Analysis I: Kompakte metrische Räume und der Satz von Arzéla–Ascoli WS 2008

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

3. November 2008

1 Kompakte metrische Räume

Definition. Sei X eine Menge. Eine **Überdeckung** von X ist eine, durch eine Menge I indizierte, Ansammlung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subset X$ so daß die Vereinigung dieser Teilmengen der gesamte Raum X ist:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X.$$

Man kann eine Überdeckung auch als eine Menge $\mathcal{U} \subset 2^X$ von Teilmengen von X beschreiben mit der Eigenschaft, daß deren Vereinigung ganz X ist:

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X.$$

Die Beziehung zwischen diesen beiden Formulierungen desselben Phänomens ist, daß eine Teilmenge $U \subset X$ genau dann ein Element von $\mathcal{U}$ ist wenn es ein $i \in I$ gibt so daß $U_i = U$. Wenn die indizierten Mengen U_i paarweise verschieden sind (d.h. $U_i \neq U_j$ für $i \neq j$), so ist die Abbildung $I \to \mathcal{U} : i \mapsto U_i$ bijektiv.

Eine Überdeckung $\mathcal{U}$ (bzw $\{U_i\}_{i\in I}$) heißt **endlich**, wenn die Menge $\mathcal{U}$ (bzw die Indexmenge I) endlich ist.

Eine **Teilüberdeckung** von $\mathcal{U}$ (bzw $\{U_i\}_{i\in I}$) ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}$ die immer noch eine Überdeckung ist (bzw eine Teilmenge $J \subset I$ so daß die Ansammlung $\{U_i\}_{i\in J}$ immer noch eine Überdeckung ist).

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist eine **offene Überdeckung** von X eine Überdeckung, die nur aus offenen Mengen besteht; im Fall $\{U_i\}_{i\in I}$ heißt das, daß die Menge U_i für jedes $i \in I$ offen in (X, d) ist.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **total beschränkt**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_m \in X$ gibt so daß

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(\xi_i) = X.$$

Hier bezeichnen wir mit $B_\varepsilon(\xi) := \{x \in X \mid d(x, \xi) < \varepsilon\}$ den *offenen Ball in* (X, d) *vom Radius* ε *mit Mittelpunkt* ξ. (Insbesodere ist die leere Menge total beschränkt.)

Satz 1. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Jede Folge in* (X, d) *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(ii) *Jede offene Überdeckung von* (X, d) *besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(iii) (X, d) *ist vollständig und total beschränkt.*

Beweis. Die leere Menge $X = \emptyset$ erfüllt alle drei Bedingungen. Wir nehmen daher an, X sei nichtleer. Damit keine Verwirrung entsteht, bezeichnen wir in diesem Beweis die Menge aller offenen Teilmengen von X mit $\mathcal{T}(X, d) \subset 2^X$. ($\mathcal{T}$ wie in "Topologie".)

"(i) $\Longrightarrow$ (ii)". Wir nehmen an, daß jede Folge in (X, d) eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(X, d)$ eine offene Überdeckung von X. Wir beweisen in zwei Schritten, daß $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Schritt 1. *Es gibt ein* $\varepsilon > 0$ *so daß für jedes* $x \in X$ *ein* $U \in \mathcal{U}$ *existiert so daß* $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Als logische Formel kann man diese Aussage wie folgt schreiben:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists U \in \mathcal{U})(B_\varepsilon(x) \subset U).$$

Wir beweisen dies indirekt und nehmen an das Gegenteil sei der Fall, das heißt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(\forall U \in \mathcal{U})(B_\varepsilon(x) \not\subset U).$$

Wähle $\varepsilon : 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Element $x_n \in X$ so daß folgendes gilt:

$$B_{1/n}(x_n) \not\subset U \qquad \forall U \in \mathcal{U}.$$

Da X Folgen-kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Sei $x_0 := \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$ und wähle $U \in \mathcal{U}$ so daß $x_0 \in U$. Da U offen ist, gibt es in $\varepsilon > 0$ so daß $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. Da x_{n_i} gegen x_0 konvergiert, gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$i \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_{n_i}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle $i > N$ so daß $1/n_i < /eps/2$. Dann gilt

$$B_{1/n_i}(x_{n_i}) \subset B_{\varepsilon/2}(x_{n_i}) \subset B_\varepsilon(x_0) \subset U.$$

Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion unserer Folge (x_n). Damit haben wir Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *$\mathcal{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Wir nehmen an $\mathcal{U}$ habe keine endliche Teilüberdeckung. Sei $\varepsilon > 0$ eine Zahl für die die Behauptung von Schritt 1 gilt. Wir werden induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}$ konstruieren so daß $B_\varepsilon(x_1) \subset U_1$ und

$$B_\varepsilon(x_n) \subset U_n, \qquad x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$$

für jede natürlich Zahl $n \geq 2$. Zunächst wählen wir irgendein Element $x_1 \in X$. Dann gibt es nach Schritt 1 ein Element $U_1 \in \mathcal{U}$ so daß $B_\varepsilon(x_1) \subset U_1$. Nehmen wir nun an wir hätten $x_1, \dots, x_k$ und $U_1, \dots, U_k$ so konstruiert, daß unsere Bedingungen für $n = 1, \dots, k$ erfüllt sind. da $\mathcal{U}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, muss es ein Element $x_{k+1} \in X$ geben das in keiner der Teilmengen $U_1, \dots, U_k$ enthalten ist. Nach Schritt 1 gibt es nun wieder ein $U_{k+1} \in \mathcal{U}$ $B_\varepsilon(x_{k+1}) \subset U_{k+1}$. Damit ist das Induktionsargument beendet und wir haben die gewünschten Folgen konstruiert.

Nach Konstruktion unserer Folge gilt $x_n \notin U_m$ für jede natürliche Zahl $n > m$. Da $B_\varepsilon(x_m) \subset U_m$ ist, folgt daraus, daß $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$ und somit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n > m$. Vertauschen wir n und m, so erhalten wir $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $n \neq m$. Damit hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zu (i). Damit ist gezeigt, daß (ii) aus (i) folgt.

“(ii) $\Longrightarrow$ (iii)”. Wir nehmen jetzt an, daß jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Daß X total beschränkt ist, folgt nun durch die Wahl der Überdeckung

$$\mathcal{U} := \{B_\varepsilon(x) \,|\, x \in X\}.$$

Die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung besagt nun, daß es Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_N \in X$ gibt so daß

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(\xi_i).$$

Damit ist X total beschränkt.

Wir zeigen nun, daß (X, d) vollständig ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Nehmen wir an, diese Folge konvergiere nicht. Dann konvergiert nach Lemma 9 in [3, 22.10.08] auch keine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 7 in [3, 22.10.09] auch keine Häufungspunkte. Das heißt folgendes: Für jedes $\xi \in X$ gibt es ein $\varepsilon(\xi) > 0$ so daß der Ball $B_{\varepsilon(\xi)}(\xi)$ nur endlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Damit folgt, daß die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} := \left\{B_{\varepsilon(\xi)}(\xi) \,|\, \xi \in X\right\}$$

von X keine endliche Teilüberdeckung enthalten kann, im Widerspruch zu (ii). Damit ist gezeigt, daß (iii) aus (ii) folgt.

“(iii) $\Longrightarrow$ (i)”. Wir nehmen nun an, daß (X, d) vollständig und total beschränkt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir müssen eine konvergente Teilfolge von (x_n) finden. Dazu werden wir induktiv eine Folge unendlicher Teilmengen $T_k \subset \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, konstruieren so daß

$$\mathbb{N} \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$$

und

$$n, m \in T_k \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_n, x_m) \leq 2^{-k}.$$

Da (X, d) total beschränkt ist können wir X durch endlich viele Bälle $B_{1/2}(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$, überdecken. Einer dieser Bälle muss unendlich viele Glieder unserer Folge enthalten. Sei dies der Ball $B_{1/2}(\xi_i)$ und definiere

$$T_0 := \left\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in B_{1/2}(\xi_i)\right\}.$$

Nach Konstruktion ist dies eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und es gilt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \xi_i) + d(\xi_i, x_m) < 1$$

für alle $n, m \in T_0$. Sei nun $k \geq 1$. Wir nehmen an, die Teilmengen

$$T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_{k-1}$$

seien bereits konstruiert. Da (X, d) total beschränkt ist können wir X durch endlich viele Bälle $B_{2^{-k-1}}(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$, überdecken. Einer dieser Bälle muss unendlich viele der Folgenglieder x_n mit $n \in T_{k-1}$ enthalten. Sei dies $B_{2^{-k-1}}(\xi_i)$ und definiere

$$T_k := \left\{ n \in T_{k-1} \,|\, x_n \in B_{2^{-k-1}(\xi_i)} \right\}.$$

Dann ist T_k eine unendliche Teilmenge von T_{k-1} und es gilt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \xi_i) + d(\xi_i, x_m) < 2^{-k}$$

für alle $n, m \in T_k$. Damit sind die Mengen T_k für alle $k \in \mathbb{N}$ konstruiert.

Da jede der Teilmengen T_k unendlich ist, können wir induktiv eine Folge $x_k \in T_k$ wählen so daß $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_{n_\ell} \in T_\ell \subset T_k$ für $\ell \geq k$ und damit

$$\ell \geq k \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_k, x_\ell) \leq 2^{-k}$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und, da (X, d) vollständig ist, konvergiert sie. Wir haben also gezeigt, daß jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Also folgt (i) aus (iii). $\square$

2 Der Satz von Arzéla–Ascoli

Satz 1 zeigt, daß die kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) nur durch die Topologie des Raumes (also die Gesamtheit der offenen Mengen) bestimmt werden. In allgemeinen topologischen Räumen wird Bedingung (ii) in Satz 1 zur Definition des Kompaktheitsbegriffes benutzt.

Nach dem Satz von Heine–Borel ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardmetrik, also der Euklidischen) genau dann kompakt wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere ist also der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ kompakt. Dies gilt auch für jeden beliebigen endlichdimensionalen Vektorraum (oder äquivalenterweise für jede beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$). Im Gegenzug zeigt die folgende Übung dass diese Eigenschaft die endlichdimensionalen (normierten) Vektorräume charakterisiert.

Übung: Sei V ein normierter reller Vektorraum mit kompaktem Einheitsball $B := \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$. Dann ist V endlichdimensional.

Hinweise: 1. Zeigen Sie, daß jeder endlichdimensionale lineare Unterraum $W \subset V$ abgeschlossen ist.
2. Ist $W \subset V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $v \in V \setminus W$, zeigen Sie, daß

$$d(v, W) := \inf_{w \in W} \|v - w\| > 0.$$

3. Ist $W \subsetneq V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $d(v, W) \geq 1/2$. (Sei $v_0 \in V \setminus W$ und wähle $w_0 \in W$ so daß $\|v_0 - w_0\| \leq 2d(v_0, W)$; definiere $v := \|v_0 - w_0\|^{-1}(v_0 - w_0)$.
4. Ist V unendlichdimensional so gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit $\|v_n\| = 1$ und $\|v_n - v_m\| \geq 1/2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Eine solche Folge hat keine konvergente Teilfolge.

Die vorangegangene Übung gibt uns ein wichtiges Kriterium für die Endlichdimensionalität eines normierten Vektorraumes. Andererseits zeigt sie auch, daß das Heine-Borel-Prinzip in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen nicht gilt: es gibt dort abgeschlossenen und beschränkte Teilmengen die nicht kompakt sind. Damit stellt sich die Frage, welche Teilmengen eines solchen unendlichdimensionalen Raumes denn kompakt sind. Eine Antwort auf diese Frage ist in vielen Anwendungen von grundlegender Bedeutung. Ein besonders wichtiges Kompaktheitskriterium für Teilmengen des Raumes der stetigen Funktionen gibt uns der Satz von Arzéla-Ascoli.

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{C}(X)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. In der Vorlesung haben wir bewiesen, daß dieser Raum mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

zu einem Banachraum wird (das heisst zu einem vollständigen normierten Vektorraum, siehe Satz 2 in [3, 3.11.2008]), und daß jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig ist (Satz 8 in [3, 6.11.2008]). Wir nennen eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X)$ *gleichgradig stetig* wenn die Zahl $\delta > 0$ in der Definition der gleichmässigen Stetigkeit unabhängig von der Funktion $f \in \mathcal{K}$ gewählt werden kann.

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X)$ heißt **gleichgradig stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ und alle $x, y \in X$ gilt:

$$f \in \mathcal{K}, \quad d(x,y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Übung. Jede endliche Teilmenge von $\mathcal{C}(X)$ ist gleichgradig stetig. Seien c und μ zwei positive reelle Zahlen. Dann ist die Teilmenge

$$\mathcal{K} := \left\{ f \in \mathcal{C}(X) \,\middle|\, \|f\| \le c, \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\mu} \le c \right\}$$

abgeschlossen, beschränkt, und gleichgradig stetig. Finden Sie eine Folge in $\mathcal{C}([0,1])$ die beschränkt aber nicht gleichgradig stetig ist.

Satz 2 (Arzéla-Ascoli)**.** *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X)$ des Raumes der stetigen reellwertigen Funktionen auf X ist genau dann kompakt bezüglich der Supremumsnorm wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

(i) *$\mathcal{K}$ ist abgeschlossen.*

(ii) *$\mathcal{K}$ ist beschränkt.*

(iii) *$\mathcal{K}$ ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathcal{K}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{C}(X)$ ist. Dann ist $\mathcal{K}$ abgeschlossen, nach Lemma 6 in [3, 5.11.2008]. Außerdem ist $\mathcal{K}$ beschränkt, da eine Folge $f_n \in \mathcal{K}$ mit $\|f_n\| \to \infty$ keine konvergente Teilfolge hätte. Es bleibt also zu zeigen, daß die Menge $\mathcal{K}$ gleichgradig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(x)$ nach Satz 1 total beschränkt ist, gibt es endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{K}$ so daß

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon/3}(f_i; \mathcal{C}(X)).$$

Da (X, d) kompakt ist, ist jede der Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig (siehe Satz 8 in [3, 6.11.2008]). Daher gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\delta_i > 0$ so daß für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x,y) < \delta_i \qquad \Longrightarrow \qquad |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3.$$

Wähle

$$\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} > 0.$$

Sei $f \in \mathcal{K}$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\}$ so daß $\|f - f_i\| < \varepsilon/3$. Daher gilt für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta \leq \delta_i$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |(f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Also ist die Menge $\mathcal{K}$ gleichgradig stetig.

Umgekehrt nehmen wir nun an, die Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X)$ sei abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig. Wir werden in vier Schritten beweisen, daß $\mathcal{K}$ kompakt ist.

Schritt 1. *Es gibt eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X mit der folgenden Eigenschaft. Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $m = m(\delta) \in \mathbb{N}$ so daß*

$$X = \bigcup_{k=1}^{m(\delta)} B_\delta(x_k).$$

Wir konstruieren die Folge induktiv. Zunächst wissen wir, nach Satz 1, daß der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Also existieren, für $\delta = 1$, endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_{m_1} \in X$ so daß

$$X = \bigcup_{k=1}^{m_1} B_1(x_k).$$

Ebenso gibt es für $\delta = 1/2$ endlich viele Punkte $x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2} \in X$ so daß

$$X = \bigcup_{k=m_1+1}^{m_2} B_{1/2}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m_2} B_{1/2}(x_k).$$

Wenn $x_1, \dots, x_{m_{n-1}}$ konstruiert sind, wählen wir $x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n} \in X$ so daß

$$X = \bigcup_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} B_{1/n}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m_n} B_{1/n}(x_k).$$

Damit gilt die Behauptung von Schritt 1 mit $m(\delta) = m_n$, wobei n so gewählt wird daß $1/n < \delta$.

Schritt 2. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{K}$*. Dann existiert eine Teilfolge* $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *so daß der Limes*

$$y_k := \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x_k)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ *existiert.*

Dies ist ein typisches Diagonalfolgen-Argument. Zunächst sei $k = 1$, dann ist die Folge $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen beschränkt und hat daher, nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass, eine konvergente Teilfolge. Mit anderen Worten, es existiert eine strikt monoton wachsende Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so daß der Limes

$$y_1 := \lim_{i\to\infty} f_{g_1(i)}(x_1)$$

existiert. Nun ist die Folge $(f_{g_1(i)}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt und besitzt somit auch eine konvergente Teilfolge. Also gibt es eine strikt monoton wachsende Funktion $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so daß der Limes

$$y_2 := \lim_{i\to\infty} f_{g_1\circ g_2(i)}(x_2)$$

existiert. Mit vollständiger Induktion finden wir nun eine Folge strikt monoton wachsender Funktionen $g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so daß der Limes

$$y_k := \lim_{i\to\infty} f_{g_1\circ\cdots\circ g_k(i)}(x_k)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert. Nun sei

$$n_i := g_1 \circ \cdots \circ g_i(i)$$

für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_{n_i(i)}(x_k))_{i\geq k}$ eine Teilfolge von $(f_{g_1\circ\cdots\circ g_k(i)}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und konvergiert somit gegen y_k. Da dies für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge in* $\mathcal{C}(X)$*.*

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{K}$ gleichgradig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so daß für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ und alle $x, y \in X$ folgendes gilt:

$$f \in \mathcal{K},\ \ d_X(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3. \tag{1}$$

Nach Schritt 1 gibt es eine natürliche Zahl $m = m(\delta) \in \mathbb{N}$ so daß

$$X = \bigcup_{k=1}^{m} B_\delta(x_k). \tag{2}$$

Nach Schritt 2 (und Cauchy's Konvergenzkriterium) gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so daß für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$k \le m, \quad i, j \ge N \qquad \Longrightarrow \qquad \left|f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k)\right| < \varepsilon/3. \tag{3}$$

Wir behaupten, daß mit dieser Wahl von N die Ungleichung $\left\|f_{n_i} - f_{n_j}\right\| \le \varepsilon$ für alle $i, j \ge N$ gilt. Um dies zu zeigen, fixieren wir ein Element $x \in X$. Dann existiert, nach (2), eine natürliche Zahl $k \le m$ so daß

$$d(x, x_k) < \delta.$$

Daher folgt aus (1), daß

$$\left|f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k)\right| < \varepsilon/3$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit gilt für alle $i, j \ge N$:

$$\begin{aligned}
&\left|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)\right| \\
&\le |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_k)| + \left|f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k)\right| + \left|f_{n_j}(x_k) - f_{n_j}(x)\right| \\
&< 2\varepsilon/3 + \left|f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k)\right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Hier folgt die letzte Ungleichung aus (3). und benutzt die Annahme $i, j \ge N$. Damit haben wir gezeigt, daß die in Schritt 2 konstruierte Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}(X)$ ist.

Schritt 4. *Die Folge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathcal{K}$.*

Nach Satz 2 in [3, 3.11.2008] konvergiert die Folge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X)$. Da $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert zu $\mathcal{K}$. Also haben wir gezeigt, daß jede Folge in $\mathcal{K}$ eine konvergente Teilfolge hat (mit Limes in $\mathcal{K}$). Daher ist $\mathcal{K}$ kompakt. □

Der Satz von Arzéla-Ascoli und sein Beweis lassen sich Wort für Wort auf den Raum $\mathcal{C}(X, V)$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten in einem endlichdimensionalen Banachraum V übertragen. Im unendlichdimensionalen Fall bedarf es einer Zusatzbedingung (welche die Bedingung, daß $\mathcal{K}$ beschränkt ist, verschärft).

Übung. Finden Sie eine Teilmenge des Raumes $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (der beschränkten stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), welche zwar abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig, aber nicht kompakt ist.

References

[1] C. Blatter, *Analysis Zwei*, ETHZ, Sommersemester 2004.

[2] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.

[3] D. Salamon, *Analysis I*, Vorlesung an der ETHZ im Herbstsemester 2008.