φ' zwei n -lineare Abbildungen auf dem \mathbb{R}^n die beide die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen, so ist ihre Differenz

$$\psi := \varphi - \varphi'$$

wiederum eine n -lineare Abbildung auf dem \mathbb{R}^n , die die Bedingungen (i) und

$$\psi(e_1, \dots, e_n) = 0$$

erfüllt. Seien $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \in \mathbb{R}^n$ gegeben für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(a_1, \dots, a_n) &= \psi \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} e_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \psi(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Gleichung $\psi(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ für alle j_1, \dots, j_n . Also ist $\psi \equiv 0$ und damit $\varphi \equiv \varphi'$. \square

Definition. Eine n -lineare Abbildung $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$, heißt **alternierende n -Form** (auf V) wenn sie der Bedingung (i) in Satz 3 genügt. Es gibt also auf dem \mathbb{R}^n genau eine alternierende n -form $\varphi : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die zusätzlich Bedingung (ii) erfüllt; diese heißt **Determinante** und wird mit \det bezeichnet.

Betrachten wir die n Vektoren $a_i =: (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \dots, n$ als Zeilen einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so können wir die Determinante auch als Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Raum der quadratischen Matrizen auffassen.

Beispiele. Ist $n = 1$ so ist $\mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$ und $\det : \mathbb{R}^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ is die Identität. Für $n = 2$ haben wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Für $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Eigenschaften der Determinante zusammen.

Satz 4. (i) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad \det(\mathbb{1}) = 1.$$

(iii) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C).$$

Beweis. Wir beweisen (i). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^n$ die transponierte Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

Hier folgt die vorletzte Gleichung aus der Umbenennung $\tau := \sigma^{-1}$ und der Tatsache daß $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ ist. Damit haben wir (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Seien $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ zwei Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Den durch die Einträge der j ten Zeile der Matrix B definierten Vektor bezeichnen wir mit $b_j := (b_{j1}, \dots, b_{jn}) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt nach (3)

$$\det(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) b_{j_1 \tau(1)} \cdots b_{j_n \tau(n)}$$

für $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$. Nach Definition der Determinante verschwindet¹ dieser Ausdruck sobald zwei der Indizes j_i übereinstimmen. (Siehe Bedingung (i) in Satz 3.) Damit erfüllen A und B die Gleichung

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1 \tau(1)} \right) \cdots \left(\sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} b_{j_n \tau(n)} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1j_1} b_{j_1 \tau(1)} \cdots a_{nj_n} b_{j_n \tau(n)} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) b_{j_1 \tau(1)} \cdots b_{j_n \tau(n)} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det(b_1, \dots, b_n) \\ &= \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Tatsache, daß in der vierten Zeile nur diejenigen Summanden von Null verschieden sein können für die die Indizes j_1, \dots, j_n paarweise verschieden sind. In diesem Fall definieren die Indizes eine Permutation $\sigma \in S_n$ durch die Formel $\sigma(i) := j_i$ für $i = 1, \dots, n$. Damit haben wir (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Jeder Summand in der Formel (3) für $\det(A)$ enthält genau einen Faktor aus jeder Zeile und aus jeder Spalte von A . Im Fall der Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

heißt dies daß jeder Summand, der einen Faktor aus dem oberen rechten Block B enthält auch einen Faktor aus dem unteren linken Block enthalten muß und damit verschwindet. Ander gesagt: jede Permutation $\rho \in S_{n+m}$ die ein Element $i \in \{1, \dots, n\}$ in ein Element $\rho(i) \in \{n+1, \dots, n+m\}$ abbildet muß auch ein Element $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$ in ein Element $\rho(j) \in \{1, \dots, n\}$ abbilden. Damit brauchen wir nur Permutationen $\rho \in S_{n+m}$ zu betrachten die die beiden

¹Wir sagen eine reelle Zahl "verschwindet" wenn sie gleich Null ist.

Teilmengen $\{1, \dots, n\}$ und $\{n+1, \dots, n+m\}$ auf sich selbst abbilden. Jede solche Permutation hat die Form $\rho = \sigma \# \tau$ für $\sigma \in S_n$ und $\tau \in S_m$, wobei

$$\sigma \# \tau(i) := \sigma(i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

und

$$\sigma \# \tau(n+j) = n + \tau(j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Diese Permutation hat die Parität

$$\varepsilon(\sigma \# \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Hieraus folgt sofort die dritte Aussage des Satzes, der damit bewiesen ist. \square

Übung. Die Determinante ist durch die Eigenschaften (ii) und (iii) von Satz 4 eindeutig bestimmt.

Satz 5. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $Ax = 0 \implies x = 0$.

(iii) Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ so daß $Ax = y$.

Beweis. Nach Satz 2 ist ein System von n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ genau dann linear unabhängig wenn es ein Erzeugendensystem vom \mathbb{R}^n ist. Angewandt auf die n Spalten der Matrix A heißt dies, daß (ii) äquivalent zu (iii) ist. Es bleibt also zu zeigen, daß (i) äquivalent zu (ii) ist.

“(i) \implies (ii)”. Wir argumentieren indirekt und nehmen an daß es einen von Null verschiedenen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt so daß $Ax = 0$ ist. Bezeichnen wir die Spalten der Matrix A mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, so heißt dies

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0.$$

Da x ungleich Null ist, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ so daß $x_i \neq 0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $x_1 \neq 0$ ist. Nach Satz 4 (i) gilt dann

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(a_1, \dots, a_n) \\ &= \frac{1}{x_1} \det(x_1 a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \frac{1}{x_1} \det\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, a_2, \dots, a_n\right) \\ &= \frac{1}{x_1} \det(0, a_2, \dots, a_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

“(ii) \implies (i)”. Wenn die Matrix A Bedingung (ii) erfüllt so sind die Spalten a_1, \dots, a_n von A linear unabhängig und bilden damit, nach Satz 2, eine Basis. Hieraus folgt, daß die Abbildung $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die durch

$$T_A(x) := Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, eine bijektive lineare Abbildung ist. Sei $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Umkehrabbildung, d.h.

$$T_A \circ S = S \circ T_A = \text{id}.$$

Dann ist S wiederum eine lineare Abbildung. Also gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so daß $S = T_B$ ist. Hieraus folgt

$$AB = BA = \mathbb{1} \tag{4}$$

und daher, nach Satz 4 (ii), $\det(A) \det(B) = 1$. Also ist $\det(A) \neq 0$. \square

Definition. Der Beweis von Satz 5 zeigt daß es zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, welche die Gleichung (4) erfüllt. Diese Matrix ist durch A eindeutig bestimmt; sie heißt **Inverse**, bzw **inverse Matrix**, von A und wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Bemerkung. Alle Definitionen und Resultate dieses Kapitels gelten unverändert und mit denselben Beweisen für komplexe Matrizen. Es genügt, überall \mathbb{R} durch \mathbb{C} zu ersetzen.

Definition. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn es einen komplexen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ gibt so daß

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Nach Satz 5 ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von A wenn gilt

$$p_A(\lambda) = 0, \quad p_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{1} - A).$$

Das Polynom p_A heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix A .

Übung. Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat den Grad n .
Hinweis: Gleichung (3) für die Determinante.

Übung. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .

Korollar 6. Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist das Produkt ihrer Eigenwerte mit Multiplizität, das heißt, wenn das charakteristische Polynom in der Form

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ geschrieben wird, so gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Gleichung $\det(A) = (-1)^n p_A(0)$. \square

4 Die lineare Gruppe

Die Gruppe der invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen heißt **lineare Gruppe** und wird mit

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$$

bezeichnet. Daß dies eine Gruppe ist folgt aus Satz 4 und Satz 5. Die Gruppenoperation ist Matrix-Multiplikation und das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kann mit der Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifiziert werden; solche Abbildungen werden auch **Automorphismen** des \mathbb{R}^n genannt. Die Korrespondenz ordnet jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ den durch $T_A(x) := Ax$ definierten Automorphismus $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu. Insbesondere zeigt Satz 5, daß die lineare Abbildung $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann bijektiv ist wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Nach Satz 4, ist die Teilmenge

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Daher sind $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n \times n}$ (dies sind die Urbilder der offenen Mengen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(0, \infty)$ unter der stetigen Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$). Die Restriktion von \det auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ definiert einen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf die von Null verschiedenen reellen Zahlen (siehe Beispiel 2 in Kapitel 1).

Satz 7. Die Gruppe $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ ist zusammenhängend.

Der hier gegebene Beweis beruht auf den folgenden drei Lemmata. Er geht auf Thomas Honold zurück und ist direkt aus [2, Seite 36] übernommen.

Lemma 8. Für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gibt es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, eine natürliche Zahl $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$, eine Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\ell, \mathbb{R}), \quad \lambda_i < 0,$$

und eine Matrix $U \in \mathrm{GL}^+(n - \ell, \mathbb{R})$ ohne negative Eigenwerte, so daß

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma durch vollständige Induktion über n . Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr mit $P = 1$ und entweder $\ell = 0, U = A$ (im Falle $A > 0$) oder $\ell = 1, \Lambda = A$ (im Falle $A < 0$).

Sei nun $n > 1$ und nehmen wir an, die Behauptung sei für alle Matrizen in $\mathrm{GL}(n - 1, \mathbb{R})$ bewiesen. Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gegeben. Hat A keine negativen

Eigenwerte, so gilt die Behauptung mit $P := \mathbb{1}$, $\ell := 0$, und $U := A$. Hat A einen negativen Eigenwert $\lambda < 0$ so gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ so daß

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irgendeine invertierbare Matrix deren erste Spalte gleich v ist. Dann gibt es eine Matrix $A_0 \in \text{GL}(n-1, \mathbb{R})$ so daß

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Nach Induktionsannahme gibt es Matrizen $P_0 \in \text{GL}(n-1, \mathbb{R})$ und Λ_0, U_0 wie in der Behauptung so daß

$$P_0^{-1}A_0P_0 = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & * \\ 0 & U_0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt die Behauptung für A mit

$$P := Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad U := U_0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 9. Für jede Matrix $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ gibt es zwei Matrizen $B, C \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ welche keine negativen Eigenwerte haben so daß $A = B^2C$ ist.

Beweis. Seien $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Lambda \in \text{GL}(\ell, \mathbb{R})$, und $U \in \text{GL}(n-\ell, \mathbb{R})$ wie in Lemma 8. Nach Satz 4 gilt

$$\det(A) = \det(\Lambda) \det(U) = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell \det(U).$$

Da U keine negativen Eigenwerte hat ist $\det(U) > 0$. Da $\det(A) > 0$ ist, ist also $\ell = 2k$ eine gerade Zahl. Wir definieren

$$S := \begin{pmatrix} H & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat keine negativen Eigenwerte (die Eigenwerte sind $\pm i$ und 1). Ausserdem gilt

$$S^{-2} = S^2 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2k} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix}$$

und damit

$$T := S^{-2}P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2k} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat ebenfalls keine negativen Eigenwerte. Also gilt

$$A = P(S^2T)P^{-1} = B^2C,$$

wobei die Matrizen

$$B := PSP^{-1}, \quad C := PTP^{-1}$$

keine negativen Eigenwerte haben. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 10. *Ist $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ eine Matrix ohne negative Eigenwerte, so gilt*

$$\det((1-t)\mathbb{1} + tA) > 0$$

für alle $t \in [0, 1]$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := \det((1-t)\mathbb{1} + tA).$$

Diese Funktion ist stetig und es gilt $f(0) > 0$ und $f(1) > 0$. Die Behauptung des Lemmas sagt daß $f(t) > 0$ ist für alle $t \in [0, 1]$. Wenn dies nicht gilt, gibt es eine Zahl $t \in [0, 1]$ mit $f(t) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz, gibt es dann auch eine Zahl $t_0 \in [0, 1]$ mit $f(t_0) = 0$. Diese Zahl kann nicht 0 oder 1 sein. Dann ist aber die Zahl

$$\lambda := -\frac{1-t_0}{t_0}$$

ein negativer Eigenwert von A , im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Dieser Widerspruch beweist das Lemma. \square

Beweis von Satz 7. Sei $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ und wähle $B, C \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ wie in Lemma 9. Für $t \in [0, 1]$ definiere

$$A_t := ((1-t)\mathbb{1} + tB)^2((1-t)\mathbb{1} + tC).$$

Dann gilt $A_0 = \mathbb{1}$ und $A_1 = A$. Da die Matrizen B und C keine negativen Eigenwerte haben, folgt aus Lemma 10 daß

$$\det(A_t) = \det((1-t)\mathbb{1} + tB)^2 \det((1-t)\mathbb{1} + tC) > 0$$

für alle $t \in [0, 1]$. Also ist die Abbildung $[0, 1] \rightarrow \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) : t \mapsto A_t$ ein stetiger Weg der die Matrizen $\mathbb{1}$ und A miteinander verbindet. Damit ist $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ weg-zusammenhängend, und also auch zusammenhängend. \square

Übung. Die Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ hat zwei Zusammenhangskomponenten. Eine davon ist $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Übung. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt die Gleichung $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$.

A Zusammenhängende Räume

Topologische Begriffe. Sei (X, d) ein **metrischer Raum**, d.h. X ist eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

- (i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Funktion d heißt **Abstandsfunktion**. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen** wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt so daß $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$. Offene Mengen haben folgende Eigenschaften.

- (i) Die leere Menge und der ganze Raum X sind offene Teilmengen von X .
- (ii) Sind U_1, \dots, U_n offene Teilmengen von X so ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
- (iii) Ist I eine Menge und $U_i \subset X$ eine offene Teilmenge für jedes $i \in I$ so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X **konvergiert** gegen $x \in X$ wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X und jedes $x \in X$ folgendes gilt: ist $x_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert x_n gegen x , so ist $x \in A$. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann wenn ihr Komplement $U := X \setminus A$ abgeschlossen ist. Abgeschlossene Mengen haben folgende Eigenschaften.

- (i) Die leere Menge und der ganze Raum X sind abgeschlossene Teilmengen von X .
- (ii) Sind A_1, \dots, A_n abgeschlossene Teilmengen von X so ist auch $\bigcup_{i=1}^n A_i$ abgeschlossen.
- (iii) Ist I eine Menge und $A_i \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge für jedes $i \in I$ so ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig** wenn es für jedes $x_0 \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so daß für alle $x \in X$ gilt: $d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist stetig.
- (ii) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X die gegen $x \in X$ konvergiert, so konvergiert auch $f(x_n)$ gegen $f(x) \in Y$.
- (iii) Ist V eine offene Teilmenge von Y so ist $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ eine offene Teilmenge von X .

Die Relativtopologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die Restriktion der Abstandsfunktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf $Y \times Y$ wieder eine Abstandsfunktion, und wir bezeichnen sie mit

$$d_Y := d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die durch d_Y induzierte Topologie auf Y wird auch die **Relativtopologie** auf Y genannt. Eine Teilmenge $V \subset Y$ heißt **Y -offen** wenn sie bezüglich der Relativtopologie offen ist. Eine Teilmenge $B \subset Y$ heißt **Y -abgeschlossen** wenn sie bezüglich der Relativtopologie abgeschlossen ist. Das folgende Lemma charakterisiert die Y -offenen und Y -abgeschlossenen Teilmengen von Y mit Hilfe der offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X .

Lemma 11. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge.*

(i) *Eine Teilmenge $V \subset Y$ ist genau dann Y -offen wenn es eine offenen Teilmenge $U \subset X$ gibt so daß $V = U \cap Y$ ist.*

(ii) *Eine Teilmenge $B \subset Y$ ist genau dann Y -abgeschlossen wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ gibt so daß $B = A \cap Y$ ist.*

Proof. Wir beweisen (i). Ist $V \subset Y$ offen bezüglich d_Y so gibt es für jedes $y \in V$ ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$B_\varepsilon(y; Y) := \{x \in Y \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset V.$$

Nach dem Auswahlaxiom gibt es also eine Abbildung

$$V \rightarrow (0, \infty) : y \mapsto \varepsilon(y)$$

mit $B_{\varepsilon(y)}(y; Y) \subset V$ für jedes $y \in V$. Damit ist die Menge

$$U := \bigcup_{y \in V} B_{\varepsilon(y)}(y; X)$$

offen in X und es gilt

$$U \cap Y = \bigcup_{y \in V} (B_{\varepsilon(y)}(y; X) \cap Y) = \bigcup_{y \in V} B_{\varepsilon(y)}(y; Y) = V.$$

Gibt es andererseits eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $U \cap Y = V$ und ist $y \in V$, so ist auch $y \in U$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y; X) \subset U$, und daher gilt $B_\varepsilon(y; Y) = B_\varepsilon(y; X) \cap Y \subset U \cap Y = V$. Also ist V offen bezüglich d_Y . Damit haben wir (i) bewiesen.

Um (ii) zu zeigen nehmen wir zunächst an, daß $B \subset Y$ abgeschlossen ist bezüglich d_Y . Dann ist $V := Y \setminus B$ offen bezüglich d_Y . Nach (i) gibt es also eine offene Menge $U \subset X$ so dass $U \cap Y = V$. Damit ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen und es gilt $A \cap Y = (X \setminus U) \cap Y = Y \setminus (U \cap Y) = Y \setminus V = B$. Ist andererseits $A \subset X$ abgeschlossen und $B := A \cap Y$, so ist $X \setminus A$ offen. Nach (i) ist daher $(X \setminus A) \cap Y = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus B$ offen bezüglich d_Y , und folglich ist B abgeschlossen bezüglich d_Y . Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Ist $Y := [0, 1]$ so ist $[0, b)$ für $0 < b \leq 1$ eine Y -offene Teilmenge von Y . Hingegen ist eine Teilmenge $B \subset Y$ genau dann Y -abgeschlossen wenn sie abgeschlossen ist (da Y selbst eine abgeschlossene Teilmenge von X ist).

(ii) Ist $Y := (0, 1)$ so ist $(0, b]$ für $0 < b < 1$ eine Y -abgeschlossene Teilmenge von Y . Hingegen ist eine Teilmenge $V \subset Y$ genau dann Y -offen wenn sie offen ist (da Y selbst eine offene Teilmenge von X ist).

Der Zusammenhangsbegriff

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **zusammenhängend** wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen darstellen lässt, d.h. wenn für je zwei offene Teilmengen $U, V \subset X$ folgendes gilt:

$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \emptyset \quad \implies \quad U = \emptyset \quad \text{oder} \quad V = \emptyset;$$

das heißt, daß die leere Menge und der ganze Raum die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **zusammenhängend**, wenn sie bezüglich der induzierten Metrik d_Y zusammenhängend ist. Nach Lemma 11 heißt das, daß für je zwei offene Teilmengen $U, V \subset X$ folgendes gilt:

$$A \subset U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset \quad \implies \quad A \cap U = \emptyset \quad \text{oder} \quad A \cap V = \emptyset.$$

Satz 12. Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend wenn sie ein Intervall ist.

Beweis. Ist $I \subset \mathbb{R}$ kein Intervall, so gibt es drei reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a, b \in I, \quad c \notin I, \quad a < c < b.$$

Definieren wir $U := \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$ so sind dies offene Mengen mit $I \subset U \cup V$, $I \cap U \neq \emptyset$, $I \cap V \neq \emptyset$. Also ist I nicht zusammenhängend.

Nehmen wir andererseits an, I sei ein Intervall und $A \subset I$ sei eine Teilmenge die sowohl offen als auch abgeschlossen ist (bezüglich der Metrik d_I) und die weder leer noch gleich dem gesamten Intervall I ist. Dann ist auch $B := I \setminus A$ nicht leer und wir wählen $a \in A$ und $b \in B$. Wir nehmen o.B.d.A. an daß $a < b$ ist und definieren

$$c := \sup(A \cap [a, b]).$$

Dann gilt $c \in [a, b] \subset I$ und es gibt eine Folge $a_k \in A$ mit $a_k \leq c$ die gegen c konvergiert. Da A abgeschlossen bezüglich d_I ist, folgt hieraus daß $c \in A$ und damit $c < b$ ist. Damit ist das halboffene Intervall $(c, b]$ in B enthalten. Also gilt $c + 1/n \in B$ für jede hinreichend große natürliche Zahl n und damit $c = \lim_{n \rightarrow \infty} (c + 1/n) \in B$, da auch B abgeschlossen bezüglich d_I ist. Wir haben daher gezeigt, daß c sowohl ein Element von A als auch ein Element von B ist, im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Satz 13. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung; ist $A \subset X$ zusammenhängend so ist auch $f(A) \subset Y$ zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset Y$ zwei offene Mengen so daß

$$f(A) \subset U \cup V, \quad f(A) \cap U \cap V = \emptyset.$$

Zu zeigen ist, daß mindestens eine der Mengen $f(A) \cap U$ oder $f(A) \cap V$ leer ist.

Da f stetig ist, sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offenen Teilmengen von X . Diese Teilmengen haben folgende Eigenschaften:

$$A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), \quad A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset.$$

(Ist $a \in A$ so gilt $f(a) \in U$ oder $f(a) \in V$; im ersten Fall gilt $a \in f^{-1}(U)$ und im zweiten Fall gilt $a \in f^{-1}(V)$. Dies beweist die erste Inklusion. Die zweite zeigt man am besten indirekt: Gibt es ein Element $a \in A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ so gilt $f(a) \in f(A) \cap U \cap V$, im Widerspruch zu unserer Annahme über U und V .) Da A zusammenhängend ist, folgt hieraus daß mindestens eine der Mengen $A \cap f^{-1}(U)$ oder $A \cap f^{-1}(V)$ leer ist. Wenn aber $A \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ ist, so heißt das kein Element von A wird unter f auf U abgebildet und damit ist auch $f(A) \cap U = \emptyset$; ebenso mit V statt U . Damit ist mindestens eine der Mengen $f(A) \cap U$ oder $f(A) \cap V$ die leere Menge, wie behauptet. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Korollar 14. (Zwischenwertsatz) Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $x, y \in X$ und $c \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) < c < f(y).$$

Dann gibt es ein Element $z \in X$ mit $f(z) = c$.

Beweis. Da X zusammenhängend ist, folgt aus Satz 13 dass auch $f(X)$ zusammenhängend ist. Nach Satz 12 ist also $f(X)$ ein Intervall. Da $f(x), f(y) \in f(X)$ sind folgt aus der Definition eines Intervalls daß $c \in f(X)$ ist. Damit ist das Korollar bewiesen. \square

Weg-zusammenhängende Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **weg-zusammenhängend** wenn es für je zwei Elemente $x_0, x_1 \in A$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ gibt so daß $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ ist.

Lemma 15. (i) Jede weg-zusammenhängende Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) ist zusammenhängend.

(ii) Jede offene zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n (mit der euklidischen Metrik) ist weg-zusammenhängend.

Beweis. Wir beweisen (i). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine weg-zusammenhängende Teilmenge. Ist $A = \emptyset$ so ist nichts zu beweisen. Sei also $A \neq \emptyset$ und seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen so daß

$$A \subset U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Dann gilt entweder $A \cap U \neq \emptyset$ oder $A \cap V \neq \emptyset$. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß $A \cap U \neq \emptyset$ und wählen ein Element $x_0 \in A \cap U$. Sei $x \in A$. Da A weg-zusammenhängend ist gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ so daß $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$ ist. Das (zusammenhängende) Intervall $I := [0, 1]$ ist nun die disjunkte Vereinigung der beiden offenen Teilmengen

$$I_U := \gamma^{-1}(U) = \{t \in I \mid \gamma(t) \in U\}, \quad I_V := \gamma^{-1}(V) = \{t \in I \mid \gamma(t) \in V\}.$$

Also gilt entweder $I_U = \emptyset$ oder $I_V = \emptyset$. Da $0 \in I_U$ ist, folgt hieraus $I_V = \emptyset$ und damit $I_U = I$. Also gilt $x = \gamma(1) \in U$. Da $x \in A$ beliebig gewählt war, haben wir bewiesen, daß $A \subset U$ und daher $A \cap V = \emptyset$ ist. Dies zeigt, daß A zusammenhängend ist.

Wir beweisen (ii). Sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ eine weg-zusammenhängende offene Teilmenge. Für jedes $x \in U$ definieren wir $U_x \subset U$ als die Menge aller Punkte $y \in U$, die sich mit x durch einen stetigen Weg in U verbinden lassen:

$$U_x := \{y \in U \mid \exists \gamma \in C^0([0, 1], U) \text{ so daß } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y\}.$$

Wir zeigen, daß U_x für jedes $x \in U$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Sei $y \in U_x$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so daß $B_\varepsilon(y) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - y\| < \varepsilon\} \subset U$ ist. Da $y \in U_x$ ist, gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ so daß

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y.$$

Für $z \in B_\varepsilon(y)$ definieren wir die Abbildung $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\gamma_z(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (2-2t)y + (2t-1)z, & \text{für } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, da $\gamma(1) = y$ ist; sie nimmt Werte in U an, da $B_\varepsilon(y) \subset U$ gilt; und sie erfüllt $\gamma_z(0) = x$ und $\gamma_z(1) = z$. Damit ist $z \in U_x$ für jedes $z \in B_\varepsilon(y)$. Also haben wir gezeigt, daß es für jedes $y \in U_x$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(y) \subset U_x$. Also ist U_x eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n für jedes $x \in U$. Andererseits gilt für alle $x, y \in U$:

$$U_x \cap U_y \neq \emptyset \quad \implies \quad U_x = U_y.$$

(Übung!) Hieraus wiederum folgt, daß $U_x = U$ ist für jedes $x \in U$; andernfalls gäbe es ein $x \in U$, so daß $U \setminus U_x \neq \emptyset$; damit wären dann U_x und $\bigcup_{y \in U \setminus U_x} U_y$ zwei disjunkte offene Teilmengen von \mathbb{R}^n deren Vereinigung U ist; dies aber widerspräche unserer Annahme daß U zusammenhängend ist. Also haben wir gezeigt daß $U_x = U$ ist für jedes $x \in U$. Dies heißt aber, daß U weg-zusammenhängend ist, wie behauptet. \square

Zusammenhangskomponenten

Lemma 16. Sei (X, d) ein metrischer Raum, I eine Menge, und $A_i \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge für jedes $i \in I$. Ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ so ist $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen so daß

$$A \subset U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Sei $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Dann gilt entweder $x_0 \in U$ oder $x_0 \in V$. Nehmen wir an $x_0 \in U$ und sei $i \in I$. Da $A_i \subset U \cup V$ und $A_i \cap U \cap V = \emptyset$ und A_i zusammenhängend ist, gilt entweder $A_i \cap U = \emptyset$ oder $A_i \cap V = \emptyset$. Da $x_0 \in A_i \cap U$ folgt hieraus $A_i \cap V = \emptyset$ und damit $A_i \subset U$. Also gilt $A_i \subset U$ für jedes $i \in I$ und damit $A \subset U$ und $A \cap V = \emptyset$. Daher ist A zusammenhängend. \square

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren auf X folgende Äquivalenzrelation: zwei Elemente $x, y \in X$ heißen **äquivalent** (Notation $x \sim y$) wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $A \subset X$ gibt mit $x, y \in A$. Nach Lemma 16 ist dies in der Tat eine Äquivalenzrelation. Darüber hinaus folgt aus Lemma 16, daß die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation zusammenhängend sind; wir nennen sie die **Zusammenhangskomponenten** von X . Ist $x_0 \in X$ so heißt nennen wir die Teilmenge

$$A_0 := \{x \in X \mid x \sim x_0\}$$

die **Zusammenhangskomponente** von x_0 ; dies ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X die x_0 enthält.

Beispiele

Beispiel 1. Sei $X := \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge. Diese Teilmenge ist weg-zusammenhängend, denn für $x_0, x_1 \in K$ definiert $\gamma(t) := (1-t)x_0 + tx_1$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Also ist K nach Lemma 15 zusammenhängend.

Beispiel 2. Sei $X := \mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Dann besteht jede Zusammenhangskomponente nur aus einem einzigen Element. Einen solchen Raum nennt man auch **total unzusammenhängend**.

Beispiel 3. Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik

$$d(x, y) := \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Dieser Raum ist zusammenhängend. Das Komplement $Y := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des Nullvektors ist zusammenhängend für $n \geq 2$ und hat zwei Zusammenhangskomponenten für $n = 1$. (Es ist die leere Menge für $n = 0$.)

Beispiel 4. Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik wie in Beispiel 2. Die Einheitskugel

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

ist zusammenhängend. Ihr Komplement

$$Y := \mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$$

hat zwei Zusammenhangskomponenten falls $n > 1$, und drei für $n = 1$. (Übung mit Hinweis: verwenden Sie den Begriff “weg-zusammenhängend”.)

Beispiel 5. Die Menge

$$A := \{(x, y) \mid x > 0, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 , ist aber nicht weg-zusammenhängend.

Beispiel 6. Nach Satz 7 ist die Gruppe $GL^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\}$ für jede natürliche Zahl n zusammenhängend. Hieraus folgt, dass die Menge der $n \times n$ -Matrizen mit negativer Determinante ebenfalls zusammenhängend ist. Daher hat die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

References

- [1] C. Blatter, *Analysis Zwei*, ETHZ, Sommersemester 2004.
- [2] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.
- [3] D. Salamon, *Analysis I*, Vorlesung an der ETHZ im Wintersemester 2004/2005.