FUNKTIONALANALYSIS II

Vorlesung
Wintersemester 2005/2006

Tristan Rivière

Ausarbeitung des Skripts: *Laura Keller*
in Latex gesetzt von *Sinikka Kyburz*

Contents

Vorwort

Ziel dieser Vorlesung ist es, ausgewählte partielle Differentialgleichungen genauer zu untersuchen; unter anderem werden folgende Probleme beleuchtet

- Poisson-Gleichung
$$\triangle u = f$$
- Wärmeleitungsgleichung
$$(\partial_t - \triangle)u = 0,\ t > 0,\ u(0,x) = f(x)$$
- Wellengleichung
$$(\partial_t^2 - \triangle)u = \Box u = 0,\ u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x)$$

oder auch
$$-\triangle u + u = f$$
und Varianten dieser Probleme.

Es stellen sich folgende Fragen:

- Unter welchen Voraussetzungen gibt es überhaupt Lösungen?
- Welche Eigenschaften haben allfällige Lösungen? Ist die Lösung differenzierbar? Falls ja, wie oft?
- Ist die Lösung eindeutig?

Um diese Fragen beantworten zu können, m"ussen wir zuerst einen geeigneten Rahmen dafür finden, d.h. wir müssen einen Raum finden, in welchem es sinnvoll ist, eine allfällige Lösung zu suchen. Daher machen wir uns zuerst mit Distributionen, anschliessend mit temperierten Distributionen vertraut (Kapitel I und IV).
Ausserdem benötigen wir adäquate Hilfsmittel, um überhaupt Lösungen finden zu können. Als Stichwörter sind Faltungen und Fouriertransformation zu erwähnen.

I Distributionen

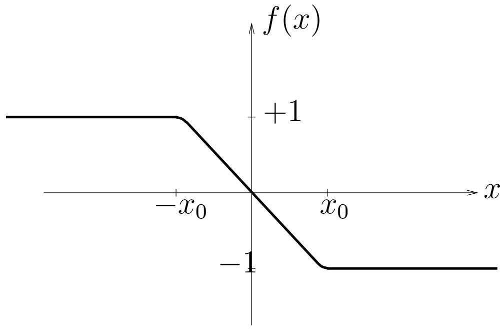
I.1 Motivation

Beispiel: *Burger-Gleichung* (modelliert Ausbreitung in der Strömungsmechanik). Es bezeichne wie üblich t die Zeit und x die Raumvariable (1-dimensional). Gesucht ist eine Lösung des folgenden Problems

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \quad \text{mit} \quad u(0,x) = f(x) \in C^\infty \tag{B}$$

Falls u glatt ist, gilt $\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u = 0.$ (1)

Man betrachte nun die folgende Anfangsbedingung $f(x) \in C^\infty$.



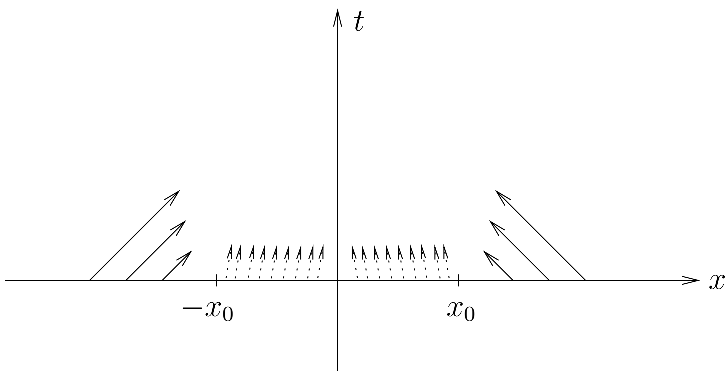
Nun betrachtet man die Charakteristischen von u:
$x \leq -x_0 : u(0,x) \equiv \ 1$ mit (1) ergibt sich daraus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$x \geq -x_0 : u(0,x) \equiv -1$ mit (1) ergibt sich daraus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

graphisch.



Daraus sieht man, dass es zu einem "Schock" bei $x = 0$ kommt, das heisst für dieses f als Anfangsbedingung gibt es keine differenzierbare Lösung. Ist u nicht glatt, so stellt sich die Frage, wie die Ableitung einer nicht differenzierbaren Funktion definiert sein soll. Dazu muss der Begriff der Funktion erweitert werden.

Diese Problematik wird uns auf den Begriff der *Distribution* führen.

Die Aufgabe besteht unter anderem darin, die richtigen und natürlichen Funktionenräume zu finden.

I.2 Definitionen und Beispiele

Bereits 1930 führte Dirac formell Distributionen, eine Verallgemeinerung integrabler Funktionen, ein. Sie wurden durch ihre Wirkung auf glatte Funktionen definiert. Z.B. $\langle \delta_\alpha, \varphi \rangle = \varphi(a)$, $\langle \delta'_a, \varphi \rangle = -\varphi'(a)$ etc.

Mathematisch genau wurde die Theorie der Distributionen 1945 von L. Schwartz formuliert. Zur Erinnerung (Funktionalanalysis I):

$$f \in L^1 : f \sim g \Leftrightarrow |\{x, f - g \neq 0\}| = 0$$

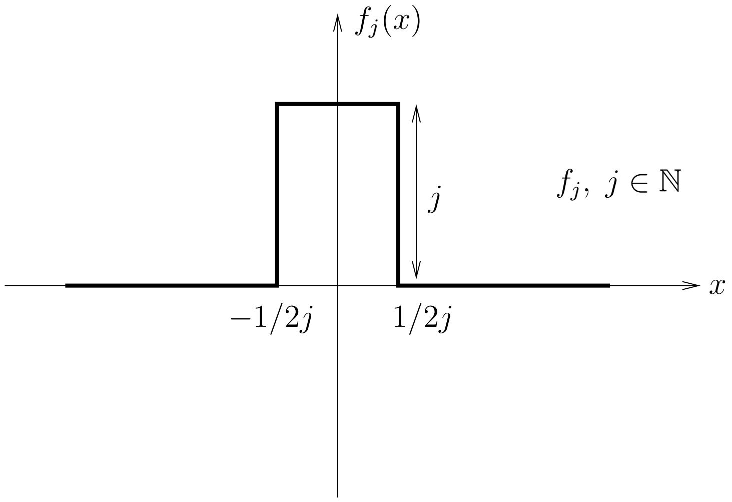
das heisst $f = g$ $f.$ ü.

Lemma I.2.1. *Es seien $f, g \in L^1_{loc}$. Dann ist $f = g$ f.ü., genau dann, wenn*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega (f - g)\varphi = 0.$$

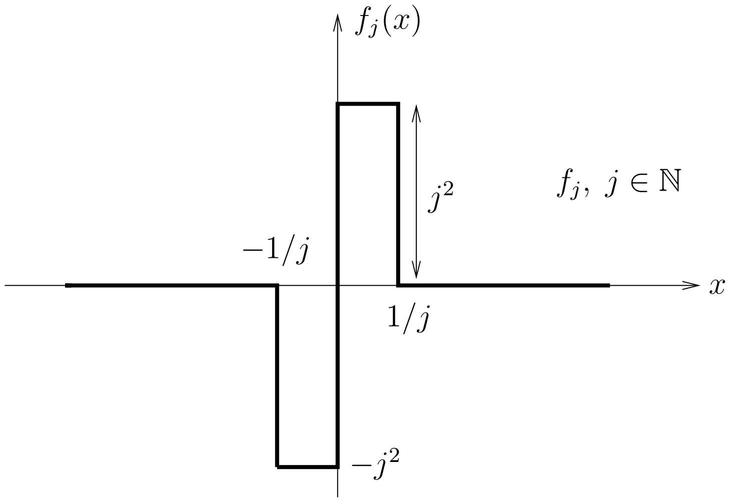
Dann kann man Funktionen in L^1 als lineare Operatoren auf $C_0^\infty(\Omega)$ betrachten.
Beispiele:

1)



$$\int f_j\varphi \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$
$$\left|\int f_j\varphi\right| \le \|f_j\|_1\|\varphi\|_\infty \le C\|\varphi\|_\infty.$$

2)



$$\int f_j\varphi = \int f_j\varphi(0) + \int f_j\ x\varphi'(0) + \int f_j\ \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)\right]$$

Es gilt $\int f_j\varphi(0) = 0$, da f_j ungerade ist

$$\begin{aligned} \int f_j\ x\varphi'(0) &= \varphi'(0)\cdot 2\textstyle\int_0^{1/j} j^2x &&= \varphi'(0) \\ \left|\int f_j[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)]\right| &\le \textstyle\int_{-1/j}^{1/j} j^2Kx^2dx &&= o(j^{-1}) \to 0. \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int f_j\varphi \to \varphi'(0) &= -\langle \delta_0', \varphi\rangle \\ \left|\int f_j\varphi\right| &\le K\|\varphi'\|_\infty. \end{aligned}$$

Definition und Notation I.2.2.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N} : |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

und

$$\partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ supp\ \varphi = \overline{\{x,\, \varphi(x) \neq 0\}}$$

$$K \subset \mathbb{R}^n\ kompakt: \ C_K^\infty = \{\varphi \in C^\infty,\ supp\ \varphi \subset K\}.$$

Definition I.2.3.

- *Eine Distribution u in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist eine lineare Funktion zwischen $C_0^\infty(\Omega)$ und $\mathbb{R}$ mit der folgenden Stetigkeitseigenschaft: $\forall\ K \subset \Omega$ kompakt $\exists\ p \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C_K > 0$, so dass*

  $$\forall \varphi \in C_K^\infty: \ |\langle u, \varphi\rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

  (p : abhängig von u und K; C_K : abhängig von u und K.)

- *Falls es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle kompakten Mengen $K, K \subset \Omega$, obige Abschätzung mit diesem p gilt, wobei C noch von K abhängen darf, so heisst das kleinste solche p die Ordnung von p. ($ord(u)$). Gibt es kein solches p, so hat u unendliche Ordnung.*

- *$\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichne den Raum aller Distributionen in Ω.* □

Beispiele:

1. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\big($ z.B. $e^t \in L^1_{loc}(\mathbb{R})\big)$; $\varphi \in C_K^\infty(\Omega), K \subset \Omega$ kompakt

   $$\left|\int f\varphi\right| \leq \|f\|_{L^1(supp\,\varphi)}\|\varphi\|_\infty,$$

   das heisst f definiert eine Distribution der Ordnung 0.

   $$f \in L^p(\Omega),\ p \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \quad f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

   und

   $$\text{ord } (f) = 0.$$

2. $\mathcal{M}(\Omega) =$ *Radon-Masse auf* Ω.

   Die Elemente aus $\mathcal{M}(\Omega)$ sind ebenfalls Distributionen der Ordnung 0.

   Beispiel: Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte, orientierte Untermannigfaltigkeit und ω_N das Volumen auf N, das von der Orientierung von N und der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik auf N herkommt. Dann ist $\int_N \varphi\,\omega_N$ ein Radon-Mass, also ist durch $\varphi \mapsto \int_N \varphi\,\omega_N = \langle u, \varphi\rangle$ eine Distribution mit $\text{ord}(u) = 0$ definiert, da

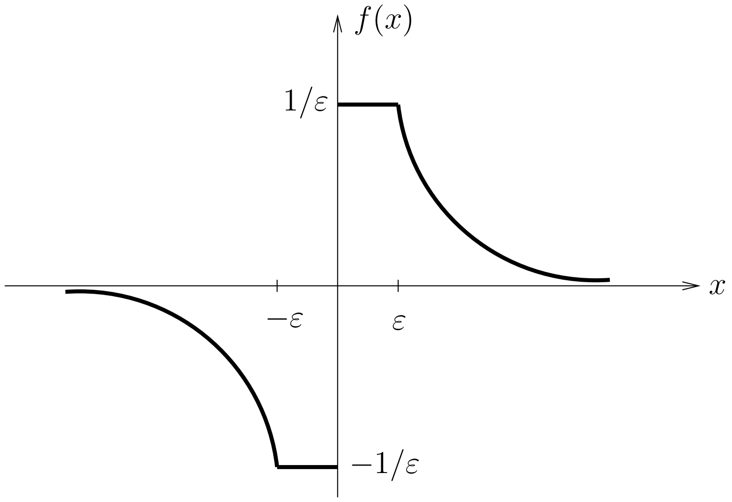
   $$\left|\int_N \varphi\,\omega_N\right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \int_N \omega_N\ .$$

(Eine ausführliche Behandlung von Radon-Massen als Distributionen findet man im Buch von Bony auf Seite 94.)

3. *Ableitungen des Dirac-Masses.*

$$\langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a) \qquad \mathrm{ord}(\partial^\alpha \delta_a) = |\alpha|.$$

4. *Principal value von* $\frac{1}{x}$.
$PV(\frac{1}{x})$. Betrachte die bei ε und $-\varepsilon$ abgeschnittene Funktion $\frac{1}{x}$.



$$\left\langle \mathrm{PV}\ \left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\ dx.$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $supp\, \varphi \subset [-R, R]$, dann gilt:

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int_{R\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx.$$

Ausserdem gilt

$$\int_{R\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x}\ dx = 0,$$

da $1/x$ ungerade ist.

$$\Rightarrow \int_{R\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int_{R\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\ dx\ .$$

Nun

$$\mathbf{1}_{\{\varepsilon\leq|x|\leq R\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \to \mathbf{1}_{\{|x|\leq R\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

punktweise und

$$\left| 1_{\{\varepsilon\leq|x|\leq R\}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \mathbf{1}_{\{|x|\leq R\}} \|\varphi'\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})\ .$$

Dominierte Konvergenz (Lebesque) $\Rightarrow$

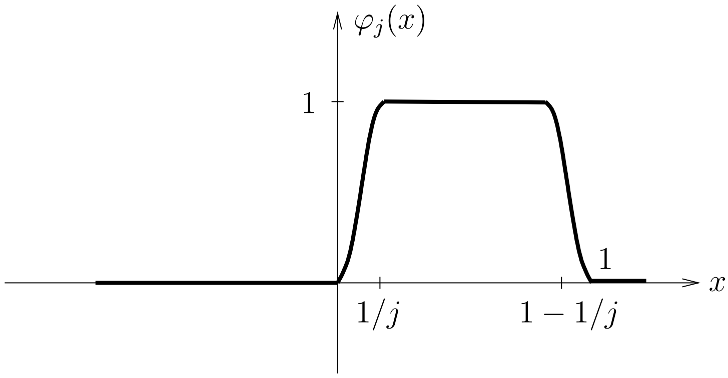
$$\mathbf{1}_{\{\varepsilon\le|x|\le R\}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \underset{L^1}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{\{|x|\le R\}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$$

$$\left|\langle \mathrm{PV}\ \left(\frac{1}{x}\right),\varphi\rangle\right| \le 2R\|\varphi'\|_\infty \quad\Rightarrow\quad PV\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

und

$$\mathrm{ord}\left(\mathrm{PV}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)\right)\le 1.$$

Es gilt sogar: $\mathrm{ord}\big(\mathrm{PV}\ (\frac{1}{\mathrm{x}})\big)=1$. Betrachte die Folge $\varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.



$$\left|\left\langle\ \mathrm{PV}\ \left(\frac{1}{x}\right),\varphi_j\right\rangle\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \varphi_j(x)\frac{1}{x}\ dx\right| \ge \log j\ \|\varphi_j\|_\infty.$$

Es existiert daher keine Konstante C, so dass $|\langle\ \mathrm{PV}\ (\frac{1}{x}),\varphi\rangle|\le C\|\varphi\|_\infty$ für jedes $\varphi\in C_0^\infty$, das heisst, dass PV $(\frac{1}{x})$ nicht Ordnung 0 haben kann.

I.3 Konvergenz im Sinne der Distributionen

Definition I.3.1. *Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ offen, $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u_j\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Dann konvergiert u_j gegen u in $\mathcal{D}'(\Omega)$, das heisst im Sinne der Distributionen, falls*

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega):\langle u_j,\varphi\rangle\to\langle u,\varphi\rangle.$$

Beispiel:

$$u_j\in L^p,\ 1\le p<\infty,\quad u_j\overset{w}{\rightharpoonup}u\quad\text{in}\quad L^p$$

das heisst

$$\forall f\in L^{p'}(\Omega):\int u_j f\to\int uf$$
$$\Rightarrow\quad u_j\to u \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(Man beachte, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L^{p'}(\Omega),\ p'\ne\infty$).

Satz I.3.2. *Sei u_j eine Folge von Elementen in $\mathcal{D}'(\Omega)$, so dass für beliebige φ in $C_0^\infty(\Omega)$, $\langle u_j, \varphi\rangle$ gegen einen Grenzwert l_φ konvergiert. Dann existiert $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so dass $l_\varphi = \langle u, \varphi\rangle$.*

$\square$

Beweis I.3.2: $\rightarrow$ vgl. Kapitel II. $\rightarrow$ vgl. Satz von Banach-Steinhaus, wobei wir Banachräume durch Fréchеträume ersetzen werden.

Kritischer Punkt:

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall K \quad \text{kompakt} \quad \exists\, C_K^j > 0$$

so dass $\forall \varphi \in C_K^\infty$ gilt

$$|\langle u_j, \varphi\rangle| \leq C_K^j \sum_{|\alpha| \leq p_j} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty. \qquad (\star)$$

Es könnte aber sein, dass $C_K^j \to \infty$ und dass *ord* $(u_j, K) \to \infty$. $\square$

I.4 Ableitungen von Distributionen

Bemerkung I.4.1. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f \ \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \ \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi$$

(Partielle Integration).

Definition - Proposition I.4.2. *Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Die lineare Abbildung $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist wie folgt definiert:*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle := -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ heisst erste Ableitung in i-ter Richtung. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und ord $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) =$ ord $(u) + 1$. $\square$

Beweis der Proposition I.4.2 Sei $K \subset \Omega$ kompakt.

$$\exists\, p \in \mathbb{N},\ \exists\, C_K > 0 \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right| &= \left|\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle\right| \\
&\leq C_K \sum_{|\alpha| \leq p} \left\| \partial^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \\
&\leq C_K \sum_{|\beta| \leq p+1} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty .
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

Das impliziert, dass

$$
\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)
$$

und

$$
ord\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq ord(u) + 1.
$$

Falls ord $\frac{\partial u}{\partial x_i} < ord\, u + 1$ kommt man unmittelbar auf ein Widerspruch. □

Satz I.4.3. *Sei $u_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Folge von Distributionen die in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegen u konvergiert. Dann gilt $\forall_i = 1, \ldots, n$:*

$$
\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \in \mathcal{D}'(\Omega).
\tag{1.3.2}
$$

Beweis I.4.3:

$$
\left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \longrightarrow -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle
\tag{1.3.3}
$$

□

Analog für höhere Ableitungen $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$. Die Aussage von Satz I.3.2. lautet dann $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$: $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

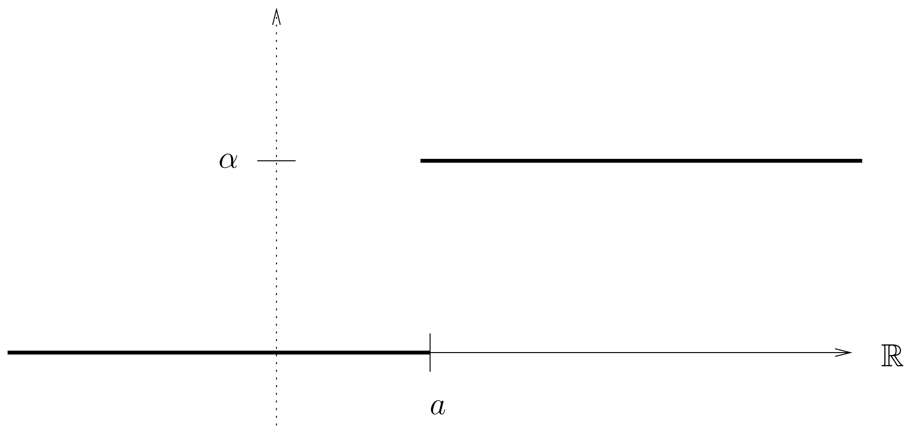
Beispiele:

1. Ist u eine C^1-Funktion, so stimmen die klassische Ableitung und die Ableitung im Sinne der Distributionen überein.

2. Es bezeichne

$$
H_{\alpha,a} = \begin{cases} \alpha, & \text{für } \ t > a \\ 0, & \text{für } \ t \leq a \end{cases}
$$

die Heaviside-Funktion (vgl. Figur).



Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathit{supp}\,\varphi \subset [-R, R]$ und $a \in [-R, R]$.

$$\begin{aligned}\langle H'_{\alpha,a}, \varphi\rangle &= -\langle H_{\alpha,a},\, \varphi'\rangle = -\int_{-R}^{R} \alpha 1_{x\geq a}\varphi' = -\alpha\int_a^R \varphi' \\ &= \alpha\varphi(a) = \langle \alpha\delta_a,\, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Das impliziert, dass

$$H'_{\alpha,a} = \alpha\delta_a\ .$$

Für die zweite Ableitung hat man

$$\langle H''_{\alpha,a}, \varphi\rangle = -\langle H'_{\alpha,a}, \varphi'\rangle = -\langle \alpha\delta_a, \varphi'\rangle = -\alpha\varphi'(a) = \langle \alpha\delta' a, \varphi\rangle.$$

Das impliziert, dass

$$H''_{\alpha,a} = \alpha\delta'_a\ .$$

3. $\log(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Sei φ eine Funktion in $C_0^\infty([-R, R])$.

$$\begin{aligned}\langle (\log|x|)', \varphi\rangle &= -\int \log|x|\,\varphi' \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} \log|x|\,\varphi' \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \log|x|\,\varphi' + \int_{\varepsilon}^{R} \log|x|\,\varphi'\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\log\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) + \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x} + \log\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(x)}{x}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(x)}{x} + \log\varepsilon\ \underbrace{[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]}_{=0(\varepsilon)}\right) \longrightarrow \left\langle PV\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass

$$\log|x|' = PV\left(\frac{1}{x}\right).$$

Satz (Sprungformel im Raum) I.4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $\partial\Omega$ eine glatte $n-1$-orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Orientierung $\vec{\nu}$ und Volumenform $\omega_{\partial\Omega}$ ist. Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C^1(\underline{\mathbb{R}^n \backslash \Omega})$, und f besitze eine C^1-Fortsetzung f_{int} auf $\overline{\Omega}$ und eine C^1-Fortsetzung f_{ext} auf $\overline{\mathbb{R}^n \backslash \Omega}$ (das heisst f ist stückweise C^1).*
Dann gilt die folgende Formel in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + J \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

wobei

$$\left\langle \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}, \varphi \right\rangle := \int_\Omega \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial x_i} \varphi + \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} \frac{\partial f_{\text{ext}}}{\partial x_i} \varphi$$

und

$$\langle J, \varphi \rangle := \int_{\partial\Omega} \varphi \ \vec{\nu} \cdot \vec{e_i} \quad (f_{\text{ext}} - f_{\text{int}})\, \omega_{\partial\Omega}$$

wobei $\vec{\nu}$ die äussere Einheitsnormale von $\partial\Omega$ und $\vec{e}_i$ den i-ten kanonischen Basisvektor von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. □

Bemerkung I.4.5. f stückweise $C^1 \Rightarrow f \in L^1_{loc} \Rightarrow f$ definiert eine Distribution, das heisst die obige Formel macht Sinn. □

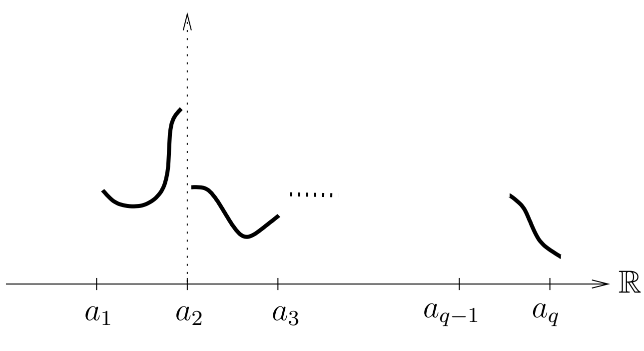
Beweis des Satzes I.4.3

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\text{ext}} \varphi + \int_{\partial\Omega} f_{\text{ext}} \ \vec{\nu} \cdot \vec{e_i} \ \varphi \ \omega_{\partial\Omega} + \int_\Omega \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial x_i} \ \varphi - \int_{\partial\Omega} f_{\text{int}} \vec{\nu} \cdot \vec{e_i} \ \varphi \ \omega_{\partial\Omega}$$

(Integralsatz von Stokes) □

Beispiele:

1. Sei $n = 1$ und f sei C^1 auf $[a_i, a_{i+1}]$, wobei a_i eine geordnete Familie von q reellen Zahlen ist ($a_i < a_{i+1}$).



$$f(a_i^{\pm}) = \lim_{h \searrow 0} f(a_i \pm h).$$

Die Formel aus Satz I.3.3. liefert nun:

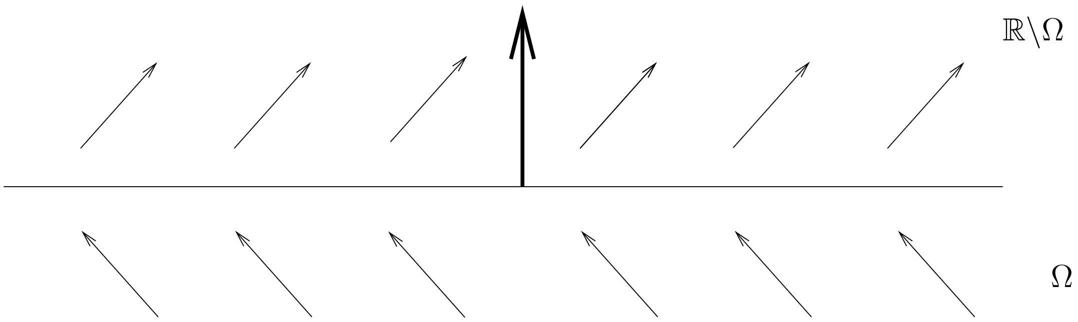
$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{q} [f(a_i^+) - f(a_i^-)]\, \delta_{a_i}$$

und

$$f'' = \{f''\} + \sum_{i=1}^{q} [f'(a_i^+) - f'(a_i^-)]\, \delta_{a_i} + \sum_{i=1}^{q} [f(a_i^+) - f(a_i^-)]\, \delta'_{a_i},$$

falls f stückweise C^2.

2. Betrachte ein Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^2$ mit $|X| = 1$ und $X = (a, b)$ auf $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y)\,;\, y > 0\}$ und $X = (-a, b)$ auf $\mathbb{R}^2_- = \{(x, y)\,,\, y < 0\}$.



Behauptung: $\text{div X} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Beweis der Behauptung: $\text{div X} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\mathrm{X}_1 + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\mathrm{X}_2$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} X_1 = \underbrace{\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right\}}_{=0} + J_1 \ ,$$

wobei

$$\langle J_1, \varphi \rangle = \int (X_1^{\text{ext}} - X_1^{\text{int}})\, \underbrace{\vec{\nu} \cdot \vec{e}_1}_{=0}\ \varphi\ \omega_{\partial\Omega}$$

$\Rightarrow J_1 = 0$, insgesamt: $\dfrac{\partial}{\partial x_1} X_1 = 0$. Und

$$\frac{\partial}{\partial x_2} X_2 = \underbrace{\left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right\}}_{=0} + J_2 \ ,$$

wobei

$$\langle J_2, \varphi \rangle = \int \underbrace{(X_2^{\text{ext}} - X_2^{\text{int}})}_{=0}\, \vec{\nu} \cdot \vec{e}_2\ \varphi\ \omega_{\partial\Omega}$$

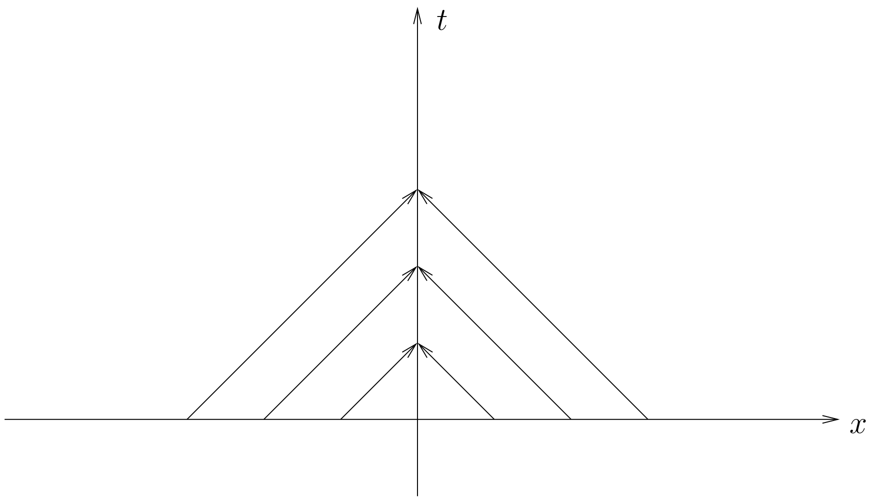
$\Rightarrow J_2 = 0$, insgesamt $\frac{\partial}{\partial x_2} X_2 = 0$ und die Behauptung ist bewiesen.

Korollar I.4.6. Rankine-Hugoniot-Bedingung: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, X ein Vektorfeld auf $(\mathbb{R}^n \backslash \Omega) \cup \Omega$, stückweise C^1. Falls $X_{\text{int}} \cdot \nu = X_{\text{ext}} \cdot \nu \in C^0$, so ist*

$$\text{div X} = \{\text{div X}\}.$$

$\square$

Rankine-Hugoniot-Bedingung zur Lösungen der Burger-Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Es sei $u_0(x) = -\text{sign } x$. Betrachtet man nun die Charakteristischen zu dieser Anfangsbedingung, erhält man folgendes Bild



Es sei nun u konstant auf jeder Charakteristischen. Dann ist u eine Lösung der Burger-Gleichung.

Es bezeichne

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t);\, t > 0\},$$

$$\mathbb{R}^2_{+,+} = \{(x,t);\, t, x > 0\},$$

$$\mathbb{R}^2_{-,+} = \{(x,t);\, x < 0, t > 0\}.$$

u ist glatt auf $\mathbb{R}^2_{-,+}$ und glatt auf $\mathbb{R}^2_{+,+}$. In $\mathbb{R}^2_{-,+}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}u = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \nabla u = 0.$$

(Klassische Ableitungen!), analog für $\mathbb{R}^2_{+,+}$. Die Anwendung des Korollars I.3.6 liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+),$$

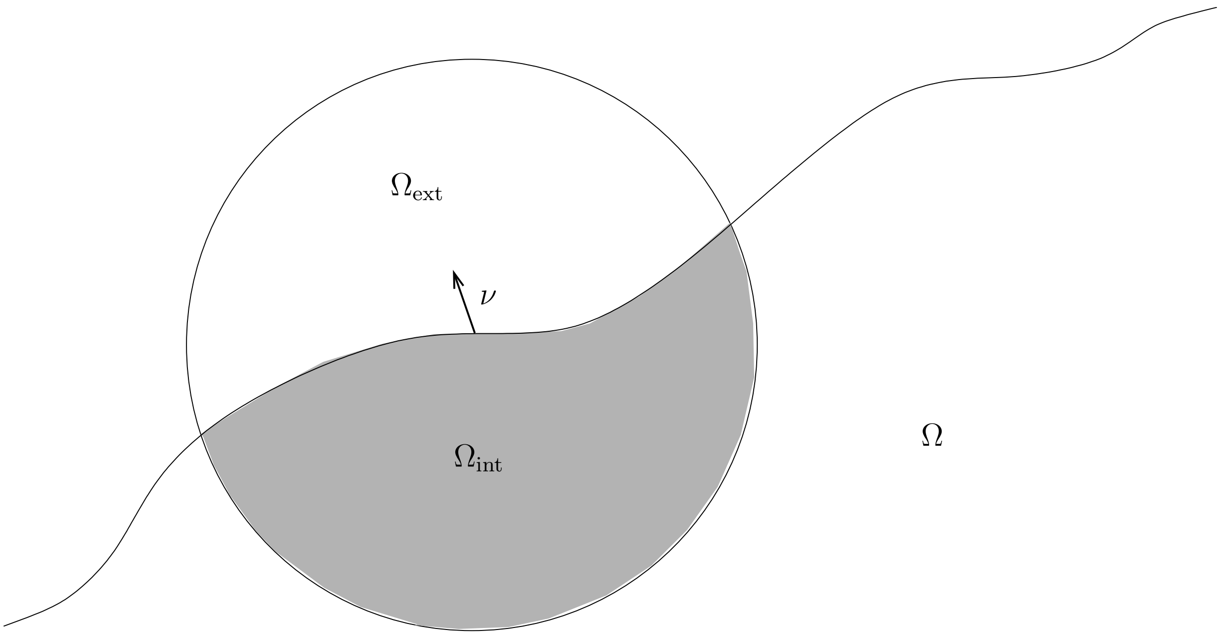
aber nicht

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}u = 0 \text{ !}$$

Zwei Distributionen können nicht ohne weiteres miteinander multipliziert werden! Ist allerdings eine der beiden Distributionen eine C^∞-Funktion, können wir eine Multiplikation von Distributionen definieren. ($\rightarrow$ vgl. I.4.).

Verallgemeinerung: $\Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, wobei Ω offen und glatt berandet sei, das heisst $\partial\Omega$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Es sei ausserdem B eine offene Kugel in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Wir betrachten nun die beiden folgenden Gebiete: $\Omega_{\text{int}} = B \cap \Omega$ und $B \cap \overline{\mathring{\Omega}^C} = \Omega_{\text{ext}}$. Im Weiteren nehmen wir an, u_{ext} sei eine C^1 Lösung der Burger-Gleichung auf Ω_{ext} und u_{int} sei eine Lösung auf Ω_{int}. Um nun eine Lösung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ zu erhalten, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend (Rankine-Hugoniot-Bedingung):

$$(u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})\ \nu \cdot \frac{\partial}{\partial t} + (u_{\text{ext}}^2 - u_{\text{int}}^2)\ \nu \cdot \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \cap B \quad \forall\ B.$$



I.5 Multiplikation mit $f \in C^\infty$

Definition - Proposition I.5.1. *Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und sei $f \in C^\infty(\Omega)$. Das Produkt fu ist wie folgt definiert*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ \langle fu,\, \varphi \rangle := \langle u,\, f\varphi \rangle\,.$$

Dann gilt

$$fu \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sei $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Folge, die gegen u konvergiert in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sei $f_i \in C^\infty(\Omega)$ eine Folge, so dass $\forall K \subset \Omega$ kompakt

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha f_i \to \partial^\alpha f$$

gleichmässig auf K, dann konvergiert $f_i u_i$ gegen fu in $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Beweis von Proposition I.5.1 Sei $K \subset \Omega$ kompakt, sei $ord\,(u) = q$ auf K. Es gilt für beliebige φ in C_K^∞

$$|\langle fu, \varphi \rangle| = |\langle u, f\varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq q} \|\partial^\alpha (f\varphi)\|_\infty.$$

Weiter gilt, dass C_γ unabhängig von f und φ existiert, so dass

$$\partial^\alpha (f\varphi) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} C_\gamma \partial^\gamma f \, \partial^{\alpha - \gamma} \varphi \quad \text{(Leibnitz-Formel)},$$

wobei $|\gamma| \leq |\alpha|$ bedeutet, dass $\gamma_i \leq \alpha_i \quad \forall i = 1 \ldots n$ gilt. Das impliziert

$$\exists\, C' > 0 \quad \forall \varphi \in C_K^\infty \quad \|\partial^\alpha (f\varphi)\| \ \leq C' \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty$$

$$|\langle fu, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \ .$$

Die zweite Aussage von Proposition I.4.1 ist eine Konsequenz des Satzes II.2.1.

II Frécheträume

Ziel dieses Kapitels ist es unter anderem, den schon in Kapitel I.2. erwähnten Satz I.2.2 zu beweisen

Satz II.0.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ offen und $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, und es gelte*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \ \langle u_i, \varphi \rangle \to l_\varphi.$$

Dann gibt es ein $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so dass $l_\varphi = \langle u, \varphi \rangle$.

Bemerkung II.0.3. Es ist klar, dass $l_{\varphi+\psi} = \ell_\varphi + l_\psi$ und $l_{\lambda\varphi} = \lambda l_\varphi \quad \forall\ \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Da der Beweis dieses Theorems eine Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus für Frécheträume ist, sei hier nochmals der Satz von Banach-Steinhaus für Banachräume, bekannt aus der Funktionalanalysis I, erwähnt.

Satz von Banach-Steinhaus: Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum,

$$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset L(X, Y) = \{A : X \to Y; A \quad \text{linear} \quad \text{und} \quad \text{stetig}\}.$$

Es gelte

$$\forall x \in X : \sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda x\| < \infty \ .$$

Dann gilt

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |||A_\lambda||| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| < \infty \ .$$

Bemerkung II.0.4. Man beachte, dass der Beweis des Satzes von Banach-Steinhaus auf dem Satz von Baire basiert. Des Weiteren beachte man die wichtige Folgerung aus dem Satz von Banach-Steinhaus: Sei X ein Banachraum und sei $(A_i)_{i \in I} \in X^\star = \{A : X \to \mathbb{R}; A \quad \text{linear} \quad \text{und} \quad \text{stetig}\}$. Es gelte: $\forall x \in X : A_i x \to l_x$. Dann folgt mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus: $l_x = Ax$ für ein $A \in X^\star$.

Bemerkung II.0.5. Sei $K \subset \Omega, K$ kompakt, und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\forall\ \varphi \in C_K^\infty \quad |\langle u, \varphi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty = C\|\varphi\|_{C^p} \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} p &= ord\,(u, K) \\ &\Rightarrow u \in (C^p)^\star. \end{aligned}$$

Aber

$$ord\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, K\right) = p + 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \left(C^{p+1}\right)^\star \quad 1 \le i \le n.$$

II.1 Definition Fréchetraum, Beispiele und grundlegende Eigenschaften

Definition - Proposition II.1.1. *Pseudonorm / Halbnorm: Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (oft $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Eine Abbildung $P : X \to [0, \infty)$ heisst Pseudonorm/Halbnorm, falls*

i) $P(\lambda x) = |\lambda| P(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in X$ *(Homogenität).*

ii) $P(x + y) \leq P(x) + P(y) \quad \forall\ x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Fréchetraum: Sei F ein Vektorraum und sei P_i eine wachsende Folge von Halbnormen auf F, das heisst $P_i \leq P_{i+1}$, so dass gilt: $P_i(f) = 0\ \forall i \Leftrightarrow f = 0, f \in F$. Es sei $d : F \times F \to \mathbb{R}_+$ wie folgt definiert

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min\{P_i(f - g), 1\}.$$

d ist eine Metrik auf F. F heisst Fréchetraum, falls F bezüglich d vollständig ist.

Beweis der Behauptung:

a) Definitheit: $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow P_i(f - g) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow f = g$

b) Symmetrie: Die Symmetrie von d folgt aus der Tatsache, dass die P_i alle Pseudonormen sind.

$$\forall i : P_i(x - y) \leq P_i(x) + P_i(-y) = P_i(x) + P_i(y)$$

$$P_i(y - x) \leq P_i(y) + P_i(-x) = P_i(y) + P_i(x)$$

$$\Rightarrow P_i(x - y) - P_i(y - x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ P_i(x - y) \leq P_i(y - x)$$

$$\text{und} \quad P_i(y - x) - P_i(x - y) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ P_i(y - x) \leq P_i(x - y)$$

$$\Rightarrow P_i(x - y) \leq P_i(y - x) \leq P_i(x - y)$$

$$\Rightarrow P_i(x - y) = P_i(y - x).$$

c) Dreiecksungleichung: zu zeigen

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \quad \forall f, g, h \in F.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \forall_i : \underbrace{P_i(f - g)}_{=:a} &= P_i(f - h + h - g) \\ &\leq \underbrace{P_i(f - h)}_{=:b} + \underbrace{P_i(h - g)}_{=:c} \quad \forall f, g, h \in F\ . \end{aligned}$$

Falls $a, b, c \leq 1$, folgt unmittelbar

$$\min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\} \quad \forall f,g,h \in F.$$

Falls $a, b, c \geq 1$, folgt ebenfalls sofort

$$\min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\} \quad \forall\ f,g,h \in F.$$

Falls $b \geq 1$, gilt

$$1 \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\}$$

$$\Rightarrow \min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\} \quad \forall\ f,g,h \in F.$$

Analog behandelt man den Fall $c \geq 1$.
Falls $a \geq 1$, gilt

$$1 \leq P_i(f-g)$$

$$\leq P_i(f-h) + P_i(h-g) \ \Rightarrow\ 1 \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\}$$

$$\Rightarrow \min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\} \quad \forall\ f,g,h \in F.$$

Falls von den drei Termen a, b und c zwei ≥ 1 sind, folgt analog

$$\min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\} \quad \forall\ f,g,h$$

Insgesamt gilt also

$$\forall\ i : \min\{P_i(f-g),1\} \leq \min\{P_i(f-h),1\} + \min\{P_i(h-g),1\}, \quad \forall\ f,g,h \in F,$$

woraus nun sofort folgt

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g) \quad \forall\ f,g,h \in F.$$

$\square$

Beispiele:

1) Banachräume $(X, \|\cdot\|)$ sind Fréchetträume. Man setze $P_i(\cdot) = \|\cdot\|$.

2) Es sei K kompakt. $C_K^p = \{\varphi \in C^p(K)$ und $supp\,\varphi \subset K\}$.

$$\|\varphi\|_{C^p} = \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

$(C_K^p, \|\cdot\|_{C^p})$ ist ein Banachraum, also auch ein Fréchetraum.

3) C_K^∞ ist ein Fréchetraum für $P_i(\cdot) = \|\cdot\|_{C^i}$.

Beweis, dass C_K^∞ vollständig für d ist, wobei $d(f,g) = \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} \min\{P_i(f-g), 1\}$:

Es sei f_n eine Cauchy-Folge in C_K^∞, das heisst

$$\forall i \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad P_i(f_n - f_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

(Dass dies richtig ist, wird mit Proposition II.1.2. sofort klar.)

$$\Rightarrow\ \forall\ \alpha : \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty.$$

Mit anderen Worten: Die $\partial^\alpha f_n$ konvergieren gleichmässig gegen ein ν_α. Daraus folgt nun, dass ν_α stetig ist, und aus der Tatsache, dass $f_n \in C_K^\infty$, folgt, dass $supp\, \nu_\alpha \subset K$. Nun verwendet man das folgende Resultat:

Es sei f_n eine Folge C^1, mit den folgenden Eigenschaften:

i) f_n konvergiert gleichförmig gegen f (es reicht sogar punktweise Konvergenz).

ii) $\partial_i f_n$ konvergieren gleichmässig gegen g_i.

Dann ist $f \in C^1$ und $\partial_i f = g_i$.

Die iterative Anwendung dieses Resultats auf die vorliegende Situation ergibt: $\partial^\alpha \nu_0 = \nu_\alpha$. Da die $\partial^\alpha f_n$ gleichmässig gegen ν_α konvergieren, konvegiert $P_i(f_n - \nu_0)$ gegen Null. Da diese Überlegungen für alle i gelten, folgt daraus die Vollständigkeit von C_K^∞ bezüglich d.

4) $C^\infty(\Omega)$ ist ein Fréchetraum, wobei $K_i \subset K_{i+1}, \cup_i K_i = \Omega$, K_i kompakt.

$$P_i(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K_i)}$$

Der Beweis, dass dies ein Fréchetraum ist, beruht auf ähnlichen Überlegungen wie im vorangehenden Beispiel. Betrachten wir nun $C_0^\infty(\Omega)$: Es gilt: $C_0^\infty(\Omega) = \cup_i C_{K_i}^\infty$. Wir können aber nicht einfach $P_i(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ setzen. Das wäre zu restriktiv.

Zusammenhang mit Distributionen: Distributionen sind Linearformen auf $C_0^\infty(\Omega)$, wobei die Einschränkung auf jedes C_K^∞ stetig ist.

5) $L_{loc}^p(\Omega)$ mit $P_i(f) = \|f\|_{L^p(K_i)}$, ist ein Fréchetraum, wobei

$$K_i \subset K_{i+1}, \quad \cup_i K_i = \Omega \quad \text{und} \quad K_i \quad \text{kompakt.}$$

6) Schwartzraum $S(\mathbb{R}^n)$. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein Element von $S(\mathbb{R}^n)$, falls $\forall\ i$ gilt $\mathcal{N}_i(\varphi) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq i} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty < \infty$, wobei $\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und
$$x^\beta \partial^\alpha \varphi := \prod_i x_i^{\beta_i} \ \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$
Mit anderen Worten, φ fällt genug schnell, schneller als jedes Polynom ab.

7) $e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Gegenbeispiel:
$$\frac{1}{(1+|x|^2)^n} \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{aber} \quad \frac{1}{(1+|x|^2)^n} \notin S(\mathbb{R}^n).$$
$S(\mathbb{R}^n)$ mit $P_i(\varphi) = \mathcal{N}_i(\varphi)$ ist ein Fréchetraum.

Proposition II.1.2. *Sei F ein Fréchetraum. Dann gilt*

i) $f_n \in F$ *mit* $f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow\ \forall\ i\ P_i\ (f_n - f) \to 0$.

ii) f_n *ist eine Cauchy-Folge in* $(F, d) \Leftrightarrow f_n$ *ist eine Cauchy-Folge in* (F, P_i) $\forall_i$.

iii) $\forall i\ P_i$ *ist* C^0.

iv) $V \subset F$ *ist eine Umgebung von* $f \in F$, *(das heisst* $\exists\ O$ *offen,* $O \subset V, f \in O$*), genau dann, wenn das Folgende gilt:* $\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ i \in \mathbb{N}$, *so dass* $\{g\ ;\ P_i(f-g) < \varepsilon\} \subset V$ □

Beweis der Proposition II.1.2:
Beweis von i): $f_n \xrightarrow{d} f$, das heisst
$$d(f_n, f) \to 0 \Rightarrow\ \forall i\ : 2^{-i} P_i(f_n - f) \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{P_i} f \quad \forall_i.$$
Umgekehrt: Sei $\varepsilon > 0$, sei i so gewählt, dass gilt $2^{-i} < \frac{\varepsilon}{4}$, und es sei $N \in \mathbb{N}$, so dass für
$$n \geq N \quad P_i(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$
Das impliziert, dass
$$\forall\ j \leq i\ :\ P_j(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$
Daraus bekommt man die folgende Abschätzung
$$d(f_n f) = \sum_{l=0}^\infty 2^{-l} \min\{P_l(f_n - f), 1\}$$
$$= \sum_{l=0}^i 2^{-l} P_l(f_n - f) + \sum_{l=i+1}^\infty 2^{-l} \min\{P_l(f_n - f), 1\}$$
$$\leq \sum_{l=0}^i 2^{-l}\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=i+1}^\infty 2^{-l} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-i} < \varepsilon\ .$$

Beweis von ii): f_n ist eine Cauchy-Folge in (F, d), das heisst

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; N \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad \forall m,\, l \geq N \quad d(f_m, f_l) \leq \varepsilon,$$

das heisst

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min\{P_i(f_m - f_l), 1\} \leq \varepsilon.$$

Das impliziert insbesondere, dass

$$\forall i \;\; P_i(f_m - f_l) \leq \varepsilon\, 2^i.$$

Wähle nun $\varepsilon' = \varepsilon \cdot 2^{-i}$, damit folgt für festes $i : P_i(f_m - f_l) \leq \varepsilon$. Da wir für jedes feste i ein geeignetes ε' wählen können, so dass $P_i(f_m - f_l) \leq \varepsilon$, zeigt dies, dass f_n eine Cauchy-Folge ist für jedes (F, P_i).

Umgekehrt sei $\varepsilon > 0$, $\forall i$ gilt dann

$$\exists\; N \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad \forall m, l \geq N \,:\, P_i(f_m - f_l) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sei ausserdem i so gewählt, dass gilt $2^{-i} < \frac{\varepsilon}{4}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d(f_m, f_l) &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \min\{P_j(f_m - f_l), 1\} \\
&= \sum_{j=0}^{i} 2^{-j}\, P_j(f_m - f_l) + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} \min\{P_j(f_m - f_l), 1\} \\
&\leq \sum_{j=0}^{i} 2^{-j}\, \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-i} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Die drittletzte Ungleichung gilt, da $\forall k \leq i \,:\, P_k(f_m - f_l) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Dies zeigt, dass aus f_n eine Cauchy-Folge für alle (F, P_i) folgt, dass f_n auch eine Cauchy-Folge ist für (F, d).

Beweis von iii): Man beachte die Charakterisierung von Stetigkeit in metrischen Räumen durch Folgen: P ist stetig in $f \Leftrightarrow \forall$ Folgen f_n mit $f_n \to f$ gilt: $P(f_n) \to P(f)$. Sei also f_n eine Folge in (F, d), die gegen f konvergiert. Aus i) folgt für beliebige $i \,:\, P_i(f_n - f) \to 0$. Daraus folgt

$$|P_i(f_n) - P_i(f)| \leq P_i(f_n - f) \to 0.$$

Da diese Überlegungen unabhängig von der Wahl der Folge f_n sind, folgt, dass P_i stetig ist in f. Da sie aber auch unabhängig sind von f, folgt, dass P_i überall stetig ist.

Beweis von iv): Sei V eine Umgebung von $f \in F$. Dann existiert $r > 0$, so dass $B_r(f) \subset V$, das heisst, dass $\forall g \in F$ mit $d(f, g) < r$ gilt $g \in V$. Sei i so gewählt, dass $2^{-i} < \frac{r}{2}$. Sei weiter $h \in F$, so dass $P_i(h - f) < \frac{r}{4}$. Da die P_i eine wachsende Folge bilden, gilt

$$\forall j \leq i \,:\, P_j(h - f) < \frac{r}{4}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} d(h,f) &= \sum_{j=0}^{i} 2^{-j}\min\{P_j(h-f),1\} + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j}\min\{P_j(f-h),1\} \\ &\le \sum_{j=0}^{i} 2^{-j}\frac{r}{4} + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} \le \frac{2r}{4} + 2^{-i} < r \end{aligned}$$

und das impliziert, dass

$$\{h\ ;\ P_i(h-f) < \frac{r}{4}\} \subset V.$$

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}, \varepsilon < 1$. Sei weiter $V \supset \{g;\ P_i(f-g) < \varepsilon\}$ und sei h, so dass $d(f,h) \le 2^{-i}\varepsilon$. Daraus folgt, dass

$$2^{-i}\min\{P_i(f-h),1\} \le 2^{-i}\varepsilon$$

dies impliziert, dass

$$P_i(f-h) \le \varepsilon$$

Damit gilt

$$h \in \{g\,;\ P_i\,(f-g) < \varepsilon\}.$$

Somit haben wir gezeigt, dass $B_{2^{-i}\varepsilon}(f) \subset V$. Daraus folgt, dass V eine Umgebung von f ist.

Proposition II.1.3. *(Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen Frécheträumen)*
Es seien $(F,(P_i)_i)$ und $\big(F',(P_i')_i\big)$ zwei Frécheträume. Es sei A eine lineare Abbildung $A : F \to F'$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent

i) *A ist stetig in 0.*

ii) *A ist überall stetig.*

iii) *$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists\ C_k$, eine von k abhängige Konstante, $\exists i \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\forall f \in F : P_k'(Af) \le C_k\, P_i(f)$$

Beweis II.1.3: ii) impliziert i), diese Tatsache ist klar.

Beweis von i) $\Rightarrow$ iii): $A(0) = 0$ wegen der Linearität. A ist stetig in $0 \Leftrightarrow A^{-1}(U) = V$, wobei U eine Umgebung von 0 ist in F' und V eine Umgebung von 0 ist in F. Unter Verwendung von Proposition II.1.2 iv), können wir dies wie folgt umschreiben. Für

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ i \in \mathbb{N}$$

so dass gilt

$$A^{-1}\big(\{g;\ P_k'(g) < 1\}\big) \supset \{f;\ P_i(f) < \varepsilon\}.$$

Für alle $f \in F$ mit $P_i(f) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ gilt

$$P_k'(Af) < 1 = \frac{2}{\varepsilon}P_i(f).$$

Aus der Homogenität der Pseudonormen folgt nun, dass die obige Ungleichung für beliebige f in F gilt.

Beweis von iii) $\Rightarrow$ ii): Es genügt zu zeigen, dass für beliebige f in F und beliebige Folgen f_n in F die gegen f konvergieren, gilt: $Af_n \to Af$. (Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen)

$$f_n \xrightarrow{d} f \;\Rightarrow\; P_i(f_n - f) \to 0 \quad \forall i$$

iii) besagt, dass dann $\forall k : P'_k\big(A(f_n - f)\big) \to 0$, das heisst

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P'_k\left(A(f_n) - A(f)\right) \to 0.$$

$\big($Aus der Dreiecksungleichung folgt: $P'_k(A(f_n)) \to P'_k(A(f))$.$\big)$ Mit Proposition II.1.2.i) folgt schlussendlich

$$A(f_n) \underset{(F',d')}{\longrightarrow} A(f)$$

$\square$

Proposition II.1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ offen. Die Distributionen auf Ω, das heisst die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$, sind die linearen Abbildungen zwischen C_0^∞ und $\mathbb{R}$, deren Einschränkungen auf C_K^∞, wobei $K \subset \Omega$ kompakt ist, stetig sind.*

Beweis II.1.4: Wir benützen Proposition II.1.3, wobei $F' = \mathbb{R}$ und $P'_k = |\cdot|$. u ist eine stetige Abbildung zwischen C_K^∞ und $\mathbb{R}\ \forall\ K \subset \Omega, K$ kompakt, genau dann, wenn

$$\exists\ i \in \mathbb{N},\ \exists\ C > 0 : |u(f)| \leq CP_i(f),$$

das heisst

$$\exists\ i \in \mathbb{N}, \exists\ C > 0\ \forall K \subset \Omega, K \quad \text{kompakt:} \quad |u(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)}.$$

Definitionsgemäss ist u dann eine Distribution und Proposition II.1.4 folgt unmittelbar. $\square$

II.2 Der Satz von Banach-Steinhaus für Fréchetträume

Satz II.2.1. *Seien (F, P_i) und (G, Q_k) zwei Fréchetträume. Sei L_n eine Folge stetiger, linearer Abbildungen $L_n : F \to G$, so dass $\forall f \in F\ L_n(f)$ in G konvergiert. Dann existiert $L : F \to G$ stetig und linear, so dass $\forall f \in F$ gilt: $L_n f \to Lf$. Sei f_n eine Folge in F, die gegen f konvergiert, dann konvergiert $L_n f_n$ gegen $L f$.* $\square$

Anwendung des Satzes II.2.1:

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega, K \text{ kompakt}} C_K^\infty$$

Sei L_n eine Folge von Abbildungen $L_n : C_0^\infty \to \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung von L_n auf C_K^∞ stetig und linear ist $\forall K, K \subset \Omega$ kompakt. Den Beispielen in Kapitel II.1 entnehmen wir, dass sowohl C_K^∞ als auch $\mathbb{R}$ ein Fréchetraum sind. Aus Proposition II.1.4 folgt, dass $L_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Falls nun $\langle L_n, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert, folgt aus Satz II.2.1, dass es ein $L \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gibt, so dass gilt

$$\langle L_n, \varphi \rangle \to \langle L, \varphi \rangle$$

Dies liefert also den ausstehenden Beweis von Satz I.2.2.

Beweis des Satzes II.2.1 : Für alle $p \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$C_p = \left\{ f \in F;\ \forall n \in \mathbb{N} :\ Q_k\left(L_n f\right) \le p \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Behauptung 1: C_p ist abgeschlossen.

Beweis von Behauptung 1:

$$\begin{aligned} C_p = \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_p^n, \quad \text{wobei} \quad C_p^n &= \left\{ f \in F;\, Q_k\left(L_n f\right) \le p \right\} \\ &= (Q_k \circ L_n)^{-1}([0, p]) \end{aligned}$$

Gemäss Voraussetzung ist L_n stetig. Ausserdem wissen wir aus Proposition II.1.2 iii), dass Q_k stetig ist. Daraus folgt, dass $Q_k \circ L_n$ ebenfalls stetig ist. Damit ist $(Q_k \circ L_n)^{-1}([0, p])$ abgeschlossen und C_p ist ebenfalls abgeschlossen, da beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Behauptung 2: $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} C_p = F$

Beweis von Behauptung 2: $L_n f$ konvergiert nach Voraussetzung für jedes $f \in F$. Daraus folgt, dass $Q_k(L_n f)$ für jedes $f \in F$ konvergiert. Das impliziert, dass $Q_k(L_n f)$ gleichmässig beschränkt in n ist. Das heisst, dass

$$\forall f \in F\ \exists\ p \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad \forall n \in \mathbb{N}\, Q_k(L_n f) \le p$$

$$\Rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{N}} C_p = F.$$

Aus dem Satz von Baire folgt nun, dass es ein $p_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathring{C}_{p_0} \neq \emptyset$. Sei $f_0 \in \mathring{C}_{p_0}$. Es ist dann klar, dass $\mathring{C}_{p_0}$ eine Umgebung von f_0 ist , da $f_0 \in \mathring{C}_{p_0}$ und $\mathring{C}_{p_0}$ offen ist. Aus Proposition II.1.2 iv) folgt

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ j_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad \{f;\, P_{j_0}(f_0 - f) < \varepsilon\} \subset C_{p_0}\ .$$

Behauptung 3: $\{h\ ;\ P_{j_0}(h) < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset C_{p_0}$.

Beweis von Behauptung 3: Es sei h so gewählt, dass gilt $P_{j_0}(h) < \frac{\varepsilon}{2}$. h lässt sich schreiben als

$$h = \frac{f_0 + 2h - f_0}{2}.$$

Es gilt

i) $-f_0 \in C_{p_0}$:

$f_0 \in C_{p_0}$, das heisst $\forall n \in \mathbb{N} : Q_k(L_n f_0) \leq p_0$.

$L_n(-f_0) = -L_n f_0 \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} : Q_k(-L_n f_0) = Q_k(L_n f_0) \leq p_0$

$\Rightarrow -f_0 \in C_{p_0}$.

ii) $f_0 + 2h \in C_{p_0}$:

$P_{j_0}(f_0 - (f_0 + 2h)) = 2P_{j_0}(h) < \varepsilon \Rightarrow f_0 + 2h \in C_{p_0}$

iii) C_{p_0} ist konvex. Seien $f,\, g \in C_{p_0}$.

$\forall t \in [0,1]$ gilt $tf + (1-t)\, g \in C_{p_0}$, denn

$$\begin{aligned} Q_k\left(L_n(tf + (1-t)g)\right) &\leq t\, Q_k\left(L_n f\right) + (1-t)\, Q_k\left(L_n g\right) \\ &\leq tp_0 + (1-t)p_0 = p_0. \end{aligned}$$

Aus i), ii), iii) folgt, dass $h \in C_{p_0}$, woraus sofort Behauptung 3 folgt. Insgesamt folgt nun für alle $h \in F$ mit $P_{j_0}(h) = \frac{\varepsilon}{4}$, dass gilt $\forall n \in \mathbb{N} : Q_k(L_n h) \leq p_0$. Schliesslich liefert die Homogenität der Pseudonormen

$$\forall h \in F \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_k\ (L_n h) \leq \frac{4\, p_0}{\varepsilon}\ P_{j_0}(h).$$

Aus der Stetigkeit von Q_k folgt, dass

$$Q_k(Lh) \leq \frac{4\, p_0}{\varepsilon}\ P_{j_0}(h) \quad \forall h \in F.$$

Nun folgt aus Proposition II.1.3, dass L stetig ist, da die obigen Überlegungen unabhängig sind von $k \in \mathbb{N}$. Linearität von L ist klar, man vergleiche dazu die Bemerkung zum Satz I.2.2. am Anfang dieses Kapitels.

Beweis der zweiten Aussage des Satzes: Zu zeigen ist, dass $d'(L_n f_n, Lf) \to 0$.
Da d' eine Metrik ist auf G, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d'(L_n f_n,\, Lf) \leq d'(L_n f_n,\, L_n f) + d'(L_n f,\, Lf).$$

Dabei konvergiert der zweite Term auf der rechten Seite gegen Null, da $L_n f$ gegen Lf konvergiert. Da nach Voraussetzung auch f_n gegen f konvergiert, folgt aus der Abschätzung

$$Q_k(L_n(f_n - f)) \leq C\, P_{j_0}(f_n - f),$$

dass auch der erste Term auf der rechten Seite gegen Null konvergiert.

Insgesamt folgt also, dass

$$d'(L_n f_n,\, Lf)$$

gegen Null strebt. Damit ist auch die zweite Aussage des Satzes bewiesen.

III Faltung von Distributionen und das Lösen einiger linearer, partieller Differentialgleichungen

III.1 Faltung von Funktionen

Satz III.1.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = g \star f(x).$$

$\square$

Beweis III.1.1 : Siehe Skript von M. Struwe zur Analysis III, Seite 63f.

Satz III.1.2. *Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, sei $g \in C^p_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \star g \in C^p(\mathbb{R}^n)$ und für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq p$ gilt*

$$\partial^\alpha(f \star g) = f \star \partial^\alpha g.$$

$\square$

Beweis III.1.2: siehe Bony, “Cours d’Analyse”, Seite 78.

Als Beispiel betrachten wir die Glättung: Sei $\chi \in C^\infty_0(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$ und sei $g \in C^0$. χ_ε sei wie folgt definiert

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi(\frac{x}{\varepsilon}), \varepsilon > 0.$$

χ_ε hat die beiden Eigenschaften

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

und

$$\chi_\varepsilon \to \delta_0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt

$$\chi_\varepsilon \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)g(y) \to g(x)$$

punktweise und aus dem Satz III.1.2 wissen wir

$$\chi_\varepsilon \star g \in C^\infty.$$

$\square$

Satz III.1.3. *Sei $\chi \in C^\infty_0(B_1(0)), B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, mit $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$. $\chi_\varepsilon(x)$ sei wie folgt definiert: $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

i) *Sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. *Dann gilt* $X_\varepsilon \star f \overset{L^p}{\longrightarrow} f$.

ii) *Sei* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. *Dann gilt* $X_\varepsilon \star f \overset{L^p_{loc}}{\longrightarrow} f$.

iii) *Sei* $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt* $\chi_\varepsilon \star f \overset{C^m(K)}{\longrightarrow} f \; \forall K \subset \mathbb{R}^n$, *$K$ kompakt.*

Beweis III.1.3: siehe Bony, "Cours d'Analyse", Seite 80f.

Gegenbeispiel für $p = \infty$: Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz III.1.2 folgt, dass $\chi_\varepsilon \star f \in C^\infty$. Nehmen wir an, $||\chi_\varepsilon \star f - f\|_\infty \to 0$, was äquivalent dazu ist, dass $\chi_\varepsilon \star f$ gleichmässig gegen f konvergiert, folgt daraus, dass f stetig ist. Dies ist aber ein Widerspruch, denn es gibt in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sehr wohl Funktionen, welche nicht stetig sind, z.B. charakteristische Funktionen. □

III.2 Der Träger einer Distribution

Definition - Proposition III.2.1. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ offen und es sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Es gibt eine maximale, offene Menge $\omega \subset \Omega$, so dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega)$ gilt $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Wobei Maximalität im folgenden Sinn zu verstehen ist: Falls für ein ω' offen mit $\omega \subset \omega' \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega')$ $\langle u, \varphi \rangle = 0$ gilt, so folgt daraus $\omega = \omega'$.*

$\omega^c = \Omega \backslash \omega$ heisst der Träger von u. □

Für den Beweis der obigen Behauptung benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma III.2.2. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt, es sei weiter $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen mit $K \subset U$. Dann gibt es ein $\Theta \in C_0^\infty(U)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$0 \leq \Theta \leq 1$.

$\Theta \equiv 1$ *auf* K.

Beweis des Lemmas III.2.2: Setze $d := \mathrm{dist(K, U^c)}$. Wähle nun ε so, dass $3\varepsilon < \mathrm{dist(K, U^c)}$. Ausserdem sei $\chi_\varepsilon(x)$ wie fogt definiert

$$\chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{,falls } \ \mathrm{dist(x, K)} < \varepsilon, \\ \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Weiter sei $g \in C^\infty$ so gewählt, dass *supp* $g \subset B_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$. Dass es möglich ist, ein solches g zu wählen, zeigt das folgende Beispiel:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(|x|-1)^2(|x|+1)^2}} & \text{falls } |x| < 1, \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun setzen wir
$$f(x) := (\chi_\varepsilon \star g_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \chi_\varepsilon(y)\, g_\varepsilon(x-y)\, dy,$$
wobei
$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} g_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$
Damit ist $f \in C^\infty$, da $\chi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es bleibt noch zu zeigen

i) $f(x) \equiv 1$ auf K

ii) $f(x) \equiv 0$ ausserhalb von U

Beweis von i):
$$supp\, g \subset B_1(0) \Rightarrow supp_x\, g_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(0),$$
da
$$g_\varepsilon(x) \neq 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| < 1$$
und
$$supp_y\, g_\varepsilon(x-y) \subset B_\varepsilon(x),$$
da
$$g_\varepsilon(x-y) \neq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; |x-y| < \varepsilon.$$
Daraus folgt für $x \in k$: $g_\varepsilon(x-y) \neq 0$ nur falls $|x-y| < \varepsilon$, woraus sich sofort das folgende Resultat ergibt
$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)\, g_\varepsilon(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) = 1.$$
Beweis von ii): Aus *i)* ist bekannt: $supp_y\, g_\varepsilon(x-y) \subset B_\varepsilon(x)$. Da $x \in U^c$ und aus der Wahl von ε folgt nun sofort
$$\int_{\mathbb{R}_n} \chi_\varepsilon(y) g_\varepsilon(x-y)\, dy = 0, \quad \text{da} \quad B_\varepsilon(x) \cap K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n, \text{dist (z, K)} < \varepsilon\} = \emptyset.$$
Das so konstruierte f ist gerade das gesuchte Θ.

Lemma III.2.3. (Existenz einer Zerlegung der Eins). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n, K$ kompakt und es sei $O_1, \ldots, O_P$ eine offene Überdeckung von K, das heisst $K \subset \bigcup_{i=1}^P O_i, O_i$ offen. Dann gibt es $\Theta_i \in C_0^\infty(O_i)$ mit $0 \leq \Theta_i \leq 1$ und $\sum_{i=1}^P \Theta_i = 1$.*

Beweis III.2.3: Gemäss Lemma III.2.2 gibt es für jedes O_i ein f_i mit den folgenden Eigenschaften:

- $f_i \in C_0^\infty(O_i)$
- $0 \leq f_i \leq 1$
- $f_i \equiv 1$ auf $\overline{(\tilde{O}_i \cap K)}$,

wobei

$$\tilde{U}_i := \{z \in U_i \ \mid \ \mathrm{dist}\,(\mathrm{z}, \mathrm{U_i^c}) \geq \varepsilon\,\}\,.$$

Dabei ist $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass gilt $K \subset \bigcup_{i=1}^{P} \tilde{O}_i$. Die Existenz eines solchen ε wird durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt.
Setze nun

$$\Theta_i(x) := \begin{cases} \dfrac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^{P} f_j(x)} & \text{falls } x \in O_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist nun einfach einzusehen, dass die so definierten Θ_i das Gewünschte liefern. □

Beweis der Proposition III.2.1: Nun sind wir in der Lage, Proposition III.2.1 zu beweisen. Es bezeichne

$$I := \{O | O \subset \mathbb{R}^n, O \quad \text{offen} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(O) \ : \ \langle u,\, \varphi\rangle = 0\}$$

und $\omega := \bigcup_{O \in I} O$. Als Vereinigung offener Mengen ist ω offen. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$. Es bleibt noch zu zeigen $\langle u,\, \varphi\rangle = 0$. Es sei K der Träger von φ. Es gilt somit

$$K \subset \omega = \bigcup_{O \in I} O.$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von K durch Elemente aus I, das heisst $\exists \quad O_1, \ldots, O_P \in I$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{P} O_i$. Gemäss Lemma III.2.3 gibt es eine Zerlegung der Eins, $\Theta_i, i = 1, \ldots, P$ mit $\sum_{i=1}^{P} \Theta_i \equiv 1$ auf K und *supp* $\Theta_i \subset O_i$. Es folgt nun:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{P} \varphi_i, \quad \text{wobei} \quad \varphi_i = \Theta_i \varphi \in C_0^\infty\,(O_i).$$

Da $O_i \in I$ folgt: $\langle u,\, \varphi_i\rangle = 0$, woraus wegen der Linearität sofort die Behauptung $\langle u,\, \varphi\rangle = 0$ folgt. Ausserdem ist aus der Definition von ω klar, dass ω im oben erwähnten Sinn maximal ist.

Notation III.2.4. *$\mathcal{E}'(\Omega)$ bezeichne die Menge der Distributionen aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger.*

Beispiele:

i) $\delta_0 :\quad$ *supp* $\delta_0 = \{0\}$

ii) $\partial^\alpha \delta_0 :\quad$ *supp* $\partial^\alpha \delta_0 = \{0\}$

Satz III.2.5. *Die Elemente aus $\mathcal{E}'(\Omega)$ haben endliche Ordnung, das heisst $\forall u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ $\exists\, p \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \exists\, C : \ |\langle u,\ \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

wobei $p < \infty$. □

Beweis des Satzes III.2.5: Es sei $K = supp\, u$.
Nun definieren wir

$$\forall x \in K \quad r_x := \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(\mathrm{x}, \partial\,\Omega) & \text{falls } \Omega \text{ einen Rand hat,} \\ \\ 1 & \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

Es gilt nun, dass $\bigcup_{x\in K} B_{r_x}(x)$ eine Überdeckung von K ist. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, das heisst

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{P} B_{r_i}(x_i) \;\; (r_i := r_{x_i}).$$

Für $O = \bigcup_{i=1}^{P} B_{r_i}(x_i)$ gilt nun, dass $\overline{O} \subset \Omega$ und $\overline{O}$ kompakt: Es ist klar, dass $\overline{O}$ abgeschlossen und beschränkt ist. (Man beachte, dass K selbst kompakt, also abgeschlossen und beschränkt ist.) Auf Grund der Definition von r_x ist ebenfalls sofort klar, dass $\overline{O} \subset \Omega$. Gemäss Lemma III.2.2 gibt es ein $\Theta \in C_0^\infty(O)$ mit $\Theta \equiv 1$ auf K, $supp\ \Theta \subset O$ und $0 \leq \Theta \leq 1$. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir können φ folgendermassen umschreiben

$$\varphi = \Theta\,\varphi + (\varphi - \Theta\varphi).$$

Da $\varphi - \Theta\varphi \in C_0^\infty(\Omega\backslash K)$ folgt nun: $\langle u,\ \varphi - \Theta\varphi\rangle = 0$. Somit haben wir: $\langle u,\ \varphi\rangle = \langle u,\ \Theta\varphi\rangle$ und $\Theta\varphi \in C_0^\infty(O)$, $supp\,\Theta\varphi \subset \overline{O}$. Es sei nun q die Ordnung von u auf $\overline{O}$, das heisst

$$|\langle u,\ \Theta\varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq q} \|\partial^\alpha(\Theta\,\varphi)\|_\infty. \tag{1}$$

Die Leibnitz-Formel liefert

$$\partial^\alpha(\Theta\varphi) = \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\gamma^\alpha \partial^\gamma\varphi\,\partial^{\alpha-\gamma}\,\Theta.$$

Da der Beitrag von $\partial^{\alpha-\gamma}\Theta$ in (1) nur von Θ, O und u abhängt, gibt es eine Konstante C', so dass gilt:

$$|\langle u,\ \varphi\rangle| = |\langle u,\ \Theta\varphi\rangle| \leq C' \sum_{|\alpha|\leq q} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty\ .$$

Dies zeigt, dass $\mathrm{ord}\,(\mathrm{u}) \leq \mathrm{q}$. Andererseits folgt aus der Definition von q auch, dass $\mathrm{ord}\,(\mathrm{u}) \geq \mathrm{q}$ gilt. Damit ist der Beweis fertig. □

Proposition III.2.6. *Es sei $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und p sei die Ordnung von u. Es sei weiter $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $\partial^\alpha\varphi = 0$ auf $supp\,u$ für beliebige α mit $|\alpha| \leq p$. Dann gilt:*

$$\langle u,\ \varphi\rangle = 0.$$

□

Beweis der Proposition III.2.6: Falls $supp\,\varphi \subset (supp\,u)^c$, ist aus der Definition von $supp\,u$ klar, dass gilt $\langle u,\ \varphi\rangle = 0$. Es sei nun $K = supp\,u$, K kompakt. Ausserdem sei

$$\mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_{2\varepsilon}(x), \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$K_{2\varepsilon} = \{z \ ; \ \text{dist(z, K)} \leq 2\varepsilon\}.$$

Wir setzen $\psi_\varepsilon = \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}} \star \chi_\varepsilon$, wobei wie üblich

$$\chi \in C_0^\infty(B_1(0)), \ \int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1 \quad \text{und} \quad \chi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \chi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \ .$$

Ausserdem gilt für ε klein genug

$$\psi_\varepsilon \in C_0^\infty.$$

(Aus Satz III.1.2 ergibt sich $\psi_\varepsilon \in C^\infty$.) Die Tatsache, dass ψ_ε einen kompakten Träger hat, folgt unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

Behauptung: $\psi_\varepsilon \equiv 1$ auf $K_\varepsilon = \{z \ ; \ \text{dist(z,K)} \leq \varepsilon\}$
$\psi_\varepsilon \equiv 0$ auf $K_{3\varepsilon}^c$ und

$$supp\, \psi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}.$$

Beweis der Behauptung: Sei

$$x \in K_\varepsilon \ \psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(y)\chi_\varepsilon(x-y)d\,y.$$

$$supp\, \chi \subset B_1(0) \Rightarrow supp_z\, \chi_\varepsilon(z) \subset B_\varepsilon(0)$$

$$\Rightarrow supp_y\, \chi_\varepsilon(x-y) \subset B_\varepsilon(x).$$

Da $x \in K_\varepsilon$, muss $y \in K_{2\varepsilon}$, wenn $\chi_\varepsilon(x-y) \neq 0$ sein soll. Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(y)\, \chi_\varepsilon(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) = 1.$$

Sei nun $x \in K_{3\varepsilon}^c$. Es folgt nun sofort

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = 0,$$

da

$$B_\varepsilon(x) \cap K_{2\varepsilon} = \emptyset.$$

Es folgt nun auch sofort, dass $supp\, \psi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$.

Als Nächstes schreiben wir φ als

$$\varphi = \varphi\, \psi_\varepsilon + (1-\psi_\varepsilon)\varphi.$$

Da $supp\,(1-\psi_\varepsilon)\varphi \subset K_\varepsilon^c$ gilt, folgt $\langle u, \ (1-\psi_\varepsilon)\,\varphi\rangle = 0$. Daraus wiederum folgt $\langle u, \ \varphi\rangle = \langle u, \ \varphi\psi_\varepsilon\rangle$. Das Weitern gilt

$$\|\partial^\alpha \psi_\varepsilon\|_\infty \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} :$$

Aus Satz III.1.2 wissen wir

$$\partial^\alpha(\mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}} \star \chi_\varepsilon) = \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}} \star \partial^\alpha \chi_\varepsilon$$

und

$$\partial^\alpha \chi_\varepsilon = \varepsilon^{-n-|\alpha|}(\partial^\alpha \chi) \Rightarrow \|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_1 = \varepsilon^{-n-|\alpha|} C_\alpha$$

Daraus erhält man obiges Resultat.

Nun seien $x \in K_{3\varepsilon}, y \in K$ und es sei $|x-y| \leq 4\varepsilon$. Taylorentwicklung um y liefert nun für alle γ mit $|\gamma| \leq p$.

$$\partial^\gamma \varphi(x) = \partial^\gamma \varphi(y) + \sum_{\substack{|\alpha|\leq p \\ \gamma<\alpha}} \partial^\alpha \varphi(y)\ \frac{h^{\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)!} + \sum_{|\beta|=p+1} \partial^\beta \varphi(\xi)\ \frac{h^{\beta-\gamma}}{(\beta-\gamma)!}$$

wobei

$$\frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

und

$$x - y = (h_1, \dots, h_n),\ h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}\ .$$

Daraus erhält man

$$\|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(K_{3\varepsilon})} \leq C_\varphi \varepsilon^{p+1-|\gamma|}, \quad \text{da voraussetzungsgemäss} \quad \partial^\gamma \varphi = 0 \quad \forall |\gamma| \leq p\ .$$

(Es gilt sogar: $C_\varphi = \|\varphi\|_{C^{p+1}}$.) Schliesslich gilt

$$\begin{aligned} |\langle u,\ \varphi\rangle| = |\langle u,\ \varphi\,\psi_\varepsilon\rangle| &\leq C \sum_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha(\varphi\,\psi_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C \cdot \sum_{|\alpha|\leq p} \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(K_{3\varepsilon})} \|\partial^{\alpha-\gamma}\, \psi_{\varepsilon\|_\infty} C\,\gamma \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq p} C'' \varepsilon^{p+1-|\alpha|} \leq C_{\varphi,u} \cdot \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Da diese Überlgungen für alle $\varepsilon > 0$ richtig sind, folgt nun die Behauptung $\langle u,\ \varphi\rangle = 0$.
□

Korollar III.2.7. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\operatorname{supp} u = \{0\}$ und $\operatorname{ord} u = p$. Dann gibt es $C_\gamma \in \mathbb{R}$ für alle γ mit $|\gamma| \leq p$, so dass gilt*

$$u = \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma \partial^\gamma \delta_0.$$

□

Beweis des Korollars III.2.7: Jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann mit Hilfe der Taylorentwicklung wie folgt geschrieben werden

$$\varphi(x) = \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma\, \partial^\gamma\, \varphi(0) x^\gamma + r(x), \quad \text{wobei} \quad x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}.$$

Es gilt $\partial^\gamma r(0) = 0$ für $|\gamma| \leq p$. Andererseits kann φ auch dargestellt werden als $\varphi = [\chi + (1-\chi)]\varphi$, wobei $\chi \in C_0^\infty(B_1(0))$ und $\chi \equiv 1$ auf $B_{1/2}(0)$. Daraus folgt unmittelbar: $\langle u, (1-\chi)\varphi\rangle = 0$. Nun haben wir

$$\chi\varphi = \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma \partial^\gamma \varphi(0)\ \chi\, x^\gamma + \chi\, r\ .$$

Auch hier gilt

$$\partial^\gamma (r\chi)(0) = 0 \quad \forall |\gamma| \leq p,$$

woraus wegen Proposition III.2.6 folg $\langle u, r\chi\rangle = 0$. Schliesslich gilt

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \chi\,\varphi\rangle &= \left\langle u, \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma\, \partial^\gamma \varphi(0)\chi x^\gamma + r\chi \right\rangle \\
&= \left\langle u, \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma\, \partial^\gamma \varphi(0)\,\chi\, x^\gamma \right\rangle + \langle u, r\chi\rangle \\
&= \sum_{|\gamma|\leq p} C_\gamma\, \partial^\gamma\, \varphi(0)\langle u,\ \chi\, x^\gamma\rangle = \sum_{|\gamma|\leq p} C'_\gamma \partial^\gamma\, \varphi(0) \\
&= \sum_{|\gamma|\leq p} C'_\gamma \langle \delta_0, \partial^\gamma\, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Und das impliziert die Existenz einer Konstanten C''_γ so, dass

$$u = \sum_{|\gamma|\leq p} C''_\gamma \partial^\gamma\, \delta_0\ .$$

□

III.3 Faltung einer Distribution mit einer C_0^∞-Funktion

Definition - Proposition III.3.1. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir*

$$u \star \varphi(x) := \langle u(y), \varphi(x-y)\rangle_{\mathcal{D}'_y, C^\infty_{0y}}.$$

$$u \star \varphi \in C^\infty,$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

gilt

$$\partial^\alpha (u \star \varphi) = u \star \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha u \star \varphi.$$

Falls $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$u \star \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und

$$supp\, u \star \varphi \subset \ \ supp\, u + supp\, \varphi.$$

Beweis der Proposition III.3.1: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ist $y \mapsto \varphi(x-y)$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daher macht $\langle u,\, \varphi(x-\cdot)\rangle$ Sinn.

Behauptung 1: $u \star \varphi \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $x \in B_1(x_0)$. Dann gilt $\mathit{supp}_y\, \varphi(x-y) \subset K$, wobei K kompakt ist. Ausserdem sei K so gewählt, dass gilt

$$x - y \in \mathit{supp}\,\varphi \quad \Rightarrow \quad y \in -\mathit{supp}\,\varphi + \overline{B_1(x_0)} \subset K,$$

wobei K unabhängig ist von $x \in B_1(x_0)$. Es sei nun p die Ordnung von u auf K. Es gibt weiter eine Konstante $C_{u,K} > 0$, so dass gilt

$$\begin{aligned}
|\langle u, \varphi(x-y)\rangle - \langle u, \varphi(x_0-y)\rangle| &= |\langle u, \varphi(x-y) - \varphi(x_0-y)\rangle| \\
&\leq C_{u,K} \sum_{|\alpha|\leq p} \|\partial_y^\alpha(\varphi(x-\cdot) - \varphi(x_0-\cdot)\|_\infty \\
&\leq C_{u,K} \sum_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha\varphi(x-\cdot) - \partial^\alpha\varphi(x_0-\cdot)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Da für alle α in $\mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq p$ gilt $\partial^\alpha\varphi \in C^1(\mathit{supp}\,\varphi)$, folgt daraus

$$\forall z, t \in \mathbb{R}^n : \|\partial^\alpha\varphi(z) - \partial^\alpha\varphi(t)\|_{L^\infty} \leq C_\varphi |z-t|.$$

Insgesamt gilt folglich

$$|\langle u, \varphi(x-y)\rangle - \langle u, \varphi(x_0-y)\rangle| \leq C_{u,K,\varphi}|x-x_0|,$$

woraus sofort folgt, dass $\langle u, \varphi(x-\cdot)\rangle = u \star \varphi$ stetig ist und die Behauptung 1 ist bewiesen.

Als Nächstes werden wir zeigen, dass $u \star \varphi \in C^1$ und dass gilt

$$\partial_{x_i}(u\star\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(u \star \varphi) = u \star \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial\, u}{\partial x_i}\right) \star \varphi.$$

Wir nehmen an, dass $h \in (-1,1)$ $h \neq 0$ und dass

$$\mathit{supp}_y\, \varphi(x_0 + he_i - y) \subset K, \quad \mathit{supp}_y\, \varphi(x_0-y) \subset K, \quad \mathit{supp}_y\, \frac{\partial\,\varphi}{\partial x_i}\,(x_0-y) \subset K$$

und ausserdem sei p die Ordnung von u auf K. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\langle u, \varphi\left(x_0 + h\, e_i - y)\rangle - \langle u, \varphi(x_0-y))\right\rangle}{h} - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_0-y)\right\rangle\right| \\
&= \left|\frac{u\star\varphi(x_0+he_i) - u\star\varphi(x_0)}{h} - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_0-y)\right\rangle\right| \\
&\leq C_{u,K}\sum_{|\alpha|\leq p}\left\|\frac{\partial_y^\alpha\varphi(x_0+h\,e_i-\cdot) - \partial_y^\alpha\varphi(x_0-\cdot)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i}\partial_y^\alpha\varphi(x_0-\cdot)\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Tatsachen, dass

$$x_0 + he_i - y = x_0 - (y - h\,e_i), \quad \partial_{x_i}\partial_y^\alpha \varphi(x_0 - y) = -\partial_{y_i}\partial_y^\alpha \varphi(x_0 - y)$$

und

$$\|\varphi(x_0 - \cdot)\|_{C^{p+2}(\mathbb{R}^n)} < C < \infty,$$

da φ kompakten Träger hat, folgt

$$\left\| \frac{\partial_y^\alpha \varphi(x_0 - (\cdot - he_i)) - \partial_y^\alpha \varphi(x_0 - \cdot)}{h} + \partial_{y_i}\partial_y^\alpha \varphi(x_0 - \cdot) \right\|_\infty$$

$$\leq \|\varphi\|_{C^{p+2}(\mathbb{R}^n)} h,$$

denn es gilt

$$\left\| \frac{\partial_y^\alpha \varphi\,(x_0 - (\cdot - he_i)) - \partial_y^\alpha \varphi(x_0 - \cdot)}{h} + \partial_{y_i}\,\partial_y^\alpha\,\varphi\,(x_0 - \cdot) \right\|_\infty$$

$$= \left\| -\partial_{y_i}\partial^\alpha\,\varphi(x - \cdot) + \sum_{\substack{\beta > \alpha \\ |\beta| \geq |\alpha| + 2 \\ |\beta| \leq p+1}} \partial^\beta \varphi\,(x_0 - \cdot)\frac{1}{(\beta - \alpha)!} h^{\beta_i - \alpha_i - 1} \right.$$

$$\left. + \sum_{|\delta| = p+2} \partial^\delta \varphi(\xi) \frac{1}{(\delta - \alpha)!}\, h^{\delta_i - \alpha_i - 1} + \partial_{y_i}\partial^\alpha \varphi(x_0 - \cdot) \right\|_\infty$$

$$\leq \|\varphi\|_{C^{p+2}\,(\mathbb{R}^n)}\, h.$$

Daraus folgt

$$\frac{u \star \varphi(x_0 + h\,e_i) - u \star \varphi(x_0)}{h} - u \star \frac{\partial\,\varphi}{\partial x_i} \to 0.$$

Dies wiederum impliziert, dass $\frac{\partial}{\partial x_i}(u \star \varphi)$ existiert und die folgende Gleichung gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u \star \varphi) = u \star \frac{\partial\,\varphi}{\partial x_i}.$$

Aus der Definition der Ableitung einer Distribution folgt nun auch sofort, dass ausserdem gilt

$$u \star \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial\,y_i}u\right) \star \varphi.$$

Aus der schon oben bewiesenen Behauptung folgt, dass $u \star \frac{\partial\,\varphi}{\partial x_i} \in C^0$, woraus folgt, dass $u \star \varphi \in C^1$. Um zu zeigen, dass $u \star \varphi \in C^2$, genügt es zu zeigen, dass $u \star \frac{\partial\,\varphi}{\partial x_i} \in C^1$, dies geschieht analog zu den oben ausgeführten Überlegungen. Durch iteratives Vorgehen erhält man schliesslich die Behauptung, dass $u \star \varphi \in C^\infty$ und dass $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\partial^\alpha (u \star \varphi) = u \star \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha u \star \varphi.$$

Noch eine klärende Bemerkung zur letzten Gleichung

$$u \star \partial_{x_i}\varphi(x) = \left\langle u(y), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x-y) \right\rangle = \left\langle u(y), -\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(x-y) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial y_i}(y),\, \varphi(x-y) \right\rangle.$$

Das impliziert, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u \star \varphi) = u \star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial\, y_i} u\right) \star \varphi.$$

Daraus erhält man die Behauptung für allgmeines α durch Iteration.

Im Folgenden sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Es sei weiter $x \in (supp\, u + supp\, \varphi)^c$ und es sei $y \in supp\, u$.

Behauptung 2: Unter obigen Voraussetzungen ist $\varphi(x-y) = 0$.

Beweis der Behauptung 2: Annahme: $\varphi(x-y) \neq 0$. Dann folgt unmittelbar, dass $x - y \in supp\, \varphi$. Woraus aber folgt: $x \in supp\, \varphi + supp\, u$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Dies zeigt, dass gilt $supp(u \star \varphi) \subset supp\, u + supp\, \varphi$. Es ist also auch klar, dass $u \star \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das schliesst den Beweis von Proposition III.3.1.ab.

Proposition III.3.2. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
Dann gilt $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle u \star \varphi, \psi \rangle = \langle u,\, \check{\varphi} \star \psi \rangle,$$

wobei

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

□

Lemma III.3.3. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

i) $\langle u(y), \varphi(x,y) \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\partial_x^\alpha(\langle u, \varphi(x,\cdot)\rangle) = \langle u, \partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot)\rangle$.

iii) $\displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}^n} \langle u, \varphi(x,\cdot)\rangle = \langle u, \int_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,\cdot)\rangle$.

□

Beweis des Lemmas III.3.3: Die Beweise von i) und ii) verlaufen analog zum Beweis von Proposition III.3.1. Für iii) benützt man ii) und die folgende Tatsache

$$\frac{\partial}{\partial\, x_i} \int^{x_i} \langle u,\, \varphi(x,\cdot)\rangle = \langle u,\, \varphi(x_i,\cdot)\rangle.$$

(⇒ vgl. auch Bony, "Cours d'Analyse", Seite 131 f.) □

Beweis der Proposition III.3.2: Aus Proposition III.3.1 folgt, dass $u \star \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Somit definiert $u \star \varphi$ tatsächlich eine Distribution, es gilt also:

$$\langle u \star \varphi, \psi \rangle = \int_{x\in\mathbb{R}^n} u \star \varphi(x)\psi(x) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \langle u(y), \varphi(x-y)\psi(x)\rangle\ ,$$

denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \star \varphi(x)\,\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(y),\, \varphi(x-y)\rangle\,\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(y), \varphi(x-y)\,\psi(x)\rangle.$$

Anwendung von Lemma III.3.3 iii) liefert:

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n} \langle u(y), \varphi(x-y)\,\psi(x)\rangle = \left\langle u(y), \int_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,\psi(x)\right\rangle = \left\langle u(y), \int_{x\in\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(y-x)\,\psi(x)\right\rangle$$

$$= \langle u(y), \check{\varphi} \star \psi(y)\rangle.$$

□

Korollar III.3.4. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Folge $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $u_i \to u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis von Korollar III.3.4: Es sei $\chi \in C_0^\infty\big(B_1(0)\big)$, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$. Es sei weiter ε_i eine Folge, die gegen Null konvergiert. Wie üblich setzen wir

$$\chi_{\varepsilon_i}(z) = \frac{1}{\varepsilon_i^n}\chi\left(\frac{z}{\varepsilon_i}\right).$$

Proposition III.3.1 besagt, dass

$$u \star \chi_{\varepsilon_i} \in C^\infty.$$

Behauptung 1: $u \star \chi_{\varepsilon_i} \to u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis der Behauptung 1: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann besagt Proposition III.3.2, dass gilt

$$\langle u_i, \varphi\rangle = \langle u \star \chi_{\varepsilon_i}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi\rangle\ ,$$

wobei

$$\check{\chi}_{\varepsilon_i}(z) = \frac{1}{\varepsilon_i^n}\ \check{\chi}\left(\frac{z}{\varepsilon_i}\right) = \frac{1}{\varepsilon_i^n}\ \chi\left(\frac{-z}{\varepsilon_i}\right)\ .$$

Und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi} = 1.$$

Aus den Satz III.1.3 folgt ausserdem

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n, \quad K \quad \text{kompakt} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \varphi_i = \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi \longrightarrow \varphi \text{ in } C^p(K). \tag{1}$$

Als Nächstes untersuchen wir die folgende Frage

$$\langle u, \varphi_i\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle\ ? \tag{2}$$

Dabei sind φ_i und φ Elemente aus C_0^∞. (Dass $\varphi_i \in C_0^\infty$ folgt aus Satz III.1.2 und der Tatsache, dass $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.) Diese Frage kann jedoch nicht ohne Weiteres positiv beantwortet werden. Auch wenn (1) gilt, muss (2) nicht unbedingt gelten. Der springende Punkt ist der Träger von φ_i. Gilt $supp\,\varphi_i \subset K$, wobei K kompakt und unabhängig von i ist, gilt (2). In der Tat kann man in diesem Fall nämlich $|\langle u,\, \varphi_i\rangle - \langle u,\, \varphi\rangle|$ wie folgt abschätzen

$$|\langle u,\, \varphi_i\rangle - \langle u,\, \varphi\rangle| \leq C_{u,K} \sum_{|\gamma|\leq p} \|\partial^\gamma(\varphi_i - \varphi)\|_\infty = C_{u,K}\|\varphi_i - \varphi\|_{C^p}$$

und da $\|\varphi_i - \varphi\|_{C^p}$ gegen null strebt , bekommt man (2). In unserem Fall gilt

$$supp\,\check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi \subset supp\,\check{\chi}_{\varepsilon_i} + supp\,\varphi \subset \overline{B_{\varepsilon_i}(0)} + supp\,\varphi \subset K.$$

Daher gilt

$$\langle u,\, \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle,$$

das heisst die gesuchten $u_i \in C^\infty$ sind gerade die $u \star \chi_{\varepsilon_i}$. □

Diese letzte Proposition zeigt somit, dass die Faltung einer Distribution mit einer C_0^∞-Funktion eine "natürliche" Operation ist: Wir können Eigenschaften von Distributionen beweisen, indem wir von bekannten Funktionen ausgehen und dann zum Limes übergehen. Ausserdem sieht man, dass man mit den Distributionen nicht ein viel zu grosses Objekt von verallgemeinerten Funktionen definiert hat. Schliesslich kann $\mathcal{D}'$ auch als der kleinste Raum angesehen werden, der die glatten Funktionen und ihre Limites (im Sinne der Distributionen) enthält.

Als Nächstes betrachten wir Translationen. Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Translation τ_a wie folgt definiert $\tau_a\varphi(x) := \varphi(x-a)$. Analog geht man für Distributionen vor.

Notation III.3.5.

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a u, \varphi\rangle := \langle u, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

□

Proposition III.3.6. $\forall\ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\tau_a(u \star \varphi) = (\tau_a u) \star \varphi = u \star \tau_a\varphi.$$

□

Beweis der Proposition III.3.6:

$$\begin{aligned}
\tau_a(u \star \varphi(x)) = u \star \varphi(x-a) \quad &= \langle u(y),\ \varphi(x-a-y)\rangle \\
&= \langle u(y),\ \varphi(x-(y+a))\rangle \\
&= \langle u(y),\ \tau_a\varphi(x-y)\rangle \\
&= \langle \tau_a u(y),\ \varphi(x-y)\rangle
\end{aligned}$$

□

Bemerkung III.3.7. Es sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $U : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei die folgende Abbildung: $U : \varphi \mapsto u \star \varphi$. Es ist sofort ersichtlich, dass U linear ist. Aus Kapitel II wissen wir $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei (C^∞, P_i) ein Fréchetraum ist mit $P_i(f) = \|f\|_{C^i(K_i)}$ wobei K_i kompakt, $K_i \subset K_{i+1}$ und $\cup_i K_i = \mathbb{R}^n$. Dann ist $U\Big|_{C_0^\infty}$ stetig.

Dies führt uns zum folgenden Satz.

Satz III.3.8. *Es sei $U \in C^0(C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ linear und kommutiere mit der Translation, das heisst*

$$U\tau_a\varphi = \tau_a U\varphi.$$

Dann gibt es ein $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so dass gilt

$$U\varphi = u \star \varphi.$$

Beweis des SatzesIII.3.8: vgl Bony "Cours d'Analyse", Seite 139. Satz 7.3.2.

III.4 Faltung zweier Distributionen

Definition - Proposition III.4.1. *(Erweiterung der Dualität)*
Es sei $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, es sei $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $\theta \equiv 1$ auf supp u. Dann definieren wir $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$\langle u,\, \varphi\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} := \langle u,\, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}',C_0^\infty}.$$

$\langle u,\, \varphi\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}$ ist unabhängig von der Wahl von θ.

Beweis der Proposition III.4.1: Es seien $\theta, \theta' \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\theta = \theta' = 1$ auf *supp* u.

Dann gilt

$$\langle u, \theta\varphi\rangle - \langle u, \theta'\varphi\rangle = \langle u, (\theta - \theta')\varphi\rangle = 0,$$

da

$$\theta - \theta' \equiv 0 \quad \text{auf} \quad \mathit{supp}\, u,$$

also

$$\theta - \theta' \in C_0^\infty((\mathit{supp}\, u)^C).$$

Definition - Proposition III.4.2. *Es sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann definieren wir*

$$u \star \varphi(x) := \langle u(y),\ \varphi(x-y)\rangle.$$

Es gilt

i) $u \star \varphi \in C^\infty$.

ii) $\partial^\alpha(u \star \varphi) = u \star \partial^\alpha\varphi = (\partial^\alpha u) \star \varphi$. □

Beweis III.4.2: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Proposition III.3.1, zumal Satz III.2.5 besagt, dass $ord(u, \mathbb{R}^n) < \infty$. $\square$

Definition - Proposition III.4.3. (Faltung zwischen $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{E}'$)
Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Es gibt dann genau ein $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle w,\ \varphi \rangle = \langle u,\ \check{v} \star \varphi \rangle,$$

wobei

$$\langle \check{v},\ \varphi \rangle := \langle v,\ \check{\varphi} \rangle.$$

w bezeichnen wir als $u \star v$. Wir definieren nun

$$\langle v \star u,\ \varphi \rangle_{\mathcal{D}', C_0^\infty} := \langle v,\ \check{u} \star \varphi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$

Weiter gilt

$$v \star u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$u \star v = v \star u,$$

wobei

$$\langle u \star v,\ \varphi \rangle := \langle u, \check{v} \star \varphi \rangle.$$

Ausserdem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ (u \star v) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \star v = u \star \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Sind sowohl u als auch v in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$supp\,(u \star v)\ \subset\ supp\, u + supp\, v$$

und

$$u \star v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Beweis der Proposition-Definition III.4.3:

i) $u \star v \in \mathcal{D}'$ und $v \star u \in \mathcal{D}'$: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, es gilt also $supp\,\varphi \subset K, K$ kompakt. Aus Proposition III.3.1 wissen wir

$$supp\,\check{v} \star \varphi \subset supp\,\check{v} + supp\,\varphi.$$

Weiter können wir K' kompakt so wählen, dass gilt: $supp\,\check{v} + supp\,\varphi \subset K'$. Sei nun p die Ordnung von u auf K', dann gibt es eine Konstante $C_{u,K'} > 0$, so dass gilt:

$$|\langle u, \check{v} \star \varphi \rangle| \leq C_{u,K'} \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha(\check{v} \star \varphi)\|_\infty.$$

Nun gilt aber

$$\partial^\alpha(\check{v} \star \varphi) = \check{v} \star \partial^\alpha \varphi = \langle \check{v}(y), \partial^\alpha \varphi(x-y)\rangle$$

und

$$\|\partial^\alpha(\check{v} \star \varphi)\|_\infty = \|\langle \check{v}(y), \partial^\alpha \varphi(x-y)\rangle\|_{L^\infty_x}.$$

Es sei nun q die Ordnung von $\check{v}$ auf K'', dann gibt es eine Konstante $C_{\check{v}} > 0$ so dass gilt

$$|\langle \check{v},\ \varphi\rangle| \leq C_{\check{v}} \sum_{|\beta|\leq q} \|\partial^\beta \psi\|_\infty,$$

wobei

$$\psi(y) := \partial^\alpha \varphi(x-y).$$

Da $\partial^\beta_y \psi = \partial^\beta_y \big(\partial^\alpha \varphi(x-y)\big) = (-1)^\beta \partial^{\alpha+\beta}\varphi(x-y)$, folgt nun sofort

$$\|\partial^\alpha(\check{v} \star \varphi)\|_\infty \leq C_{\check{v},\ K''} \sum_{|\beta|\leq q} \|\partial^{\alpha+\beta}\varphi\|_\infty\ .$$

Woraus wiederum sofort folgt, dass es eine Konstante $C_{u,v,K} > 0$ gibt, so dass $\forall \varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|\langle u \star v, \varphi\rangle| \leq C_{u,v,K} \sum_{|\gamma|\leq p+q} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty.$$

Dies zeigt, dass

$$u \star v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Der Beweis der Behauptung, dass $v \star u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist, verläuft analog. Man beachte dazu

$$\langle v \star u,\ \varphi\rangle := \langle v,\ \check{u} \star \varphi\rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \langle v, \theta(\check{u} \star \varphi)\rangle_{\mathcal{D}', C^\infty_0},$$

wobei

$$\theta \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)\ ,\ \theta \equiv 1 \quad \text{auf} \quad \mathit{supp}\, v.$$

ii) $u \star v = v \star u$: Es sei $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathit{supp}\,\chi \subset B_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$. Es sei weiter ε_i eine Folge mit $\varepsilon_i \to 0$. Wie üblich sei $\chi_{\varepsilon_i}(z) = \frac{1}{\varepsilon_i^n}\chi(\frac{z}{\varepsilon_i})$. Es bezeichne dann $u_i := u \star \chi_{\varepsilon_i} \star u \in C^\infty$ und $v_i := v \star \chi_{\varepsilon_i} \star v \in C^\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle u_i \star v_i, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u_i \star v_i(z)\varphi(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dz \int_{\mathbb{R}^n} u_i(z-y)v_i(y)\varphi(z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dz \left[\int_{\mathbb{R}^n} u_i(y)v_i(z-y)dy\right] \varphi(z) = \langle v_i \star u_i,\ \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Behauptung a): $\langle u_i \star v_i,\ \varphi\rangle \longrightarrow \langle u \star v,\ \varphi\rangle$.

Behauptung b): $\check{v}_i \star \varphi \in C^\infty_0 \longrightarrow \check{v} \star \varphi \in C^\infty_0$ $\forall m$ in $C^m(K)$ für beliebige m in $\mathbb{N}$ und K kompakt in $\mathbb{R}^n$.

Beweis der Behauptung b):

$$\begin{aligned}
\check{v}_i \star \varphi(x) &= \langle \check{v}_i(y),\ \varphi(x-y)\rangle = \langle v_i(y),\ \check{\varphi}(x-y)\rangle \\
&= \langle v \star \chi_{\varepsilon_i}(y),\ \varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle v(y), \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle v(y), (\check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi)^{\vee}(x-y)\rangle \\
&= \langle \check{v}(y),\ \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi(x-y)\rangle \\
&= \langle \check{v} \star \chi_{\varepsilon_i}(y),\ \varphi(x-y)\rangle.
\end{aligned}$$

Da $\partial^\alpha(\check{v}_i \star \varphi) = \check{v}_i \star \partial^\alpha \varphi$, genügt es zu zeigen, dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\check{v}_i \star \varphi - \check{v} \star \varphi\|_\infty \to 0,$$

das heisst

$$\|\langle \check{v},\ \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi(x-\cdot) - \varphi(x-\cdot)\rangle\|_\infty \to 0.$$

Sei p die Ordnung von v. Ausserdem ist *supp* $\check{v}$ kompakt und es gibt eine Konstante $C_v > 0$, so dass gilt

$$|\langle \check{v}, \psi\rangle| \ \le C_v \sum_{|\alpha| \le p} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Es genügt nun zu zeigen

$$\|\partial_y^\alpha\big(\check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi(x-\cdot) - \varphi(x-\cdot)\big)\|_\infty \to 0\ .$$

Da

$$\check{\chi}_{\varepsilon_i} \star \varphi(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi}_{\varepsilon_i}(z)\varphi(x-y-z)dz \longrightarrow \varphi(x-y) \quad \text{in} \quad C^m(K)$$

für beliebige m und K kompakt, folgt damit die Behauptung b).

Beweis der Behauptung a): Es gilt

$$\begin{aligned}
&|\langle u_i,\ \check{v}_i \star \varphi\rangle - \langle u,\ \check{v} \star \varphi\rangle| \\
&= |\langle u_i,\ \check{v}_i \star \varphi\rangle - \langle u_i,\ \check{v} \star \varphi\rangle + \langle u_i,\ \check{v} \star \varphi\rangle - \langle u,\ \check{v} \star \varphi\rangle| \\
&\le |\langle u - u_i,\ \check{v} \star \varphi\rangle| + |\langle u_i,\ \check{v} \star \varphi - \check{v}_i \star \varphi\rangle|.
\end{aligned}$$

Dabei konvergiert der erste Summand gegen Null, da

$$u_i \to u \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Sei

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \langle u_i, f\rangle = \langle u \star \chi_{\varepsilon_i}, f\rangle = \langle u, \check{\chi}_{\varepsilon_i} \star f\rangle.$$

Es bleibt also noch zu zeigen

$$|\langle u_i, \check{v} \star \varphi - \check{v}_i \star \varphi\rangle| \to 0.$$

Falls für eine Folge ψ_i mit $\psi_i \to \psi$ in C^m für beliebige m gilt: $supp\, \psi_i \subset K$ unabhängig von i, so haben wir

$$\langle u, \psi_i\rangle \to \langle u, \psi\rangle.$$

Hier in unserem Fall gilt $supp\, \check{v}_i \star \varphi \subset K$, wobei K kompakt und unabhängig von i ist. Damit ist Behauptung a) gezeigt, wenn wir zuerst $v_i \to v$ und dann $u_i \to u$ betrachten. Analog zeigt man $\langle v_i \star u_i,\ \varphi\rangle \to \langle v \star u,\ \varphi\rangle$. Die Behauptung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u \star v) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \star v = u \star \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

verläuft analog zum Beweis von Proposition III.3.1. Allgemein gilt

$$\partial^\alpha(u \star v) = (\partial^\alpha u) \star v = u \star (\partial^\alpha v).$$

Als Nächstes folgt der Beweis der Eindeutigkeit:
Wir haben gesehen, dass $w = u \star v$ die folgende Bedingung erfüllt

$$\langle u \star v,\ \varphi\rangle = \langle u,\ \check{v} \star \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ u \star v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Nehmen wir nun also an $w' \in \mathcal{D}'$ mit $\langle w',\ \varphi\rangle = \langle u,\ \check{v} \star \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$.
Dann gilt also

$$\langle w,\ \varphi\rangle = \langle w',\ \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

$$\Leftrightarrow \langle w - w',\ \varphi\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Daraus folgt aber, dass $w - w' \equiv 0$, also $w = w'$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Zum Schluss zeigen wir noch die Aussagen für den Fall

$$u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Wir wissen

$$\langle u \star v,\ \varphi\rangle = \langle u, \check{v} \star \varphi\rangle = \langle u(y), \check{v} \star \varphi(y)\rangle.$$

Weiter gilt

$$supp\, \check{v} \star \varphi \subset -supp\, v + supp\, \varphi.$$

Das heisst

$$\langle u \star v,\ \varphi\rangle \neq 0$$

nur falls sich *supp* u und $-supp\, v + supp\, \varphi$ schneiden. Dies bedeutet aber, dass $supp\, \varphi$ $supp\, u + supp\, v$ schneidet. Daraus folgen nun die beiden letzten Behauptungen der Proposition sofort. □

Bemerkung III.4.4. Achtung, Assoziativität gilt nicht automatisch! $\square$

Beispiel: Wir betrachten $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Es gilt

$$(1 \star \delta_0') \star H_{1,0} = 0,$$

denn

$$\langle 1 \star \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0', \check{1} \star \varphi \rangle = -\langle \delta_0, (\check{1} \star \varphi)' \rangle = -(\check{1} \star \varphi)'(0) = 0.$$

Andererseits gilt

$$\delta_0' \star H_{1,0} = \delta_0 \star \delta_0 = \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$$

und somit

$$1 \star (\delta_0' \star H_{1,0}) = 1 \star \delta_0 = 1.$$

δ_0 ist das Neutralelement der Faltung. Dies zeigt

$$(1 \star \delta_0') \star H_{1,0} \neq 1 \star (\delta_0' \star H_{1,0}).$$

Proposition III.4.5. *Es seien $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, wobei zwei dieser drei Distributionen kompakten Träger haben. Dann gilt*

$$u \star (v \star w) = (u \star v) \star w.$$

Beweis der Proposition III.4.5: Es sei hier exemplarisch der Fall $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. Es sei also $\chi \in C_0^\infty\big(B_1(0)\big)$ mit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$, weiter sei ε_i eine Folge mit $\varepsilon_i \to 0$. Wie üblich setzen wir

$$\chi_{\varepsilon_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon_i^n}\, \chi_{\varepsilon_i} \left(\frac{x}{\varepsilon_i}\right)$$

und

$$u_i = u \star \chi_{\varepsilon_i},\ v_i = v \star \chi_{\varepsilon_i},\ w_i = w \star \chi_{\varepsilon_i}.$$

Einerseits gilt

$$\begin{aligned}
\langle u_i \star (v_i \star w_i),\ \varphi \rangle &= \langle u_i,\ (v_i \star w_i)^\vee \star \varphi \rangle, \quad v_i \star w_i \in D'(\mathbb{R}^n) \\
&= \langle u_i(y),\ v_i \star w_i(-z),\ \varphi(y-z) \rangle\rangle \\
&= \langle u_i(y),\ \langle v_i(-z),\ \check{w}_i \star \varphi(y-z) \rangle\rangle \\
&= \langle u_i(y),\ \langle v_i(-z),\ \langle w_i(-x),\ \varphi(y-z-x) \rangle\rangle\rangle \\
&= \int dy\, u_i(y) \int dz\, v_i(z) \int dx\, w_i(x)\, \varphi(y+z+x) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
\langle (u_i \star v_i) \star w_i,\, \varphi\rangle &= \langle u_i \star v_i,\, \check{w}_i \star \varphi\rangle, \quad \text{da} \quad u_i \star v_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\
&\text{(vgl. Proposition III.4.3)} \\
&= \langle v_i,\, \hat{u}_i \star (\check{w}_i \star \varphi)\rangle \\
&= \langle v_i(z),\, \langle u_i(-y),\, (\check{w}_i \star \varphi)(z-y)\rangle\rangle \\
&= \langle v_i(z),\, \langle u_i(-y),\, \langle w_i(-x),\, \varphi(z-y-x)\rangle\rangle\rangle \\
&= \int dz\, v_i(z) \int dy\, u_i(y) \int dx\, w_i(x)\, \varphi(z+y+x). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Da (1) = (2) folgt nun die Behauptung für u_i, v_i, w_i. Um den Übergang zu den Limits, das heisst zu u, v, w zu rechtfertigen, argumentiert man analog zum Beweis von Proposition III.4.3. □

Bemerkung III.4.6. Bis jetzt haben wir folgende Fälle gesehen, in welchen die Faltung zwischen einer Distribution und einer Funktion oder einer anderen Distribution definiert ist:

- $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in C_0^\infty$ (III.3.1.).
- $u \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in C^\infty$ (III.4.2.)
- $u \in \mathcal{D}'$, $v \in \mathcal{E}'$ (III.4.3.)

Es stellt sich nun die Frage, ob es weitere Fälle gibt, in welchen eine Faltung zwischen zwei Distributionen definiert ist.

Tatsächlich kann man die Faltung zwischen $u \in \mathcal{D}'$ und $v \in \mathcal{D}'$ definieren, sofern

$$\forall R > 0 \quad \exists\, \delta\,(R),$$

so dass

$$(x \in supp\, u,\ y \in supp\, v,\ |x+y| \le R) \Rightarrow (|x| \le \delta(R),\ |y| \le \delta(R))$$

Eine detaillierte Ausführung findet sich im Buch von Bony, “Cours d’Analyse” ab S.132, Definition 7.1.3.

Weiter lässt sich auch das Resultat aus Proposition III.4.5. verallgemeinern. (siehe Bony, “Cours d’Analyse”, S. 143, Téorème 7.4.4.)

III.5 Der Gebrauch von Faltungen zum Lösen linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Grundsätzliches III.5.1. *Eine Faltungs-Gleichung ist eine Gleichung der Form $A \star u = f$, wobei $A \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ gegeben sind und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ unbekannt ist.* □

Beispiel 1: (Partielle Differentialgleichungen) Es sei $A = \sum_{|\alpha|\le p} C_\alpha \partial^\alpha \delta_0$, $C_\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} A \star u &= \sum_{|\alpha|\le p} C_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \star u, \text{ wobei } \partial^\alpha\delta_0 \in \mathcal{E}' \text{ und } u \in \mathcal{D}' \\ &= \sum_{|\alpha|\le p} C_\alpha \delta_0 \star \partial^\alpha u = \sum_{|\alpha|\le p} C_\alpha \partial^\alpha u. \end{aligned}$$

Wollen wir $A \star u = f$ lösen, bedeutet dies nichts anderes, als dass wir $\sum_{|\alpha|\le p} C_\alpha \partial^\alpha u = f$ lösen müssen.

Beispiel 2: (Diskrete Differentialgleichungen) $u(x+h)+u(x-h)-2u(x) = f$ können wir wie folgt umschreiben:

$$(\delta_h + \delta_{-h} - 2\delta_0) \star u = f.$$

Definition III.5.2. *Es sei $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Eine Lösung $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $A \star E = \delta_0$ heisst Grundlösung / Greensche Funktion / kernel der Faltungs-Gleichung.* □

Satz III.5.3. *Es sei $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und es sei $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem sei E eine Grundlösung der zu A assoziierten Gleichung, das heisst $A \star E = \delta_0$.*

a) *Dann ist $u := E \star f$ eine Lösung der Gleichung $A \star u = f$.*

b) *Ist u eine Lösung von $A \star u = f$ und ist $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, gilt $u = E \star f$ und dies ist die einzige Lösung, falls es überhaupt eine gibt.*

Beweis des Satzes III.5.3:

Beweis von a): Sei $u = E \star f$. Dann gilt $A \star u = A \star (E \star f)$. Da $A, f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, gilt die Assoziativität, also

$$A \star u = (A \star E) \star f = \delta_0 \star f = f.$$

Beweis von b): Sei nun $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $A \star u = f$. Wir haben $u = \delta_0 \star u = (A \star E) \star u$, und wegen der Assoziativität, welche wegen $A, u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt, erhält man sofort

$$u = (E \star A) \star u = E \star (A \star u) = E \star f.$$

□

III.6 Das Lösen von $\Delta u = f$ für $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(Paradebeispiel für elliptische Gleichungen)

Im Folgenden betrachten wir folgende Funktion

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log|x| & n = 2, \\ \\ -\dfrac{1}{|\partial B_1^n(0)|\,|x|^{n-2}(n-2)}, n > 2, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Es gilt

$$E \in L^1_{loc} \Rightarrow E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = \delta_0$$

und

$$E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Es stellen sich nun die folgenden Fragen

$$\Delta E \quad =? \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta E \quad =? \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$$

Die klassische Berechnung der Ableitungen ergibt

$$\Delta E = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Das heisst, dass

$$supp\, \Delta E \subset \{0\}$$

Korollar III.2.7 liefert dann die Existenz von $q \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$\Delta\, E = \sum_{|\alpha| \leq q} C_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

und

$$C_\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad |\alpha| \leq q.$$

Es sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp\, \varphi \subset B_R(0)$, ausserdem folgt aus $E \in L^1_{(loc)}(\mathbb{R}^n)$, dass $E \in L^1(B_R(0))$. Es gilt also

$$\langle \Delta\, E,\, \varphi \rangle = \langle \Delta\, E,\, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} E \Delta\varphi = \int_{B_R(0)} E \Delta\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(0) \backslash B_\varepsilon(0)} E \Delta\varphi$$

Beachte nun

$$\int_{B_R(0) \backslash B_\varepsilon(0)} E\, \Delta\varphi = -\int_{\partial\, B_\varepsilon(0)} E \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \int_{B_R(0) \backslash B_\varepsilon(0)} \nabla\, E\, \nabla\varphi.$$

Da
$$\|E\|_{L^\infty(\partial B_\varepsilon(0))} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n-2}},$$
gilt weiter
$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} E\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} \leq C_\varphi \|E\|_{L^\infty(\partial B_\varepsilon(0))} |\partial B_\varepsilon(0)| \leq \frac{C_\varphi}{\varepsilon^{n-2}}\varepsilon^{n-1} = o(\varepsilon) \to 0.$$
Ausserdem gilt
$$\begin{aligned} -\int_{B_R(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla E\,\nabla\varphi &= -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial E}{\partial r}\,\varphi + \int_{B_R(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \varphi\Delta\, E \\ &= +\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{n-2}{|\partial B_1^n|(n-2)|x|^{n-1}}\varphi, \end{aligned}$$
da der zweite Summand verschwindet.

Insgesamt erhalten wir folgendes Resultat
$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|\partial B_1^n|\;|x|^{n-1}}\varphi = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

Satz III.6.1. *Es sei*
$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ \log|x| & n = 2, \\ -\dfrac{1}{|\partial B_1^n(0)|\;|x|^{n-2}(n-2)} & n > 2, \end{cases}$$
und es sei $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $u = E \star f$ *eine Lösung von* $\Delta u = f$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus supp\, f)$ *und* u *konvergiert im Unendlichen gleichmässig gegen Null.* $\square$

Beweis des Satzes III.6.1: Gemäss Beispiel 1 aus Kapitel III.5.1 lässt sich $\Delta u = f$ schreiben als $A \star u = f$, wobei
$$A = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2\, \delta_0.$$
Dann folgt aus Satz III.5.3, dass $u = E \star f$ eine Lösung ist und $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Da ein $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt, dass $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist und daraus folgt, dass
$$E \star f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$
Es sei nun $\delta > 0$ und es sei $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\theta \equiv 1$ auf $B_1^n(0)$ und $\theta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2^n(0)$. Sei $\theta_\delta(x) = \theta(\frac{x}{\delta})$. Nun schreibt man E wie folgt um: $E = E_1^\delta + E_2^\delta$, wobei $E_1^\delta = \theta_\delta E$ und $E_2^\delta = (1-\theta_\delta)E$, und es gilt $E_2^\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ also auch $E_2^\delta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem gilt *supp* $E_1^\delta \subset B_{2\delta}^n(0)$ und u lässt sich folgendermassen schreiben
$$u = E \star f = E_1^\delta \star f + E_2^\delta \star f.$$

Weiter gilt

$$\textit{supp}\, E_1^\delta \star f \subset \textit{supp}\, f + B_{2\delta}^n(0) \subset \textit{supp}\, f_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathrm{dist}(x, \textit{supp}\, f) \leq 2\delta\}.$$

Es sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \textit{supp}\, f_{2\delta})$, dann gilt

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle E_2^\delta \star f, \varphi \rangle.$$

Da gemäss Proposition III.4.2 $E_2^\delta \star f \in C^\infty$ $\forall \delta > 0$, folgt, dass $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \textit{supp}\, f)$. Weiter gilt

$$E_2^\delta \star f(x) = \langle f(y), E_2^\delta(x-y) \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}$$

und

$$|\langle f(y), E_2^\delta(x-y) \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial_y^\alpha E_2^\delta(x - \cdot)\|_{L^\infty(\textit{supp}\, f)},$$

wobei $p = \textit{ord}(f)$. Sei nun $R < \infty$, so dass $\textit{supp}\, f \subset B_R^n(0)$. Dann gilt

$$\forall y \in B_R(0),\, |x| > 2R, R > 2:$$

$$|\partial_y^\alpha E_2^\delta(x-y)| = C \cdot \left|\partial_y^\alpha \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right| \leq \frac{C_1}{(|x|-R)^{n-2+|\alpha|}} \longrightarrow 0$$

gleichmässig, wenn $|x|$ gegen unendlich konvergiert. Dies wiederum impliziert, dass $u \to 0$ gleichmässig für $|x| \to \infty$. $\square$

Beispiel: (Maxwell-Gleichungen)
div $\vec{E} = \rho$; rot $\vec{E} = 0$ mit der Ladungsverteilung $\rho = \sum_{i=1}^Q \pm\delta_{a_i}$. Dies führt mit $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ auf die Poisson-Gleichung $\Delta V = \rho$. Für die obige Ladungsverteilung führt uns dies zum Coulomb-Potential

$$V = \sum_{i=1}^Q \pm \frac{1}{4\pi|x-a_i|}.$$

Bemerkung III.6.2. Die Differenz zweier Lösungen u_1 und u_2 der Gleichung $\Delta u = f$ ist harmonisch, das heisst $\Delta(u_1 - u_2) = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

III.7 Eigenschaften harmonischer, subharmonischer und superharmonischer Distributionen

Korollar III.7.1. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\Delta u = 0$. Dann ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.* $\square$

Beweis des Korollars III.7.1: Es sei $\Theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\Theta \equiv 1$ auf $B_1^n(0)$ und $\Theta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash B_2^n(0)$ und es sei $\Theta^R(x) = \Theta(\frac{x}{R})$, wobei $R \to \infty$. Es gilt

$$\Delta(u\Theta^R) = u\,\Delta\,\Theta^R + 2\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \cdot \underbrace{\frac{\partial \Theta^R}{\partial x_i}}_{\in C^\infty},$$

$supp\,\Delta(\Theta^R u) \subset B^n_{2R}(0)\backslash B^n_R(0)$, also $f = \Delta(\Theta^R u) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Des Weiteren ist $supp\,\Theta^R u \subset B^n_{2R}(0)$, also $\Theta^R u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. $\Delta(\Theta^R u) = f$, kann man wie folgt umschreiben kann: $A \star \Theta^R u = f$, wobei $A = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i} \delta_0$. Daher folgt aus Satz III.5.3, dass $\Theta^R u = E \star f$. Anwenden von Satz IIII.6.1 liefert schliesslich $\Theta^R u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp\, f)$, also $\Theta^R u \in C^\infty(B^n_R(0))$ und $\Theta^R u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, also $\Theta^R u \in \mathcal{D}'(B^n_R(0))$. Damit folgt für $R \to \infty$ die Behauptung des Korollars.

Satz III.7.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und es sei $B_R(x_0)$ so, dass $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Es sei weiter $u \in C^0(\Omega)$ so, dass $\Delta u \geq 0$ (subharmonisch), respektive $\Delta u \leq 0$ (superharmonisch). Dann gilt*

$$u(x_0) \leq \fint_{\partial B_R(x_0)} u = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, d\,\mathrm{vol}_{\partial B_R(x_0)}$$

respektive

$$u(x_0) \geq \fint_{\partial B_R(x_0)} u\ .$$

$\square$

Bemerkung III.7.3. i)

$$u \in C^0(\Omega) \Rightarrow u \in L^1_{loc} \Rightarrow u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Die Voraussetzung $\Delta u \geq 0$ ist dann folgendermassen zu verstehen

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0 \quad \text{auf} \quad \Omega,$$

gilt

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle \geq 0.$$

Analog für den subharmonischen Fall.

ii) In einer Dimension entspricht der subharmonische Fall den konvexen Funktionen, respektive der superharmonische den konkaven Funktionen.

iii) Ist u eine harmonische Distribution in $\mathcal{D}'(\Omega)$, gilt

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_R(x_0)} u.$$

$\square$

Beweis III.7.2: Nach Voraussetzung gilt $\Delta u \geq 0$ und es sei $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $supp\,\chi \subset B_1(0)$ und $\int \chi = 1$, mit $\chi \geq 0$. Wie üblich sei $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$ und $u_\varepsilon = \chi_\varepsilon \star u$, ausserdem sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u_\varepsilon, \varphi \rangle &= \langle \chi_\varepsilon \star u, \Delta\varphi \rangle = \langle u \star \chi_\varepsilon, \Delta\varphi \rangle \\
&= \langle u, \check{\chi}_\varepsilon \star \Delta\varphi \rangle = \langle u, \Delta(\check{\chi}_\varepsilon \star \varphi) \rangle \\
&= \langle \Delta u, \check{\chi}_\varepsilon \star \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Nehmen wir zusätzlich an, $\varphi \geq 0$, so folgt nun $\varphi\star\check{\chi}_\varepsilon \geq 0$ und damit auch $\langle \Delta u,\, \check{\chi}_\varepsilon\star\varphi\rangle \geq 0$ und $\Delta(\chi_\varepsilon \star u) \geq 0$. Somit können wir annehmen, dass $u \in C^\infty$, denn eine allfällige Glättung erhält die Eigenschaft superharmonisch zu sein.

Angenommen wir hätten gezeigt

$$u_\varepsilon(x_0) \leq \fint_{\partial B_R(x_0)} u_\varepsilon.$$

Dann stellt sich die Fage, ob wir dann zum Limes übergehen können. Dies können wir tun, denn $u_\varepsilon = u \star \chi_\varepsilon$ konvergiert wegen der Voraussetzung $u \in C^0(\Omega)$ auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ gleichmässig gegen u und somit gilt

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in} \quad L^\infty(K)$$

und

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u_\varepsilon \to \fint_{\partial B_R(x_0)} u.$$

Im Folgenden betrachten wir die Funktion ($n > 2$)

$$g_R(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)|S^{n-1}|\;|x-x_0|^{n-2}} + \dfrac{1}{(n-2)|S^{n-1}|R^{n-2}}, & x \in B_R(x_0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei hat $g_R(x)$ die folgenden Eigenschaften:

$$g_R \in C^\infty\big(\mathbb{R}^n \backslash (\{x_0\} \cup \partial B_R(x_0))\big)$$

$$g_R \in C^0(\mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}),\ g_R \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

In

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash (\{x_0\} \cup \partial B_R(x_0)))$$

gilt $\Delta g_R = 0$. Daraus folgt $supp\, \Delta g_R \subset \{x_0\} \cup \partial B_R(x_0)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, insgesamt gilt also $\Delta g_R = \delta_0 - T$, wobei $supp\, T \subset \partial B_R(x_0)$.

Als Nächstes bestimmen wir T: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $supp\, \varphi \subset \Omega \backslash \{x_0\}$. Da $g_R \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta g_R,\, \varphi\rangle = \langle g_R,\, \Delta\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} g_R \Delta\varphi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_{R-\varepsilon}(x_0)} g_R\, \Delta\varphi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\partial B_{R-\varepsilon}(x_0)} g_R \frac{\partial\,\varphi}{\partial\, r} - \int_{B_{R-\varepsilon}(x_0)\setminus B_\varepsilon(x_0)} \nabla g_R \nabla\,\varphi \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(- \int_{\partial B_{R-\varepsilon}(x_0)} \frac{\partial\, g_R}{\partial\, r}\,\varphi + \int_{B_{R-\varepsilon(x_0)}\setminus B_\varepsilon\,(x_0)} \Delta g_R\,\varphi + \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial\, g_R}{\partial\, r}\,\varphi \right).
\end{aligned}
$$

da der erste Summand im Limes $\varepsilon \to 0$ verschwindet. Ausserdem verschwindet der Term

$$
\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial g_R}{\partial r}\,\varphi
$$

im Limes $\varepsilon \to 0$, da $supp\,\varphi \subset \Omega\backslash\{x_0\}$.
Daraus folgt

$$
\langle \Delta\, g_R, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|S^{n-1}|(R-\varepsilon)^{n-1}} \int_{\partial B_{R-\varepsilon}(x_0)} \varphi\, d\mathrm{vol}_{\partial B_{R-\varepsilon}\,(x_0)},
$$

da

$$
\frac{\partial g_R}{\partial r} = \frac{1}{|S^{n-1}|(R-\varepsilon)^{n-1}}
$$

und der 2. Summand null ist, da $supp\,\varphi \subset \Omega\backslash\{x_0\}$. Insgesamt gilt also $\langle g_R,\, \Delta\varphi\rangle = ⨍_{\partial B_R}\varphi$, woraus folgt $\langle T,\, \varphi\rangle = ⨍_{\partial B_R}\varphi$. Schlussendlich haben wir einerseits

$$
\langle \Delta g_R,\, u_\varepsilon\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} = \langle g_R, \Delta u_\varepsilon\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} \le 0,
$$

da $-g_R \ge 0$ ist und $\Delta u_\varepsilon \ge 0$. Andererseits gilt:

$$
\langle \Delta g_R,\, u_\varepsilon\rangle = \langle \delta_0 - T,\, u_\varepsilon\rangle = u_\varepsilon(x_0) - ⨍_{\partial B_R(x_0)} u_\varepsilon.
$$

Daraus folgt

$$
u_\varepsilon(x_0) \le ⨍_{\partial B_R(x_0)} u_\varepsilon.
$$

Nun folgt durch Übergang zum Limes die Behauptung. Der Beweis im subharmonischen Fall verläuft analog. $\square$

Satz III.7.4. *(Maximumprinzip)*
Es sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$, wobei $\overline{\Omega}$ zusammenhängend ist. Es gelte weiter: $\Delta u \ge 0$ und $\exists\ x_0 \in \Omega$, so dass

$$
u(x_0) = \max_{y\in\overline{\Omega}} u(y)\ .
$$

Dann gilt $u \equiv u(x_0)$ auf Ω. $\square$

Aus diesem Satz folgen wichtige Anwendungen in der Differentialgeometrie: Satz von Hopf / Alexandrov, vgl. Skript von M. Struwe. Seite 41f.

Beweis des Satzes III.7.4: $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Wir setzen $E := u^{-1}\big((-\infty, u(x_0)\big)$. Da u stetig ist und $\big(-\infty, u(x_0)\big)$ offen ist, ist auch E offen.

Behauptung: E ist abgeschlossen (bezüglich der auf Ω von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie, das heisst $E = F \cap \Omega$, wobei F in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist).

Bemerkung III.7.5. Ω ist genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Mengen in $J(\Omega)$, welche gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, Ω und $\emptyset$ sind.

Beweis der Behauptung: Es sei x_n eine Folge in E mit $x_n \to x_\infty \in \Omega$. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $x_\infty \in E$. Angenommen $x_\infty \notin E$, so gilt $u(x_\infty) \geq u(x_0)$. Da es ein $R > 0$ gibt, so dass $\overline{B_R(x_\infty)} \subset \Omega$, folgt aus Satz III.6.4, dass $\forall r \leq R$ gilt

$$u(x_\infty) \leq |\partial B_r(x_\infty)|^{-1} \int_{\partial B_r(x_\infty)} u \, d\,\mathrm{vol}_{\partial Br(x_\infty)} .$$

Daraus folgt aber, da $u(x_0) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$, dass $u \equiv u(x_\infty)$ auf $\overline{B_R(x_\infty)}$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass es eine Folge x_n gibt, für die gilt $u(x_n) < u(x_0)$ und die gegen x_∞ konvergiert. Also ist $x_\infty \in E$.

E ist also zugleich offen und abgeschlossen. Da Ω zusammenhängend ist, gilt also entweder $E = \emptyset$ oder $E = \Omega$. Da aber $x_0 \notin E$, folgt $E = \emptyset$. Dies impliziert nun, dass $u \equiv u(x_0)$ auf Ω. $\square$

Korollar III.7.6. *Folgerungen aus dem Maximumprinzip: Es sei $\overline{\Omega}$ kompakt und es sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$.*

i) *Gilt $\Delta u \geq 0$, so nimmt u sein Maximum auf $\partial\Omega$ an.*

ii) *Gilt $\Delta u \leq 0$, so nimmt u sein Minimum auf $\partial\Omega$ an.*

iii) *Gilt $\Delta u = 0$, so nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf $\partial\Omega$ an.*

Korollar III.7.7. *(Liouville-Eigenschaft harmonischer Funktionen)*
Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\Delta u = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es gelte ausserdem $u(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Dann ist $u \equiv 0$.

Beweis des Korollars III.7.7: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\forall R > 0$:

$$|u(x_0)| = \left| \fint_{\partial B_{R(x_0)}} u \right| \leq \max_{\partial B_R(x_0)} |u| \to 0 .$$

Satz III.7.8. *Für alle $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gibt es unendlich viele Lösungen der Gleichung $\Delta u = f$. Diese Lösungen sind alle in $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp\, f)$. Unter all diesen Lösungen gibt es genau eine, die im Unendlichen verschwindet und sie ist gegeben durch $u_0(x) = E \star f$, wobei E die folgende Funktion sei:*

$$E(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log |x|; & n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\,|S^{n-1}|\ \ |x|^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$$

Beweis des Satzes III.7.8: Aus dem Satz III.6.1 wissen wir, dass $u_0 = E \star f$ eine Lösung ist von $\Delta u = f$ und $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp\, f)$. Da es unendlich viele Lösungen $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $\Delta v = 0$ gibt. (In $n = 2$ ist jedes $v = \Re\, g(z)$, wobei g eine harmonische Funktion ist, eine Lösung und für $n > 2$ ist jede konstante Funktion eine Lösung von $\Delta v = 0$), folgt daraus, dass es unendlich viele Lösungen von $\Delta u = f$ gibt, nämlich mindestens alle Distributionen der Form $u' = u_0 + v$. Es ist auch sofort klar, dass diese alle in $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp\, f)$ liegen. Satz III.6.1 besagt weiter, dass $\lim_{|x| \to \infty} u_0(x) = 0$. Es sei nun $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\Delta u = f$ und $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$. Dann gilt

- $\Delta(u - u_0) = \Delta w = 0$.
- w ist harmonisch.
- $\lim_{|x| \to \infty} w(x) = 0$.

Aus Korollar III.6.9 folgt dann $w \equiv 0$, woraus $u = u_0$ folgt. Sei allgemein $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\Delta w = f$. Dann ist $w - u_0$ eine harmonische Distribution, liegt also in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp\, f)$, folgt nun sofort, dass auch w in $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash supp f)$ liegt.

III.8 Das Lösen von $\Box u = f$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^4)$

(Paradebeispiel für hyperbolische Gleichungen).

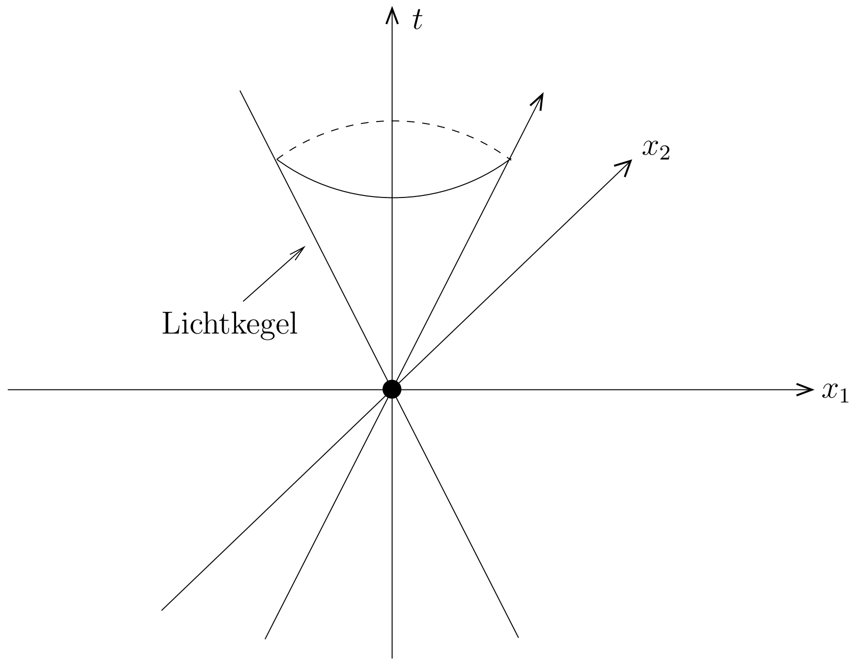
Die Gleichung

$$\Box u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f,\ (x, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4$$

ist die Wellengleichung. Wir betrachten nun zuerst den Lichtkegel:

$$t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |x|\ .$$

Minkowski-Metrik



Es bezeichne nun T die Integration über den Lichtkegel bezüglich der von $\mathbb{R}^4$ induzierten Metrik, das heisst

$$\langle T,\, \varphi\rangle := \int_{Lichtkegel} \varphi \, dvol_{Lichtkegel} = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x_1, x_2, x_3, |x|) dx_1 dx_2 dx_3 \ .$$

Weiter sei $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t^2}$, wobei $\rho = \sqrt{2}|x|$ auf dem Lichtkegel und

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T}{\rho},\, \varphi \right\rangle &:= \int_{Lichtkegel} \frac{\varphi}{\rho} d\, vol_{Lichtkegel} \\ &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\rho} \varphi(x_1, x_2, x_3, |x|)\, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \varphi(x_1, x_2, x_3, |x|)\, dx_1 dx_2 dx_3 \ . \end{aligned}$$

Es sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, wobei $supp\, \varphi \subset B_R(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{T}{\rho},\, \varphi \right\rangle \right| &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{B_R^3(0)} \frac{1}{|x|} dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &= \|\varphi\|_\infty \int_0^R \frac{r^2 dr}{r} \cdot 4\pi \\ &\leq C \cdot \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass T eine Distribution der Ordnung null ist.

Proposition III.8.1. *$\frac{T}{\rho}$ (wie oben definiert) ist eine Distribution der Ordnung null in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ und eine Lösung von $\Box u = 4\pi\,\delta_0$.*

Beweis der PropositionIII.8.1: $\rightarrow$ vgl. nächstes Kapitel oder "von Hand nachrechnen".

Satz III.8.2. *Es sei $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^4)$. Dann ist*

$$u_0 := \underbrace{\frac{T}{4\pi\,\rho}}_{\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)} \star \underbrace{f}_{\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^4)}$$

eine Lösung von $\Box u = f$. Weiter gilt

$$supp\, u_0 \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^4;\ \exists\ (x_0,t_0) \in supp\, f \quad so,\ dass \quad |x-x_0| = |t-t_0|\}.$$

(Lichtkegel mit Ursprung (x_0,t_0)). Ausserdem ist u_0 die einzige Lösung von $\Box u = f$, deren Träger in einer halben Raumzeit der Form $\{(x,t);\ t > t_0\}$ enthalten ist.

Beweis des Satzes III.8.2: Die Gleichung $\Box\, u = f$ kann geschrieben werden als

$$A \star u = f,\ \text{wobei}\ A = \partial_t^2 \delta_0 - \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^4)\ .$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\Box u_0 &= \Box(\frac{T}{\rho 4\pi} \star f)\\ &= A \star (\frac{T}{\rho 4\pi} \star f)\\ &= (A \star \frac{T}{\rho 4\pi}) \star f\\ &= \delta_0 \star F = F\end{aligned}$$

da

$$A, f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^4).$$

Dies zeigt, dass u_0 tatsächlich $\Box\, u = f$ löst. Des Weiteren gilt

$$supp\, u_0 \subset supp\, \frac{T}{\rho 4\pi}\ + supp\, f, \quad \text{das heisst} \quad supp\, u_0 \ni (x,t) = (y,s) + (x_0,t_0)\ ,$$

wobei

$$(y,s) \in supp\, \frac{T}{\rho\, 4\pi} \quad \text{und} \quad (x_0,t_0) \in supp\, f \quad \text{ist.}$$

Daraus folgt: $(x,t) - (x_0,t_0) \in$ Lichtkegel mit Ursprung 0. Dies bedeutet $|x - x_0| = |t - t_0|$, also $(x,t) \in$ Lichtkegel mit Ursprung (x_0,t_0).

Nehmen wir nun an, es gebe eine weitere Lösung u, deren Träger in $\{(x,t);\, t > t_0'\}$ enthalten ist. Für $w := u_0 - u$ gilt dann

$$supp\, w \subset \{(x,t);\, t > t_0''\}$$

und

$$w = \delta_0 \star w = (\frac{T}{\rho 4\pi} \star \square\, \delta_0) \star w.$$

Es sei nun $\Theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ mit $\Theta \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und $\Theta \equiv 0$ auf $B_2(0)^c$. Des Weitern ist $\Theta_i(x) = \Theta(\frac{x}{i}),\ i \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\Theta_i \equiv 1$ auf $B_i(0)$ und $\Theta_i \equiv 0$ auf $B_{2i}(0)^c$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&(\underbrace{\Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi}}_{\in \mathcal{E}'} \star \underbrace{\square\, \delta_0}_{\in \mathcal{E}'}) \star \underbrace{w}_{\in \mathcal{D}'} \\
&= \Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi} \star (\square\, \delta_0 \star w) \\
&= \Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi} \star \square\, w = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ausserdem gilt

$$\text{in} \quad \mathcal{D}'(B_i(0)) : \square \left(\Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi} \right) = \square \frac{T}{\rho 4\pi} = \delta_0$$

und

$$\text{in} \quad \mathcal{D}'(B_{2_i}(0)^c) : \square \left(\Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi} \right) = 0$$

Somit gilt

$$\square \left(\Theta_i \frac{T}{4\pi\rho} \right) = \delta_0 + h_i,$$

wobei $supp\, h_i \subset B_{2_i}(0) \backslash B_i(0) \cap$ Lichtkegel mit Ursprung 0.

Es sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ mit $supp\, \varphi \subset B_R^4(0)$. Da

$$\langle (\Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi} \star \square \delta_0) \star w,\, \varphi \rangle = \langle \square \Theta_i \frac{T}{\rho 4\pi},\, \check{w} \star \varphi \rangle \tag{2}$$

und

$$supp\, \check{w} \subset \{(x,t),\, t < -t_0''\},$$

folgt

$$supp\, \check{w} \star \varphi \subset \{(x,t), t \le -t_0'' + R\}.$$

Dies bedeutet, dass

$$\langle h_i, \check{w} \star \varphi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = 0$$

für i gross genug. Es gilt also zusammenfassend

$$\begin{aligned}
0 \underset{\substack{\uparrow \\ (1),(2)}}{=} &\langle \Box\, \Theta_i \tfrac{T}{\rho 4\pi},\, \check{w} \star \varphi \rangle = \langle \delta_0 + h_i,\, \check{w} \star \varphi \rangle = \\
&= \langle \delta_0, \check{w} \star \varphi \rangle \\
&= \langle \delta_0, \langle w(-y),\, \varphi(x-y) \rangle \rangle \\
&= \langle w, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

für i gross genug. Die letzte Behauptung von Satz III.5.11 folgt nun für $i \to \infty$.

Nach wie vor sind allerdings die folgenden Fragen offen:

i) Wie findet man die Grundlösung?

ii) Was ist, wenn f nicht mehr in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ liegt?
Wie ist $E \star f$ für allgemeines f zu definieren?

iii) Was für Regularitätseigenschaften hat $f \star E$ in Bezug auf die Regularität von f?

iv) Wie steht es mit partiellen Differentialgleichungen auf beschränkten Gebieten?

IV Fouriertransformationen

IV.1 Einleitung

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} f(x)\, dx$$

ist die Fouriertransformierte von f, wobei $x \cdot \zeta = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \zeta_k$ das euklidische Skalarprodukt ist.

Bemerkung IV.1.1. $\hat{f}(\zeta)$ wird gelegentlich auch als

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix\cdot\zeta} f(x)\, dx$$

definiert. Dies ändert nur die auftretenden Konstanten, nicht aber die zugrundeliegende Idee und die Eigenschaften der Fouriertransformierten.

Anwendungsbeispiel (Quantenmechanik): Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ eine Wellenfunktion. $|f|^2(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ aufhält. Dabei gilt $\int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 = 1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen einen Impuls im Intervall $[p, p + dp]$ hat, gegeben durch $|g|^2(p)\, dp$, wobei $g(p) = (2\pi)^{-n/2}\, \hat{f}(p)$ und es gilt $\int_{\mathbb{R}^3} |g|^2 = 1$. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}$$

(hier setzen wir $tr \equiv 1$), wobei

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} x |f|^2(x)\, dx : && \text{Erwartungswert} \\ \langle (\Delta x)^2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (x - \langle x \rangle)^2 |f|^2(x)\, dx : && \text{Varianz} \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2}$ genau dann, wenn $f(x) = \lambda e^{-a(x-x_0)^2}$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Tatsache, dass je schärfer der Ort des Teilchens lokalisiert ist, desto unschärfer der Impuls ist, wird sich als grundlegende Beziehung zwischen f und $\hat{f}$ herausstellen. Ein extremes Beispiel dazu ist die δ-Funktion: Es gilt nämlich: $\hat{\delta}_0 \equiv \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$. Als Nächstes sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} i\, \zeta_j e^{-ix\cdot\zeta}\, f(x)\, dx = i\zeta_j \hat{f}(\zeta)\ ,$$

wobei die zweitletzte Gleichung auf Grund partieller Integration gilt. Somit verwandelt die Fouriertransformation die Ableitung in Richtung x_j in die Multiplikation mit ζ_j. Analog verwandelt sie Differentialoperatoren in Multiplikationen mit Polynomen.

Beispiel: $\Delta u = f$. Dann gilt

$$-\sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2 \hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta),$$

das heisst

$$-|\zeta|^2\, \hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta),$$

also

$$\hat{u}(\zeta) = -|\zeta|^{-2}\, \hat{f}(\zeta).$$

Ausserdem werden wir in den folgenden Kapiteln sehen, dass die Fouriertransformation Differenzierbarkeit in "schnelles Abfallen im Unendlichen" überführt.

IV.2 Fouriertransformation von L^1-Funktionen

Definition / Theorem IV.2.1. *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformierte von f, $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$, ist definiert durch $\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} f(x)\, dx$, wobei $x \cdot \zeta = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \zeta_k$.*

Es gilt

$$\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1, \quad \hat{f} \in C^0,$$

$$|\hat{f}(\zeta)| \to 0 \quad \textit{gleichmässig für} \quad |\zeta| \to \infty.$$

□

Beweis des Satzes IV.2.1:

$$|\hat{f}|(\zeta) \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\ dx = \|f\|_1.$$

Daraus folgt, dass $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.
Es sei nun ζ^j eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\zeta^j \to \zeta^\infty \in \mathbb{R}^n$.

Behauptung: $\hat{f}(\zeta^j) \to \hat{f}(\zeta^\infty)$.
Beweis: $e^{-ix\cdot\zeta^j} f(x) \to e^{-ix\cdot\zeta^\infty} f(x)$ und $|e^{-ix\cdot\zeta^j} f(x)| \le |f|(x) \in L^1$. Der Satz über die dominierte Konvergenz liefert nun

$$\int_{\mathbb{R}_n} e^{-ix\cdot\zeta^j} f(x) \to \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta^\infty} f(x),$$

womit die Behauptung $\hat{f}(\zeta^j) \to \hat{f}(\zeta^\infty)$ und somit auch die Stetigkeit von $\hat{f}$ gezeigt ist. Um die gleichmässige Konvergenz im Unendlichen gegen null zu zeigen, sei zunächst

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, oBdA dürfen wir annehmen, dass supp $\varphi \subset [0,1]^n$. Des Weiteren können wir annehmen, dass $\zeta = \zeta_1 \cdot e_1$, denn nach einer allfälligen Rotation R_ζ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1\cdot\zeta_1}\,\varphi\cdot R\zeta(x)\,dx$$

Dabei gilt

$$\|\nabla\varphi\|_\infty = \|\nabla\varphi\cdot R_\zeta\|_\infty.$$

Schliesslich dürfen wir auch annehemen, dass gilt $\zeta_1 = 2\pi\,N,\ N \in \mathbb{Z}$, da wir am Verhalten $\zeta_1 \to \infty$ interessiert sind.

Behauptung:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1\cdot 2\pi\,N}\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Beweis: Es bezeichne $x' = (x_2,\ldots,x_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1\cdot 2\pi\,N}\,\varphi(x_1,x')\right| = \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \int_0^1 e^{-x_1\cdot 2\pi\,N}\varphi\left(x_1,x'\right)dx_1\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \int_0^{2\pi\,N} e^{-iy}\,\varphi\left(\frac{y}{2\pi\,N},x'\right)\,\frac{1}{2\pi\,N}\,dy\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \sum_{j=0}^{N-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-iy}\,\varphi\left(\frac{y}{2\pi N},x'\right)\frac{1}{2\pi\,N}\,dy\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \sum_{j=0}^{N-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-iy}\left[\varphi\left(\frac{y}{2\pi N},x'\right)-\varphi\left(\frac{2\pi j}{2\pi N},x'\right)\right]\,\frac{dy}{2\pi N}\right|.
\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt, da

$$\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-iy}\,\varphi\left(\frac{2\pi j}{2\pi N},x'\right)\frac{1}{2\pi N}\,dy = \frac{\varphi\left(\frac{2\pi j}{2\pi N},x'\right)}{2\pi N}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-iy}\,dy = 0\ .$$

Da

$$\varphi\left(\frac{y}{2\pi N},x'\right)-\varphi\left(\frac{2\pi j}{2\pi\,N},x'\right) \le \frac{1}{2\pi N}\,\|\nabla\varphi\|_\infty,$$

können wir folgendermassen weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \sum_{j=0}^{N-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-iy}\left[\varphi\left(\frac{y}{2\pi N},x'\right)-\varphi\left(\frac{2\pi j}{2\pi N},x'\right)\right]\frac{1}{2\pi N}\,dy\right| \\
&\le \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N^2(2\pi)^2}\,\|\nabla\varphi\|_\infty\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}|e^{-iy}|dy\right| \\
&= \left|\int_{[0,1]^{n-1}} dx' \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N^2\cdot 2\pi}\,\|\nabla\varphi\|_\infty\right| \le C\cdot\|\nabla\varphi\|_\infty\,N^{-1}\longrightarrow_{N\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Als Nächstes sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Da C_0^∞ dicht liegt in L^p $1 \leq p < \infty$, für beliebige $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon/2.$$

Aus dem schon Gezeigten folgt nun $\|\hat{f} - \hat{\varphi}\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Es sei nun $R > 0$, so dass $|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq \varepsilon/2$ für $|\zeta| > R$. Dann folgt unmittelbar $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \leq \varepsilon$. Dies bedeutet aber gerade, dass $\hat{f}(\zeta)$ gleichmässig gegen null konvergiert für $|\zeta| \to \infty$.

Proposition IV.2.2. *$\forall a \in \mathbb{R}_+^\star$ gilt*

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\zeta|^2/(4a)}$$

□

Beweis der PropositionIV.2.2: Es seien zunächst $n = 1, a = 1$

$$g(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta}\, e^{-x^2} \ .$$

Behauptung: $g \in C^1$ und es gilt $2g'(\zeta) + \zeta \cdot g(\zeta) = 0$.

Beweis der Behauptung:

$$\left|\frac{g(\zeta+h) - g(\zeta)}{h} - \int_{\mathbb{R}} -ix\, e^{-ix\zeta}\, e^{-x^2}\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta} e^{-x^2} \left(\frac{e^{ixh} - 1}{h} + ix\right)\right| \leq C \cdot h \int_{\mathbb{R}} x^2\, e^{-x^2} \to 0 \quad \text{wenn} \quad h \to 0$$

da

$$\left|\frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix\right| \leq x^2 h \cdot C \quad \text{(Taylor)} \ .$$

Somit existiert $g'(\zeta)$ überall und es gilt

$$\begin{aligned} g'(\zeta) &= -\int_{\mathbb{R}} ixe^{-ix\zeta}\, e^{-x^2}\, dx \\ &= i \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta}\, \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2})\, dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} -\frac{i\zeta}{2}\, e^{-ix\zeta}\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{\zeta}{2}\, g(\zeta) \ . \end{aligned}$$

Es folgt nun $g'(\zeta) = -\frac{\zeta}{2} g(\zeta)$ wie behauptet.

Zurück zum Beweis von Proposition IV.1.2: Aus $g'(\zeta) = -\frac{\zeta}{2}\, g(\zeta)$ folgt $g(\zeta) = \lambda e^{-\zeta^2/4}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, erhält man sofort $g(\zeta) = \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2/4}$, womit die Proposition für $n = 1$ und $a = 1$ gezeigt ist. Es sei nun n beliebig. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} e^{-|x|^2} = \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k\cdot\zeta_k}\, e^{-x_k^2} = \pi^{n/2}\, e^{-\frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k^2}{4}} = \pi^{n/2}\, e^{-|\zeta|^2/4}.$$

Es sei nun a beliebig

$$\begin{aligned}
\int e^{-ix\cdot\zeta}\, e^{-a|x|^2}\, dx &= \int e^{-ix\cdot\zeta}\, e^{-a\sum_{k=1}^n x_k^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\zeta\frac{1}{\sqrt{a}}}\, e^{-|y|^2}\, dy\, \frac{1}{a^{n/2}} \qquad (y = \sqrt{a}\cdot x) \\
&= \frac{1}{a^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy_k\frac{1}{\sqrt{a}}\zeta_k}\, e^{-y_k^2} \\
&= \frac{1}{a^{n/2}}\, \pi^{n/2}\, e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{a}\zeta_k^2/4} \\
&= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\zeta|^2/(4a)}.
\end{aligned}$$

□

Satz IV.2.3. *(Inverse von $\mathcal{F}$). Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\zeta}\, \hat{f}(\zeta)\, d\zeta \equiv (2\pi)^{-n}\, \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}).$$

□

Beweis des Satzes IV.2.3: Es bezeichne

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\, e^{ix\cdot\zeta}\, e^{-\varepsilon|\zeta|^2}\, \hat{f}(\zeta)\, d\zeta, \quad 0 < \varepsilon \le 1$$

Auf Grund der dominierten Konvergenz gilt punktweise

$$I_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\, e^{ix\cdot\zeta}\, \hat{f}(\zeta)\, d\zeta = I_0\,(x).$$

Behauptung: $1: I_\varepsilon \to I_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$I_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und

$$I_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

da

$$|I_\varepsilon(x)| \le (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\zeta)|\, d\zeta = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_1$$

und analog für I_0. Daher sind $I_\varepsilon, I_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, also

$$\langle I_\varepsilon,\, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} I_\varepsilon(x)\,\varphi(x),$$

wobei

$$I_\varepsilon(x)\varphi(x) \to I_0\,(x)\,\varphi(x)$$

punktweise. Da ausserdem gilt

$$|I_\varepsilon(x)\varphi(x)| \leq \|\, I_\varepsilon\|_\infty |\,\varphi(x)| \leq \|\,\hat{f}\|_1 |\,\varphi(x)| \in L^1,$$

da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, folgt mit Hilfe der dominierten Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_\varepsilon(x)\varphi(x) \to \int_{\mathbb{R}^n} I_0(x)\varphi(x).$$

Des Weiteren ist

$$F_\varepsilon(z,\zeta) = e^{-\varepsilon|\zeta|^2} e^{i(x-z)\,\zeta} f(z) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Daher gilt mit Fubini

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) \;&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\, e^{-\varepsilon|\zeta|^2}\, e^{ix\cdot\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\zeta}\, f(z)\; dz\, d\,\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\, f(z)\, \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\zeta|^2})\,(z-x)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\, f(z)\, \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-|z-x|^2/(4\varepsilon)}\, dz\ , \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen Proposition IV.2.2 gilt. Weiter gilt

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(\psi\varepsilon)} \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2}\; dy = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^2/(4\varepsilon)}\, \varepsilon^{-n/2}\pi^{n/2}\; dy = 1.$$

(Variablentransformation und $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.)

Dies können wir aber auch schreiben als

$$\begin{aligned} 1 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(\psi\varepsilon)}\, (\pi/\varepsilon)^{n/2}\, dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^n} \chi\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\, dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)\, dy, \end{aligned}$$

wobei

$$\chi(z) = (2\pi)^{-n}\, \pi^{n/2}\, e^{-|z|^2/4}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(z)\, dz = 1.$$

Der langen Rechnung kurzen Sinn können wir $\langle I_\varepsilon,\, \varphi\rangle$ schreiben als

$$\langle I_\varepsilon,\, \varphi\rangle = \langle f \star \chi_\varepsilon,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \check{\chi}_\varepsilon \star \varphi\rangle.$$

Man beachte hier, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ impliziert, dass $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem ist $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Behauptung: $2 : \check{\chi}_\varepsilon \star \varphi \to \varphi \;\text{ in }\; L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$|\check{\chi}_\varepsilon \star \varphi(z) - \varphi(z)\,| \leq \int_{\mathbb{R}_n} \chi_\varepsilon(z-y)\; |\,\varphi(y) - \varphi(z)\,|\,,$$

denn

$$\begin{aligned} |\,\check{\chi}_\varepsilon \star \varphi(z) - \varphi(z)\,| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \check{\chi}_\varepsilon(z-y)\; dy - \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi}_\varepsilon(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(y) - \varphi(z))\; \check{\chi}_\varepsilon(z-y)\; dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(z-y) |\, \varphi(y) - \varphi(z)|\; dy. \end{aligned}$$

Man beachte die Symmetrie von χ.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(z-y)\, |\varphi(y) - \varphi(z)|\; dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\varphi\|_\infty |z-y|\, \chi_\varepsilon(z-y)\; dy \\ &= \sqrt{\varepsilon}\, \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Xi\,(z-y)\; dy, \end{aligned}$$

wobei

$$\Xi\,(x) = |x|\, \chi(x).$$

(Variablentransformation $z - y \to \sqrt{\varepsilon}(z-y)$.) Also gilt

$$|\check{\chi}_\varepsilon \star \varphi(z) - \varphi(z)| \leq o(\varepsilon^{1/2}) \to 0,$$

woraus schliesslich folgt $\check{\chi}_\varepsilon \star \varphi \to \varphi$.

Zusammenfassend gilt nun einerseits $\langle f,\, \check{\chi}_\varepsilon \star \varphi\rangle \to \langle f,\, \varphi\rangle$ und andererseits $\langle I_\varepsilon,\, \varphi\rangle \to \langle I_0,\, \varphi\rangle$. Daraus folgt nun $f = I_0$, womit das Theorem bewiesen ist. □

Als Nächstes stellt sich die Frage, wie die Fouriertransformierte einer Distribution definiert sein soll. Dazu beachte man die folgende Tatsache: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} f(x)\,\varphi(\zeta)\,d\,x\,d\,\zeta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right]\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Dies führt uns auf die Idee, die Fouriertransformierte einer Distribution folgendermassen zu definieren $\langle \hat{u},\, \varphi\rangle := \langle u,\, \hat{\varphi}\rangle$. Das Problem, das sich hier aber stellt ist, dass $\hat{\varphi}$ nicht unbedingt kompakten Träger hat. Da man zeigen kann, dass $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, macht obige Definition Sinn, falls $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

IV.3 Der Schwartzraum

Definition IV.3.1. *Eine Funktion φ auf $\mathbb{R}^n$ heisst schnell abfallend, falls die Multiplikation von φ mit einem beliebigen Polynom auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist, das heisst*

$$\forall P \in \mathbb{R}\,[x]\ \ \|P\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_P < \infty.$$

Definition IV.3.2. *$S(\mathbb{R}^n)$, der Schwartzraum von $\mathbb{R}^n$, ist die Menge aller C^∞-Funktionen φ, für welche $\forall\alpha \in N^n$, $\partial^\alpha\varphi$ schnell abfallend ist, das heisst*

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \|x^\beta\,\partial^\alpha\varphi\|_\infty < \infty \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Vom Beispiel II.1.6 wissen wir, dass der Schwartzraum ein Fréchetraum für die Familie von Halbnormen $\mathcal{N}_p$ ist. Genau weiss man, dass $\mathcal{N}_p$ zunehmend ist und $(S, \mathcal{N}_p)$ vollständig für

$$d\,(\varphi,\psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\ \min\{\mathcal{N}_j\,(\varphi-\psi), 1\}.$$

ist.

Proposition IV.3.3. *$S(\mathbb{R}^n)$ ist unter Ableitung und Multiplikation mit einem Polynom stabil.* $\square$

BeweisIV.3.3: Die Aussage ist aus der Definition des Schwartzraumes $S(\mathbb{R}^n)$ sofort ersichtlich! $\square$

Satz IV.3.4. *Die Fouriertransformation ist ein stetiger Isomorphismus $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem gilt*

$$\forall p \in \mathbb{N} \; \exists \; C_p, \quad \textit{so dass} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \textit{gilt}$$

$$\mathcal{N}_p(\hat{\varphi}) \leq C_p \, \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi)$$

und

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \, \bar{\mathcal{F}}.$$

□

Bemerkung IV.3.5. $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist bekanntlich $\overline{\mathcal{F}}(f)$ definiert. □

Lemma IV.3.6. *Es sei $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\hat{\varphi} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ (es gilt sogar $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$) und*

$$\partial_{\zeta_j} \hat{\varphi} = \mathcal{F}(-i x_j \, \varphi).$$

□

Beweis IV.3.6:
Es gilt

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} \, \varphi(x) \; dx$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(e^{-ix\cdot\zeta} \, \varphi(x) \right) = -i x_j \; \varphi(x) \, e^{-ix\cdot\zeta} \; ,$$

wobei

$$x_j \, \varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n).$$

Es folgt nun

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \; \left(e^{-ix\cdot\zeta} \, \varphi(x) \right) \right| \leq |x_j \, \varphi(x)| \in L^1.$$

Man beachte nun das folgende Resultat:

$$F(x, \lambda), \; x \in \mathbb{R}^n, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

erfülle die folgenden Bedingungen

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; F(x, \lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}^n$

iii) $\exists \; h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $\left| \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq h(x)$.

Dann ist $g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,\lambda)dx$ überall differenzierbar und es gilt

$$g'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, dx.$$

Dann folgt unter Beachtung von $F(x,\lambda) \doteq e^{-ix\cdot\zeta}\varphi(x)$ und $\lambda \doteq \zeta_i$, dass $\hat{\varphi} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und dass gilt

$$\partial_{\zeta_j} \hat{\varphi} = \mathcal{F}(-ix_j\,\varphi),$$

wobei

$$-ix_j\,\varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Es sei nun $k \in \{1,\dots,n\}$, dann gilt

$$\partial_{\zeta_k} \mathcal{F}(-ix_j\,\varphi(x)) = \mathcal{F}\big(-x_j\,x_k\,\varphi(x)\big),$$

wobei wiederum $-x_jx_k\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. N-fache iterative Anwendung des schon Gezeigten liefert schliesslich $\partial_\zeta^\alpha \hat{\varphi}$ existiert und ist $C^\infty \quad \forall \alpha, |\alpha| = N$. Dies impliziert schlussendlich, dass

$$\hat{\varphi} \in C^\infty.$$

Lemma IV.3.7. $\mathcal{F}(\partial x_j\,\varphi) = i\,\zeta_j\,\hat{\varphi}(\zeta)$.

BeweisIV.3.7: $\rightarrow$ vgl. IV.1.

Beweis des SatzesIV.3.4: Aus Lemma IV.3.6. wissen wir, dass $\hat{\varphi} \in C^\infty$. Ausserdem gilt

$$\mathcal{N}_p(\hat{\varphi}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|\,\zeta^\beta\,\partial^\alpha\,\hat{\varphi}(\zeta)\|_\infty$$

und

$$|\mathcal{F}(\partial_x^\beta(x^\alpha\,\varphi))| = |\,\zeta^\beta\,\partial^\alpha\,\hat{\varphi}(\zeta)|.$$

Aus den Lemmata IV.3.6. und IV. 3.7. folgt also

$$\mathcal{N}(\hat{\varphi}) \le \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|\,\partial_x^\beta(x^\alpha\varphi)\|_1 \le C \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|\,x^\alpha\,\partial^\beta\,\varphi\|_{L^1}\ ,$$

wobei bei der letzten Ungleichung die Leibnitz-Formel verwendet wurde und zu beachten ist, dass gilt

$$\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1.$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta\varphi| &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1+|x\;|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}}\,|x^\alpha\,\partial^\beta\,\varphi| \\
&\le \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le p\\ |\alpha'|\le p+n+1}} \Big(\|x^\alpha\,\partial^\beta\,\varphi\|_\infty + \|x^{\alpha'}\,\partial^\beta\,\varphi\|_\infty\Big)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}} \\
&\le C\,\mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi).
\end{aligned}$$

Also gilt schliesslich

$$\mathcal{N}_p\ (\hat{\varphi}) \leq C'\ \mathcal{N}_{p+n+1}\,(\varphi).$$

Die Behauptung, dass

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\ \overline{\mathcal{F}}$$

folgt direkt aus dem Satz IV.2.3.

Des Weiteren folgt aus den beiden vorangehenden Lemmata, dass $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist, dessen Stetigkeit folgt aus der Tatsache, dass $\forall p \in \mathbb{N}\ \exists\ C_p$, so dass $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{N}_p\ (\hat{\varphi}) \leq C_p\ \mathcal{N}_{n+1+p}(\varphi)$$

und der Proposition II.1.3. $\square$

Satz IV.3.8. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $S(\mathbb{R}^n)$, das heisst $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $\forall p \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_j) = 0.$$

BeweisIV.3.8: Es sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{auf} \quad B_1(0) \\ & \\ 0 & \text{auf} \quad B_2(0)^C \qquad \text{und} \qquad \|\psi\|_\infty = 1 \end{cases}$$

Ausserdem seien

$$\psi_j(x) := \psi\left(\frac{x}{j}\right),\ j \in \mathbb{N}$$

und

$$\varphi_j(x) := \psi_j(x)\,\varphi(x), \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

da

$$\psi, \varphi \in C^\infty$$

und

$$supp\,\psi_j \subset B_{2j}(0).$$

Behauptung: $\lim_{j\to\infty} \mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_j) = 0.$

Beweis der Behauptung:

$$\partial^\alpha(\psi_j\,\varphi) = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} C_{\gamma,\alpha}\,\partial^\gamma\psi_j\,\partial^{\alpha-\gamma}\varphi$$

$$= \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} C_{\gamma,\alpha}\,\frac{1}{j^{|\gamma|}}\,\partial^\gamma\psi\left(\frac{x}{j}\right)\,\partial^{\alpha-\gamma}\,\varphi.$$

Nun gilt

$$\mathcal{N}_p(\varphi-\varphi_j) = \sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \|x^\delta \partial^\beta(\varphi-\varphi_j)\|_\infty$$

$$= \sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\|x^\delta \left[\partial^\beta(-\varphi_j)\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2j} + \partial^\beta\varphi\,\mathbf{1}_{|x|\ge j}\right]\right\|_\infty .$$

Man beachte hier, dass $\varphi=\varphi_j$ auf $B_j(0)$. Weiter können wir abschätzen

$$\sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\|x^\delta \left[\partial^\beta(-\varphi_j)\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2j} + \partial^\beta\varphi\,\mathbf{1}_{|x|\ge j}\right]\right\|_\infty$$

$$\le \sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left(\left\|x^\delta \sum_{\substack{|\gamma|\le\beta\\\gamma\ne 0}} C_{\gamma,\beta}\,\frac{1}{j^{|\gamma|}}\,\partial^{\beta-\gamma}\varphi\,\partial^\gamma\psi\left(\frac{x}{j}\right)\right\|_\infty\right.$$

$$\left.+\left\|x^\delta\,\partial^\beta\varphi\cdot\psi\left(\frac{x}{j}\right)\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2j}\right\|_\infty + \|x^\delta\,\partial^\beta\varphi\|_{L^\infty(B_j(0)^c)}\right)$$

$$\le C\cdot\frac{1}{j}\mathcal{N}_p(\varphi)\|\psi\|_{C^p} + \|\,x^\delta\,\partial^\beta\varphi\cdot\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2_j}\|_\infty$$

$$+\sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\|x^\delta\,\frac{(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)}\,\partial^\beta\varphi\right\|_{L^\infty(B_j(0)^C).}$$

Der erste Summand konvergiert gegen null für $j\to\infty$. Der zweite Term kommt zustande, da

$$\|x^\delta\,\partial^\beta\varphi\cdot\psi\left(\frac{x}{j}\right)\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2_j\|_\infty} \le \|x^\delta\partial^\beta\varphi\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2_j}\|_\infty\cdot\|\psi\|_\infty$$

$$= \|x^\delta\,\partial^\beta\varphi\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2_j\|_\infty},$$

da

$$\|\psi\|_\infty = 1.$$

Ausserdem gilt

$$\lim_{j\to\infty}\left\|x^\delta\,\partial^\beta\varphi\,\mathbf{1}_{j\le|x|\le 2j}\right\|_\infty = 0,$$

da

$$\varphi\in S(\mathbb{R}^n),$$

somit verschwindet auch der zweite Summand für $j \to \infty$. Nun noch zum letzten Summand

$$\sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\| x^\delta \frac{(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)} \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(B_j(0)^C)}$$

$$\le \sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\| x^\delta (1+|x|^2)\, \partial^\beta\, \varphi \right\|_{L^\infty(B_j(0)^c)} \cdot \left\| \frac{1}{1+|x|^2} \right\|_{L^\infty(B_j(0)^C)}$$

$$\le \sum_{\substack{|\beta|\le p\\|\delta|\le p}} \left\| x^\delta (1+|x|^2) \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \frac{1}{1+j^2} \le \frac{1}{1+j^2}\, \mathcal{N}_{p+2}\,(\varphi).$$

Folglich verschwindet für $j \to \infty$ auch der dritte Summand, womit die Behauptung $\lim\limits_{j\to 0} \mathcal{N}_p(\varphi - \varphi_j) = 0$ gezeigt ist.

IV.4 Der Raum der temperierten Distributionen $S'(\mathbb{R}^n)$

Definition IV.4.1. *Es sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, u ist eine temperierte Distribution, falls es ein $p \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}_+^*$ gibt, so dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le C\, \mathcal{N}_p(\varphi).$$

Bemerkung: Es folgt unmittelbar, dass $ord(u,k) = p$.

Beispiele von temperierten Distributionen:

i) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Jedes $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist eine temperierte Distribution. Es sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le C \sum_{|\beta|\le p} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\, \mathcal{N}_p(\varphi).$$

ii) $L^p(\mathbb{R}^n)$. Jedes $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, ist eine temperierte Distribution. Es sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Dann gilt

$$|\langle u, \varphi\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u\, \varphi \right| \le \|u\|_p \|\varphi\|_{p'}$$

Es sei nun für $p \ne \infty$.

$$\|\varphi\|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{p'} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^{(n+1)\,p'}}{(1+|x|^2)^{(n+1)\,p'}} |\varphi|^{p'} \le C \left(\mathcal{N}_{2(n+1)}\,(\varphi)\,\right)^p$$

$\Rightarrow u$ ist eine temperierte Distribution.

Beispiel einer Distribution, die keine temperierte Distribution ist:
Wir betrachten die folgende Funktion $u : t \mapsto e^t$. Da $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ist $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Angenommen, es gäbe $C > 0$ und $p \in \mathbb{N}$, so dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \; \|(1 + |x|)^p \sum_{j=0}^{p} |\varphi^{(j)}(x)| \, \|_\infty,$$

so würde für $\varphi = \chi_R \, e^x$, wobei $\chi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $\chi \equiv 1$ auf $B_R(0)$ und $\chi \equiv 0$ auf $B_{R+1}(0)^c$, folgen

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq C_j \cdot e^x \; \mathbf{1}_{|x|<R+1} \leq C \, e^R$$

und somit $|\langle u, \varphi \rangle| \leq P(R) e^R$, wobei $P \in \mathbb{R}[x]$. Andererseits gilt

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \chi_R(x) e^x \sim e^{2R}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Abschätzung $|\langle u, \varphi \rangle| \leq P(R) e^R$.

Proposition IV.4.2. *Es sei u eine temperierte Distribution. Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von u zu einer linearen und stetigen Abbildung $S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Der Raum dieser Fortsetzungen wird mit $S'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.* □

Beweis IV.4.2: Aus Kapitel II ist bekannt:
l ist eine lineare, stetige Abbildung $S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|l(\varphi)| \leq C \; \mathcal{N}_p(\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

($\to$ vgl. Proposition II.1.3.)

Es sei nun u eine temperierte Distribution und es sei $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Gemäss Satz IV.3.8. gibt es eine Folge $\varphi_j, \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, mit $\varphi_j \longrightarrow_{j\to\infty} \varphi$. Wir setzen nun

$$\langle u, \varphi \rangle := \lim_{j\to\infty} \langle u, \varphi_j \rangle.$$

Behauptung: Dieser Limes existiert und ist unabhängig von der Folge φ_j.

Beweis der Behauptung: $\langle u, \varphi_j \rangle$ ist sogar eine Cauchy-Folge, denn

$$|\langle u, \varphi_k \rangle - \langle u, \varphi_l \rangle| = |\langle u, \varphi_k - \varphi_l \rangle| \; \leq \; C \; \mathcal{N}_p(\varphi_k - \varphi_l) \longrightarrow_{k,l\to\infty} 0.$$

Dies zeigt die Existenz des Limes wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Es sei nun φ_j' eine andere Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, welche ebenfalls gegen φ konvergiert. Dann gilt

$$|\langle u, \varphi_j \rangle - \langle u, \varphi_j' \rangle| \leq C \; \mathcal{N}_p(\varphi_j - \varphi_j') \longrightarrow_{j\to\infty} 0.$$

□

Definition IV.4.3. *Es sei* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $S'(\mathbb{R}^n)$*. Dann konvergiert* u_j *gegen* u *in* S'*, falls für alle* $\varphi \in S$ *gilt*

$$\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle.$$

Bemerkung IV.1: Aus $u_j \to u$ in S' folgt $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$. Umgekehrt folgt aber aus $u_j \in S' \to u \in S'$ in $\mathcal{D}'$ nicht $u_j \to u$ in S'. □

Beispiel: Wir betrachten $S'(\mathbb{R})$. Einerseits gilt $e^{j^2}\delta_j \longrightarrow_{j\to\infty} 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Andererseits gilt aber für

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2} \in S(\mathbb{R}) : \langle e^{j^2}\delta_j, \varphi\rangle = e^{j^2/2} \to \infty.$$

Bemerkung IV.2: Es gelte $u_j \in S' \to u \in S'$ in $\mathcal{D}'$, des Weiteren nehmen wir an, es gebe $K \subset \mathbb{R}^n, K$ kompakt, so dass $\mathit{supp}\, u_j \subset K \quad \forall j$. Daraus folgt $u_j \in \mathcal{E}'(K)$ und $u_j \to u$ in S'. Denn: Es sei $\Theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \Theta \equiv 1$ auf K, dann gilt

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{S',S} = \langle u_j, \Theta\varphi\rangle_{S',C_0^\infty} \to \langle u, \Theta\varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle,$$

wobei $\varphi \in S$.

Bemerkung IV.3: Angenommen $\langle u_j, \varphi\rangle, u_j \in S'(\mathbb{R}^n)$, konvergiere gegen einen Grenzwert für jedes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es ein $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, so dass gilt $\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$. ($\to$ Banach-Steinhaus für Fréchetträume.)

Definition - Proposition IV.4.4. *Es sei* $u \in S'$ *und es sei* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$*. Dann definieren wir:*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle, \varphi \in S'.$$

Und es gilt

$$\partial^\alpha u \in S'.$$

Es sei weiter $u_j \in S' \to u \in S'$ *in* S'*, dann gilt*

$$\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u \quad \mathit{in} \quad S'.$$

□

Beweis IV.4.4:

$$|\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle| = |(-1)^{|\alpha|}\langle u,\, \partial^\alpha\, \varphi\rangle| \leq C\, \mathcal{N}_p\,(\partial^\alpha \varphi) \leq C\, \mathcal{N}_{p+|\alpha|}\,(\varphi).$$

Dies zeigt, dass $\partial^\alpha\, u \in S'$. Weiter gilt

$$\langle \partial^\alpha u_j,\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle u_j,\, \partial^\alpha\, \varphi\rangle \to \langle u,\, \partial^\alpha \varphi\rangle\,(-1)^{|\alpha|} = \langle \partial^\alpha u,\, \varphi\rangle,$$

da $\partial^\alpha\, \varphi \in S$ für $\varphi \in S$ und $u_j \to u$ in S'. □

Definition IV.4.5. *Wir bezeichnen mit* $O_M(\mathbb{R}^n)$ *die Menge aller glatten, im Unendlichen langsam wachsenden Funktionen, das heisst* $f \in O_M(\mathbb{R}^n)$ *genau dann, wenn* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\forall \beta \in \mathbb{N}^n\ \exists\ C_\beta > 0$ *und* $\exists\ m_\beta \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta\,(1 + |x|)^{m_\beta} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit anderen Worten wächst f *höchstens polynomial.* □

Proposition IV.4.6. *Es sei $f \in O_M(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

i) $\forall \varphi \in S$ *ist* $f\,\varphi \in S$.

ii) $\forall u \in S'$ *ist* $fu \in S'$, *wobei* $\langle fu,\, \varphi\rangle := \langle u,\, f\,\varphi\rangle$.

iii) *Es sei* $u_j \to u$ *in* S', *dann gilt* $fu_j \to fu$ *in* S'. □

Beweis der Position IV.4.6:

i)

$$\left|\partial^\beta\,(f\varphi)\right| = \left|\sum_{\delta\le\beta} C_\delta\,\partial^\delta f\,\partial^{\beta-\delta}\,\varphi\right| \le \sum_{\delta\le\beta} C_\delta(1+|x|)^{m_\delta}|\partial^{\beta-\delta}\,\varphi|$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_p\,(f\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha|\le p\\|\beta|\le p}} \|x^\alpha\,\partial^\beta(f\varphi)\|_\infty$$

$$\le C \sum_{\substack{|\alpha|\le p\\|\beta|\le p}} \|x^{\alpha+m}\,\partial^\beta\varphi\|_\infty \le C\,\mathcal{N}_{m+p}\,(\varphi),$$

wobei

$$m = \max_{|\beta|\le p}\; m_\beta.$$

Da $\mathcal{N}_{m+p}\,(\varphi) < \infty$, folgt nun, dass $f\varphi \in S$.

ii) Aus i) ist sofort klar, dass die Definition $\langle fu,\, \varphi\rangle := \langle u,\, f\varphi\rangle$ Sinn macht. Ausserdem gilt

$$|\langle fu, \varphi\rangle| = |\langle u, f\varphi\rangle| \le C\,\mathcal{N}_p(f\varphi) \le C'\,\mathcal{N}_{m+p}(\varphi) \Rightarrow fu \in S'.$$

iii)

$$\langle fu_j,\, \varphi\rangle = \langle u_j,\, f\varphi\rangle \to \langle u, f\varphi\rangle = \langle fu,\, \varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in S.$$

□

IV.5 Fouriertransformation von temperierten Distributionen

Definition - Proposition IV.5.1. *Es sei $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformierte von u, mit $\hat{u}$ oder $\mathcal{F}(u)$ bezeichnet, ist die folgende temperierte Distribution:*

$$\forall\varphi \in S(\mathbb{R}^n)\,\langle \hat{u},\, \varphi\rangle := \langle u,\, \hat{\varphi}\rangle.$$

Beweis IV.5.1:

$$|\langle \hat{u},\, \varphi \rangle| = |\langle u,\, \hat{\varphi} \rangle| \leq C\,\mathcal{N}_p(\hat{\varphi}) \leq C''\,\mathcal{N}_{p+n+1}\,(\varphi),$$

wobei die letzte Ungleichung wegen Satz IV.3.4 gilt. Dies zeigt, dass $\hat{u}$ tatsächlich eine temperierte Distribution ist.

Satz IV.5.2. *Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus $S' \to S'$, dessen Inverse durch $(2\pi)^{-n}\,\bar{\mathcal{F}}$ gegeben ist, wobei*

$$\langle \bar{\mathcal{F}}(u),\, \varphi \rangle := \langle u,\, \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \rangle.$$

Es sei weiter $u_j \in S' \to u \in S'$ in S', dann gilt $\hat{u}_j \to \hat{u}$ in S'. □

Beweis IV.5.2:

$$\langle (2\pi)^{-n}\,\bar{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}(u),\, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}(u),\, \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \rangle = (2\pi)^{-n}\,\langle u,\, \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \rangle = \langle u,\, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in S'.$$

Weiter gilt

$$\langle \hat{u}_j,\, \varphi \rangle = \langle u_j,\, \hat{\varphi} \rangle \to \langle u,\, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u},\, \varphi \rangle,$$

das heisst

$$\forall \varphi \in S\,\langle \hat{u}_j,\, \varphi \rangle \to \langle \hat{u},\, \varphi \rangle,$$

das heisst

$$\hat{u}_j \to \hat{u} \quad \text{in} \quad S'.$$

□

Satz IV.5.3. *Es sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\hat{u} \in O_M(\mathbb{R}^n)$ und $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\hat{u}(\zeta) = \langle u, e^{-ix\cdot\zeta} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$

□

Beweis des Satzes IV.5.3: Es sei

$$v := \langle u,\, e^{-ix\cdot\zeta} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \langle u,\, \Theta\, e^{-ix\cdot\zeta} \rangle_{\mathcal{D}', C_0^\infty}$$

wobei $\Theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\Theta \equiv 1$ auf *supp* u.

Behauptung 1: $v \in O_M(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wegen Lemma III.3.3 gilt

$$\partial_\zeta^\alpha\; v = \langle u,\, \partial_\zeta^\alpha\,(e^{-ix\cdot\zeta}) \rangle = \langle u,\, (-i)^{|\alpha|}\, x^\alpha e^{-ix\cdot\zeta} \rangle.$$

Da $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|\langle u,\, (-i)^{|\alpha|}\, x^\alpha e^{-ix\cdot\zeta} \rangle| \leq\; C \sum_{|\beta| \leq p} \|\, \partial_x^\beta\,(x^\alpha e^{-ix\cdot\zeta})\,\|_{L^\infty\,(supp\, u)}$$

$$\leq C'\,(1 + |\zeta|^p),$$

das heisst

$$|\partial_\zeta^\alpha v| \leq C' (1+|\zeta|^p)$$

daraus folgt

$$v \in O_M(\mathbb{R}^n).$$

Behauptung 2: $v = \hat{u}$.

Beweis: Es sei $\varphi \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi\rangle = \langle v(\zeta), \varphi(\zeta)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} v(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x), e^{-ix\cdot\zeta}\rangle\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle u(x), e^{-ix\cdot\zeta}\, \varphi(\zeta)\right\rangle d\zeta = \left\langle u(x), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\, \varphi(\zeta)\right\rangle \\
&= \langle u(x), \hat{\varphi}(x)\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

wobei die drittletzte Gleichheit wegen Lemma III 3.3 gilt. Ausserdem lässt sich die obige Distribution durch eine Integration darstellen, da $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Da Obiges $\forall \varphi \in S$ gilt, folgt nun, dass $\hat{u} = v$ in S'. □

Bemerkung IV.5.4. $v \in S'$, denn $1 \in S'$ ($\rightarrow$ vgl. Korollar unten und $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus $S' \rightarrow S'$). Dann folgt mit Proposition IV.4.6., dass $v = v \cdot 1 \in S'$.

Korollar IV.5.5. *Es gilt*

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1$$

$$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\cdot\zeta}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\, \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_0) = i^{|\alpha|}\, \zeta^\alpha$$

$$\mathcal{F}(1) = \delta_0\, (2\pi)^n$$

$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot\zeta}) = (2\pi)^n\, \delta_a$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^n i^{|\alpha|}\, \partial^\alpha\, \delta_0.$$

□

Beweis des Korollars IV.5.5: $\delta_0,\, \delta_a$ und $\partial^\alpha\, \delta_0$ sind alles Distributionen aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ daher kann man Satz IV.5.3. anwenden

$$\mathcal{F}\ (\delta_0) = \langle \delta_0,\, e^{-ix\cdot\zeta}\rangle = 1$$

$$\mathcal{F}(\delta_a) = \langle \delta_a,\, e^{-ix\cdot\zeta}\rangle = e^{-ia\cdot\zeta}$$

$$\mathcal{F}\,(\partial^\alpha\, \delta_0) = \langle \partial^\alpha\, \delta_0,\, e^{-ix\cdot\zeta}\rangle = \langle \delta_0,\, \partial_x^\alpha e^{-ix\cdot\zeta}\rangle(-1)^{|\alpha|}$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}\zeta^\alpha = i^{|\alpha|}\,\zeta^{|\alpha|}.$$

Behauptung: $\forall u \in \mathcal{E}' : \bar{\mathcal{F}}\,(u)\,(\zeta) = \langle u(x),\, e^{ix\cdot\zeta}\rangle.$

Beweis der Behauptung: $\langle u(x), e^{ix\cdot\zeta}\rangle =: w(\zeta)$. Dann gilt

$$\langle w,\, \varphi\rangle = \langle w(\zeta),\, \varphi(\zeta)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} w(\zeta)\,\varphi\,(\zeta)\; d\zeta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x),\, e^{ix\cdot\zeta}\rangle \varphi\,(\zeta)\; d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(x),\, e^{ix\cdot\zeta}\,\varphi(\zeta)\rangle\, d\zeta$$

$$= \langle u(x), \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\zeta}\,\varphi(\zeta)\; d\zeta\rangle = \langle u(x),\, \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi)\rangle = \langle \bar{\mathcal{F}}\,(u),\; \varphi\rangle.$$

Wiederum ist die Darstellung der Distribution durch ein Integral zulässig, da $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ausserdem gilt $(2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\,\bar{\mathcal{F}} = id$ in S'. Damit gilt

$$\langle \delta_0\ (2\pi)^n,\, \varphi\rangle = \langle (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\ (\delta_0)(2\pi)^n,\, \varphi\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\ (\delta_0),\, \varphi\rangle = \langle \bar{\mathcal{F}}\ (\delta_0),\, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle 1,\, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}(1),\, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{F}\,(1) = \delta_0\ (2\pi)^n.$$

$$\langle (2\pi)^n\ \delta_a,\, \varphi\rangle = \langle (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\,(\delta_a)\ (2\pi)^n,\, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\ (\delta_a),\, \varphi\rangle$$

$$= \langle \bar{\mathcal{F}}\ (\delta_a),\, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle e^{ia\cdot\zeta},\, \mathcal{F}\ (\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}\ (e^{ia\cdot\zeta}),\, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\ (e^{ia\cdot\zeta}) = (2\pi)^n\ \delta_a.$$

$$\bar{\mathcal{F}}\ (\partial^\alpha\delta_0) = \langle \partial^\alpha\ \delta_0,\, e^{ix\cdot\zeta}\rangle = \langle \delta_0,\, \partial^\alpha\ e^{ix\cdot\zeta}\rangle(-1)^{|\alpha|} = (-1)^{|\alpha|}\, i^{|\alpha|}x^\alpha$$

$$\Rightarrow\ \partial^\alpha\ \delta_0 = (2\pi)^{-n}(-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}x^\alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^n\, i^{|\alpha|}\ \partial^\alpha\ \delta_0.$$

Satz IV.5.6. (Fouriertransformation in L^2): *Die Abbildung $L^2 \to L^2 : u \mapsto \hat{u}(2\pi)^{-n/2}$ ist eine Isometrie*

$$\forall u \in L^2 : \|\hat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|u\|_{L^2},$$

ausserdem ist die Abbildung bijektiv und ihre Inverse ist gegeben durch $(2\pi)^{-n/2}\,\bar{\mathcal{F}}$.

Beweis des Satzes IV.5.6: Es sei zunächst $u \in S \subset L^2$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \bar{u} = \int_{\mathbb{R}^n} u\,\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}(\bar{u}))(2\pi)^{-n}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u) \cdot \bar{\mathcal{F}}(\bar{u})\ (2\pi)^{-n}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)\overline{\mathcal{F}(u)}\ (2\pi)^{-n}$$

$$= \|\mathcal{F}(u)\|^2\ (2\pi)^{-n}.$$

Es gilt also, dass die Abbildung

$$(S, \|.\|_{L^2}) \ni u \mapsto \hat{u}(2\pi)^{-n/2} \in (S, \|.\|_{L^2})$$

eine Isometrie ist. Aus der Funktionalanalysis I wissen wir: $\overline{C_0^\infty}^{L^2} = L^2$. Es folgt nun unmittelbar $\bar{S}^{L^2} = L^2$. Dies wiederum impliziert

$$\forall u \in L^2 : \|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}(2\pi)^{n/2},$$

denn $\forall u \in S$ gilt

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}\ (2\pi)^{n/2}.$$

Zum Beweis der Aussagen über die Bijektivität und die Inverse: vgl. Bony “Cours d’Analyse, S. 177.

Satz IV.5.7. *Es gelte entweder $u \in \mathcal{E}'$ und $v \in S'$ oder $u \in L^1$ und $v \in L^1$. Dann gilt*

$$\widehat{u \star v} = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

Beweis des Satzes IV.5.7: Es sei zunächst $u \in L^1$ und es sei $v \in L^1$.

$$\widehat{u \star v}\ (\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy\ dx.$$

Da $e^{-ix\cdot\zeta}\ u(x-y)\ v(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dürfen wir Fubini anwenden, das heisst

$$\begin{aligned}
\widehat{u \star v}\,(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\, u(x-y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z+y)\cdot\zeta}\, u(z)\, dz\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\zeta}\, v(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\zeta}\, u(z)\, dz \\
&= \hat{v}\,(\zeta) \cdot \hat{u}\,(\zeta).
\end{aligned}$$

Es seien nun $u, v \in \mathcal{E}'$, dann gilt gemäss Proposition III.4.3 $u \star v \in \mathcal{E}'$ und $supp\, u \star v \subset supp\, u + \ supp\, v$. Dann gilt gemäss Satz IV.5.3.

$$\widehat{u \star v}\,(\zeta) = \langle u \star v(x),\ e^{-ix\cdot\zeta} \rangle = \langle u(y),\ \check{v}_x \star e^{-ix\cdot\zeta}\ (y) \rangle.$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}
\langle \check{v} \star e^{-ix\cdot\zeta},\ \varphi \rangle &= \langle e^{-ix\cdot\zeta},\ v \star \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\, \varphi(y)\, dy\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y+z)\cdot\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} v(z)\, \varphi(y)\, dy\ dz \\
&= \hat{v} \cdot \hat{\varphi} \in S,
\end{aligned}$$

da $\hat{v}\ O_M$ und $\hat{\varphi} \in S$.

Es sei nun $u \in S'$.

Behauptung: Es gibt eine Folge $u_j \in \mathcal{E}'$ für welche gilt $u_j \to u$ in S'.

Beweis: Es sei $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\Psi \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Wir setzen $u_j := \Psi\left(\frac{x}{j}\right) \cdot u$. Dann gilt $\forall \varphi \in S$:

$$\left\langle \psi\left(\frac{x}{j}\right) u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \psi\left(\frac{x}{j}\right) \varphi \right\rangle$$

und

$$\left| \left\langle \Psi\left(\frac{x}{j}\right) u - u,\ \varphi \right\rangle \right| \leq C \cdot \mathcal{N}_p\left(\Psi(\frac{x}{j}) \cdot \varphi - \varphi\right) \to 0,$$

wobei die letzte Ungleichung wegen Satz IV.3.8. gilt.

Es sei nun also $u \in \mathcal{E}'$ und $v \in S'$ sowie $v_j \in \mathcal{E}'$ eine Folge, welche in $\mathcal{S}'$ gegen v konvergiert. Wir wissen bereits, dass gilt $\widehat{u \star v_j} = \hat{u} \cdot \hat{v}_j$ und dass $\hat{u} \in O_M(\mathbb{R}^n)$. Da ausserdem $\hat{v}_j \to v$ in $\mathcal{S}'$ (vgl. Satz IV.5.2.), folgt nun mit Proposition IV.4.6., dass $\hat{u} \cdot \hat{v}_j \to \hat{u} \cdot \hat{v}$ in $\mathcal{S}'$.

Auf Grund der Stetigkeit der inversen Fouriertransformation konvergiert $u \star v_j$ in $\mathcal{S}'$ gegen eine temperierte Distribution w, für welche gilt $\hat{w} = \hat{u} \cdot \hat{v}$. Aus der Konvergenz in $\mathcal{S}'$ folgt aber die Konvergenz in $\mathcal{D}'$, folglich konvergiert $u \star v_j \to w$ in $\mathcal{D}'$. Andererseits gilt $u \star v_j \to u \star v$ in $\mathcal{D}'$ ($\to$ Details: vgl. Bony S.146). Schliesslich gilt also

$$u \star v = w \in \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \widehat{u \star v} = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

Korollar IV.5.8. *$\forall u \in \mathcal{S}'$ gilt*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}\, \zeta^\alpha\, \mathcal{F}(u)$$

$$\mathcal{F}(\tau_a u) = e^{-ia\cdot\zeta}\, \mathcal{F}(u)$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{|\alpha|}\, \partial^\alpha \mathcal{F}(u).$$

Für $u \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in\ O_M$ gilt

$$\mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-n}\, \hat{\varphi} \star \hat{u},$$

falls $\hat{\varphi}$ kompakten Träger hat.

Beweis des Korollars IV.5.8:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_0 \star u) = \widehat{\partial^\alpha \delta_0} \cdot \hat{u} = i^{|\alpha|} \zeta^\alpha\, \mathcal{F}(u)$$

$$\mathcal{F}(\tau_a u) = \mathcal{F}(\delta_a \star u) = \hat{\delta}_a \cdot \hat{u} = e^{-ia\cdot\zeta}\, \mathcal{F}(u),$$

denn

$$\langle \tau_a u,\, \varphi \rangle = \langle u,\, \tau_{-a}\, \varphi \rangle$$

und

$$\langle \delta_a \star u, \varphi \rangle = \langle u, \check{\delta}_a \star \varphi \rangle$$

sowie

$$\check{\delta}_a \star \varphi = \varphi(x + a) = \tau_{-a} \varphi(x)$$

also gilt

$$\tau_a\, u = \delta_a \star u.$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{\mathcal{F}}\left(i^{|\alpha|}\, \partial^\alpha\, \mathcal{F}(u) \right),\, \varphi \right\rangle &= \left\langle i^{|\alpha|}\, \partial^\alpha\, \mathcal{F}(u),\, \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \right\rangle \\
&= i^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \left\langle\, \mathcal{F}(u), \partial^\alpha\, \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \right\rangle = (-i)^{|\alpha|} \left\langle u,\, \mathcal{F}\left(\partial^\alpha_\zeta \bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \right) \right\rangle \\
&= (-i)^{|\alpha|} \left\langle u,\, i^{|\alpha|} x^\alpha\, \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \right\rangle = \left\langle x^\alpha\, u,\, \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\,(\varphi) \right\rangle = \left\langle \bar{\mathcal{F}}\, \mathcal{F}(x^\alpha u),\, \varphi \right\rangle \\
&\Rightarrow \mathcal{F}(x^\alpha\, u) = i^{|\alpha|}\, \partial^\alpha\, \mathcal{F}(u).
\end{aligned}$$

Einerseits gilt

$$(2\pi)^{-n}\,\bar{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}(\varphi u) = \varphi u.$$

Andererseits gilt analog zu Satz IV.5.6.

$$(2\pi)^{-2n}\,\bar{\mathcal{F}}(\hat{\varphi}\star\hat{u}) = (2\pi)^{-2n}\bar{\mathcal{F}}(\hat{\varphi})\cdot\bar{\mathcal{F}}(\hat{u}) = \varphi\,u.$$

Daraus folgt nun die letzte Behauptung des Korollars.

IV.6 Cauchy-Probleme

In diesem Abschnitt wird die Frage nach der Lösbarkeit von partiellen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen untersucht.

Zunächst stellt sich die folgende Frage: Was für Bedingungen muss

$$A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\,[= (C^\infty(\mathbb{R}^n))^\star]\,.$$

erfüllen, damit es genau ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $A \star u = f$ für ein gegebenes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$?
Es sei nun $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\langle A \star u,\, \varphi\rangle := \langle A, \check{u}\star\varphi\rangle = \langle A(y),\, \langle u(-x),\, \varphi(x-y)\rangle\rangle.$$

Wegen der Stetigkeit von A und u folgt daraus, dass $A\star u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Man beachte, wie die Faltung einer $\mathcal{D}'$-Distribution mit einer $\mathcal{E}'$-Distribution im Abschnitt III.4 definiert wurde!

Satz IV.6.1. *Es sei $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ von der Form*

$$A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\,\partial^\alpha\,\delta_0,$$

wobei die Fourriertransformierte von A, $\hat{A} = \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha\, x^\alpha$, die folgende Eigenschaft hat: $\nexists\ \zeta \in \mathbb{R}^n$, so dass $\hat{A}(\zeta) = 0$. Dann gibt es für jedes beliebige $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ genau ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $A \star u = f$.

Beweis des Satzes IV.6.1: Wir werden zuerst $\mathcal{F}$ an auf $A\star u = f$. Es gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gemäss Proposition IV.5.1. Wegen Satz IV.5.7. gilt ausserdem $\widehat{A\star u} = \hat{A}\cdot\hat{u}$. Da $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist nach Satz IV.5.3. $\hat{A} \in O_M\,(\mathbb{R}^n)$, woraus mit Proposition IV.4.6. ii) folgt, dass $\hat{A}\cdot\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Es gilt nun also, die Gleichung $\hat{A}\cdot\hat{u} = \hat{f}$ nach $\hat{u}$ aufzulösen

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{\hat{A}}\,.$$

Dies können wir ohne weiteres tun, da

$$\hat{A}(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

und die Division durch $\hat{A}$, ein Polynom, lässt im Unendlichen f noch schneller abfallen, das heisst $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wenden wir nun die inverse Fouriertransformation auf $\hat{u}$ an, so erhalten wir eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften.
Wir nehmen nun an, es gebe eine weitere Lösung w mit denselben Eigenschaften, das heisst $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $A \star w = f$. Dann gilt

$$A \star u - A \star w = A \star (u - w) = 0,$$

das heisst

$$\langle A \star (u - w), \varphi \rangle = \langle u - w, \check{A} \star \varphi \rangle = 0 \quad \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt aber sofort, dass $u - w = 0$, woraus wir die Eindeutigkeit erhalten.

Beispiel IV.6.2. Es sei $A = \Delta\delta_0$. Dann gilt

$$\hat{A}(\zeta) = -|\zeta|^2.$$

($\rightarrow$ vgl. Korollar IV.5.5.). Nun sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $\Delta\delta_0 \star u = 0$. Durch Anwendung der Fouriertransformation erhält man $-|\zeta|^2 \cdot \hat{u} = 0$. Daraus folgt $supp\, \hat{u} \subseteq \{0\}$, woraus sofort folgt

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \partial^\alpha \, \delta_0$$

und somit

$$u \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha \, x^\alpha.$$

Dies bedeutet, dass die einzigen harmonischen temperierten Distributionen Polynome sind.

Beispiel IV.6.3. Wir betrachten nun $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta\delta_0 \star u = 0$. Falls wir fordern, dass u im Unendlichen beschränkt sein soll, folgt, dass u konstant sein soll, da aus Beispiel IV.6.2. folgt, dass u ein Polynom ist. Fordern wir weiter, dass u im Unendlichen gegen Null streben soll, folgt, dass $u \equiv 0$ sein muss.

Betrachten wir Anfangs-/Randbedingungen, wird die Geometrie wichtig.

Bemerkung IV.6.4. Nicht alle möglichen Lösungen von $A \star u = f$, $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ liegen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Betrachtet man beispielsweise $\Delta\delta_0 \star w = 0$, so ist jedes $w = Re(f)$, wobei f harmonisch ist, eine Lösung. Aber

$$w = e^x \cos\, y = Re(e^z) \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Beispiel IV.6.5. *Poisson-Gleichung:*

Wir suchen eine Lösung des folgenden Problems

$$\Delta\delta_0 \star u (= \delta_0 \star \Delta u = \Delta u) = f, \quad f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Wir nehmen an, es gelte $n \geq 3$. Die Fouriertransformation liefert $-|\zeta|^2 \cdot \hat{u} = \hat{f}$, wobei auf Grund obiger Annahmen

$$-\frac{\hat{f}}{|\zeta|^2} \in L^1_{loc}$$

in der Nähe des Ursprungs. Somit ist

$$-\frac{\hat{f}}{|\zeta|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

und

$$u = (2\pi)^{-n} \, \bar{\mathcal{F}} \left(-\frac{\hat{f}}{|\zeta|^2} \right)$$

ist die gesuchte Lösung des Problems $\Delta u = f$.

Beispiel IV.6.6. *Wärmeleitungsgleichung:*

Wir suchen eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}')$ des folgenden Problems

$$(\partial_t - \Delta)u = 0, \quad t > 0, \quad u(0,x) = f(x).$$

Wir betrachten nun die Fouriertransformation in x und erhalten unter der Annahme, dass $u \in \mathcal{S}'$

$$(\partial_t + |\zeta|^2)\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0,\zeta) = \hat{f}(\zeta).$$

Daraus folgt sofort

$$\hat{u}(t,\zeta) = e^{-t|\zeta|^2} \hat{f}(\zeta).$$

Dieses Resultat schreiben wir nun wie folgt um:

$$\hat{u}(t,\zeta) = \hat{H}(t,\zeta) \cdot \hat{f}(\zeta),$$

wobei

$$\hat{H}(t,\zeta) := e^{-t\cdot|\zeta|^2},$$

das heisst

$$u = H \star f.$$

Wir berechnen nun $H(t,x)$: Für $a = \dfrac{1}{4t}$ folgt aus Proposition IV.2.2.

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\left(e^{-|x|^2/4t}\right) \cdot (2\pi)^{-n} = (2\pi)^{-n} \, (4\pi\, t)^{n/2} \; \bar{\mathcal{F}}\left(e^{-|\zeta|^2 t}\right)$$

$$\Rightarrow H(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}.$$

Allgemein gilt: $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\exists!$ Lösung $u = H \star f \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\right)$ des obigen Problems. ($\rightarrow$ Taylor, “Partial Differential Equations”, volume I, S. 216 f.)

Beispiel IV.6.7. *Wellengleichung:*

Wir suchen eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}')$ des folgenden Problems

$$\partial_t^2 u - \Delta u = \Box u = 0,\ u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x),$$

wobei $f, g \in \mathcal{E}'$, $t > 0$.

In einer Dimension: Gesucht ist u, so dass $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. Dann ist $u(t,x) = h_1(t-x) + h_2(t-x)$ eine Lösung für beliebige $h_1,\ h_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Energieerhaltung: $\big(f \in C^2(\mathbb{R}^n)\big)$

$$E(f) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t f|^2 + \|\nabla f\|^2\ dx$$

wobei

$$\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^n |\partial_{x_i} f|^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_t\ E\ (f) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t\ f)(\partial_t^2\ f) + \sum (\partial_t\, \partial_{x_i}\ f)(\partial_{x_i} f)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t\ f)(\partial_t^2\ f) + \sum (\partial_{x_i}\, \partial_t f)\ (\partial_{x_i}\ f)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t\ f)\ (\partial_t^2\ f - \Delta\ f)\ dx\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung durch partielle Integration zustande kommt. Ist also f eine Lösung der Wellengleichung, so ist E konstant.

Als Nächstes wenden wir wieder Fouriertransformation an und erhalten

$$(\partial_t^2 + |\zeta|^2)\hat{u} = 0,\ \hat{u}(0,\zeta) = \hat{f}(\zeta),\ \partial_t \hat{u}(0,\zeta) = \hat{g}(\zeta)$$

Dies führt uns zu folgender Lösung

$$\hat{u}(t,\zeta) = C \cdot \sin(t|\zeta|) + C' \cdot \cos(t|\zeta|).$$

Mit

$$\partial_t \hat{u}(t,\zeta) = C|\zeta|\cos(t|\zeta|) - C'|\zeta|\sin(t|\zeta|)$$

folgt nun

$$C \cdot |\zeta| = \hat{g}(\zeta)$$

und

$$C' = \hat{f}(\zeta).$$

Damit erhält man

$$\hat{u}(t,\zeta) = \frac{\hat{g}(\zeta)}{|\zeta|}\ \sin(t \cdot |\zeta|) + \hat{f}(\zeta)\cos(t \cdot |\zeta|). \qquad (\star)$$

Daraus lässt sich mit Hilfe der inversen Fouriertransformation $u(t,\zeta)$ bestimmen. Andererseits lässt sich u auch mittels einer Grundlösung $R(t,x)$ bestimmen

$$u(t,x) = R(t,x) \star g + \partial_t\, R(t,x) \star f. \tag{1}$$

($R(t,x)$ ist eine Lösung des Problems mit $f=0$ und $g=\delta_0$, die sogenannte Riemannfunktion. Man beachte an dieser Stelle auch das, was wir im Kapitel III gemacht haben.)

Als Nächstes untersuchen wir die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung. Es seien $f,g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, welche die Wellengleichung löst, das heisst

$$\Box u = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad \partial_t\, u(0,x) = g(x),$$

und die Lösung ist durch (1) gegeben. Wir nehmen nun also an, u löse die Wellengleichung mit $f=g=0$ (unter der Annahme, es gebe zwei verschiedene Lösungen, entspricht u deren Differenz). Dann gilt

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : v(t,x) := u(t,x) \star \varphi(x)$$

erfüllt $\Box\, v = 0$ und

$$v(0,x) = u(0,x) \star \varphi(x) = 0 \star \varphi(x) = 0$$

sowie

$$\partial_t v(0,x) = \partial_t \big(u(0,x) \star \varphi(x)\big) = \partial_t u(0,x) \star \varphi(x) = 0 \star \varphi(x) = 0.$$

Es sei nun φ_n eine Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_n \to \delta_0$. Dann gilt $v_n := u \star \varphi_n \to u$ und $v_n \in C^\infty$ und löst die Wellengleichung. Daraus folgt $\partial_t\ E\ (v_n) = 0 \quad \forall n$. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} E(v_n, t=0) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t v_n|^2 + \|\nabla v_n\|^2\ dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\partial_t v_n)|^2 + \sum |\partial_{x_i}\, v_n|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \big(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(|\partial_{x_i}\, v_n|)\big)^2, \end{aligned}$$

da

$$\partial_t v_n\ |_{t=0} = 0$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \big(\mathcal{F}^{-1}\big(|i\zeta_i\, \hat{v}_n\,(\zeta)|\big)\big)^2 = 0,$$

da

$$v_n(x)\,|_{t=0} = 0,$$

also

$$\hat{v}_n(\zeta)\,|_{t=0} = 0.$$

Schlussendlich haben wir also $E(v_n) \equiv 0 \quad \forall n$, woraus nun $u \equiv 0$ folgt. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. ($\rightarrow$ vgl. auch Taylor, "Partial Differential Equations", volume I, S.218.)

Als Letztes wollen wir noch $R(t,x)$ näher anschauen. Aus ($\star$) und (1) folgt:

$$\hat{R}(t,\zeta) = \frac{\sin(t\cdot|\zeta|)}{|\zeta|}.$$

Daraus erhält man

$$R(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t\cdot|\zeta|)}{|\zeta|}\right).$$

Andererseits kann man folgenden Weg einschlagen: Es gilt

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{S^{n-1}}.$$

Da die Wellengleichung für $f=0$, $g=\delta_0$ rotationsinvariant ist, muss auch $R(t,x)$ rotationsinvariant sein. Es gilt also

$$\left(\partial_t^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right)\right) R_n = 0,$$

wobei R_n die gesuchte Grundlösung in n Dimensionen bezeichne.
Also gilt auch

$$\frac{1}{r}\,\partial_r\,(\Box)\,R_n = \left(\frac{1}{r}\,\partial_t^2 - \frac{1}{r}\,\partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r\frac{1}{r}\right)\,\partial_r\,R_n, \tag{2}$$

denn gemäss Obigem reduziert sich die Gleichung $\Box_{\mathbb{R}^n}\,R=0$ unter Rotationsvarianz auf

$$\left(\partial_t^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\right)\right) R_n = 0.$$

Da

$$\partial_r\left(\frac{1}{r}\,g\right) = -\frac{1}{r^2}\,g + \frac{1}{r}\,\partial_r\,g.$$

und

$$\partial_r^2\left(\frac{1}{r}\,g\right) = \partial_r\left(\partial_r\left(\frac{1}{r}g\right)\right) = \frac{2}{r^3}\,g - \frac{2}{r^2}\,\partial_r\,g + \frac{1}{r}\,\partial_r^2\,g + \frac{1}{r}\,\partial_r^2\,g - \frac{2}{r}\,\partial_r\left(\frac{1}{r}\,g\right),$$

kann (2) folgendermassen umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\partial_r(\Box)R_n &= \left(\frac{1}{r}\,\partial_t^2 - \left(\partial_r^2\left(\frac{1}{r}\cdot\right)\right) + \frac{2}{r}\,\partial_r\left(\frac{1}{r}\cdot\right)\right) - \frac{n-1}{r}\,\partial_r\left(\frac{1}{r}\cdot\right)\,\partial_r\,R_n \\
&= \left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n+1}{r}\,\partial_r\right)\frac{1}{r}\,\partial_r R_n \\
&= \Box_{\mathbb{R}^{n+2}}\,R_{n+2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R_{n+2} = \frac{c}{r}\, \partial_r R_n.$$

Explizit findet man

$$R_2(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\, \dfrac{\operatorname{sign}(t)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} & \text{für } |x| < |t| \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$R_3(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\, \delta(|x| - |t|).$$

V Hilbert-Sobolev-Räume

V.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition V.1.1. *(Hilbert-Sobolevräume mit ganzzahliger Ordnung). Es sei $m \in \mathbb{N}$ und es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann liegt u im Sobolevraum $H^m(\mathbb{R}^n)$, falls $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = \sum_i |\alpha_i| \leq m$ gilt $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

$$\|u\|_{H^m} := \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^2 \right]^{1/2}.$$

Bemerkung V.1.2. Es sei $u \in H^m$, das heisst $\forall \alpha, |\alpha| \leq m$, ist $\partial^\alpha u \in L^2$. Daraus folgt:

$$\zeta^\alpha \hat{u} = C \; \mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2,$$

das heisst

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta^\alpha|^2 |\hat{u}|^2 < \infty \quad \forall \alpha \quad \text{mit} \quad |\alpha| \leq m.$$

Dies wiederum impliziert

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^m |\hat{u}|^2(\zeta) \, d\zeta < \infty,$$

das heisst

$$(1 + |\zeta|^2)^{m/2} \, \hat{u} \in L^2.$$

Umgekehrt sei nun $u \in \mathcal{S}'$, so dass $(1 + |\zeta|^2)^{m/2} \, \hat{u} \in L^2$. Dann folgt $\forall \alpha$ mit $|\alpha| \leq m \, \zeta^\alpha \, \hat{u} \in L^2$, woraus wiederum folgt, dass $\forall \alpha$ mit $|\alpha| \leq m \, \partial^\alpha \, u \in L^2$.

Aus diesen Überlegungen folgt folgende Proposition

Proposition V.1.3. *$u \in H^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1 + |\zeta|^2)^{m/2} \, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Definition V.1.4. *Es sei $s \in \mathbb{R}$. $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum der temperierten Distributionen $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für welche gilt*

$$(1 + |\zeta|^2)^{s/2} \; \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beachte $(1+|\zeta|)^{s/2} \in O_M(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt, dass $(1+|\zeta|^2)^{s/2}\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

$$\|u\|_{H^s} := \|(1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{u}\|_{L^2}.$$

Bemerkung V.1.5. Für $s \in \mathbb{N}$ stimmen die Definitionen V.1.1 und V.1.4 überein und aus der Bemerkung zur Definition V.1.1 ist auch klar, dass die beiden Normen,

$$\|u\|_{H^s} = \|(1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{u}\|_L^2$$

und

$$\|u\|_{H^s} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha\, u|^2\right]^{1/2}$$

äquivalent sind.

Proposition V.1.6. *Die Abbildung*

$$(.,.)_s : H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

$$(u,\, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s\ \hat{u}\ \bar{\hat{v}}$$

ist ein Skalarprodukt auf $H^s(\mathbb{R}^n)$*. Ausserdem ist* $(H^s(\mathbb{R}^n), (.,.)_s)$ *vollständig, das heisst* $(H^s(\mathbb{R}^n), (.,.)_s)$ *ist ein Hilbertraum.*

Beweis der Proposition V.1.6:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s\ \hat{u}\,\bar{\hat{v}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{u}(1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \bar{\hat{v}}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt nun sofort

$$|(u,v)_s| \leq \|u\|_{H^s} \cdot \|v\|_{H^s}.$$

Es gilt weiter $(u,u)_s = \|u\|^2_{H^s}$. Daraus folgt, dass $(u,u)_s$ genau dann null ist, wenn $u=0$ ist und sonst positiv ist. Dies zeigt, dass $(.,.)_s$ positiv definit ist. Ausserdem ist aus der Definition von $(.,.)_s$ sofort ersichtlich, dass gilt

$$(u,\lambda v)_s = \bar{\lambda}\,(u,v)_s$$

und

$$(\lambda u,v)_s = \lambda(u,v)_s.$$

Damit ist gezeigt, dass $(.,.)_s$ ein Skalarprodukt ist.

Wenden wir uns nun der Frage der Vollständigkeit zu.

Es bezeichne L die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} L : H^s &\to L^2 \\ u &\mapsto (1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{u}. \end{aligned}$$

L ist offensichtlich linear und bijektiv. (Man beachte die Bijektivität der Fouriertransformation.) Des Weiteren bezeichne L' die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} L' : L^2 &\to H^s \\ v &\mapsto \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, v\right). \end{aligned}$$

Es gilt nun $L^{-1} = L'$ und L ist sogar eine Isometrie zwischen H^s und L^2. Da $(L^2, \|.\|_2)$ vollständig ist ($\rightarrow$ vgl. Funktionalanalysis I), folgt nun, dass auch $(H^s, \|.\|_{H^s})$ ein Hilbertraum ist, wobei $\|.\|_{H^s}$ die von $(.,.)_s$ induzierte Norm ist.

Proposition V.1.7. *Es gilt*

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{H^s} = H^s$$

das heisst $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $(H^s, (.,.)_s)$.

Beweis von Proposition V.1.7:

Behauptung 1: $\bar{\mathcal{S}}^{H^s} = H^s$.

Beweis von Behauptung 1: Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{S}$ in L^2 dicht liegt. Es sei

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \beta \in \mathbb{N}^n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Betrachte nun

$$P(x) = (1+|x|^2)^k,\ P(x) \in O_M(\mathbb{R}^n)$$

und

$$|P(x)\, \partial^\beta \varphi(x)| \leq C,$$

da

$$\partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und $P(x) \cdot \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach Proposition IV.4.6. Es folgt sofort

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{C_{\beta,k}}{(1+|x|^2)^k}.$$

Daraus folgt weiter

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty,$$

denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C^p_{o,k}}{(1+|x|^2)^{kp}} \, dx < \infty$$

für

$$k = [n/2] + 1.$$

Des Weiteren gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty$ und $\overline{C_0^\infty}^{L^2} = L^2$. Daraus folgt $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{L^2} = L^2$.

Nun betrachten wir $L^{-1} : L^2 \mid_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$. Für $u \in \mathcal{S}$ ist $\hat{u} \in \mathcal{S}$ und da $(1+|\zeta|^2)^{-s/2} \in O_M$ ist auch $(1+|\zeta|^2)^{-s/2} \, \hat{u} \in \mathcal{S}$.

Aus dem Beweis von Proposition V.1.6. ist ausserdem bekannt, dass L^{-1} eine bijektive Isometrie ist. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, folgt daraus nun, dass $L^{-1}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\big)= \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, das heisst $\overline{\mathcal{S}\,(\mathbb{R}^n)}^{H^s} = H^s$.

Behauptung 2: $\exists \, p \in \mathbb{N}$, $\exists \, C > 0$, so dass $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\|_{H^s} \leq C \, \mathcal{N}_p \, (\varphi).$$

Beweis der Behauptung 2:

$$\|\varphi\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s \, |\hat{\varphi}|^2 \, (\zeta) \, d\zeta \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{-n} (1+|\zeta|^2)^{s+n} \, |\hat{\varphi}|^2(\zeta) \, d\zeta \right)^{1/2}$$

$$\leq C \; sup_{\mathcal{S}\in\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{s/s+n/2} \, |\hat{\varphi}(\zeta)|$$

$$\leq C \, \mathcal{N}_{[s]+1+n} \, (\hat{\varphi})$$

$$\leq C \, \mathcal{N}_{[s]+1+n+n+1} \, (\varphi) = C \, \mathcal{N}_{[s]+2+2n} \, (\varphi),$$

wobei die letzte Ungleichung wegen Satz IV.3.4 gilt.

Es sei nun $u \in H^s$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $\varphi \in \mathcal{S}$, so dass $\|u - \varphi\|_{H^s} \leq \varepsilon/2$. Weiter gibt es eine Folge $\varphi_j \in C_0^\infty$, so dass

$$\mathcal{N}_p(\varphi_j - \varphi) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wähle nun j_0, so dass

$$\mathcal{N}_p(\varphi_{j_0} - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

$$\Rightarrow \|\varphi_{j_0} - \varphi\|_{H^s} \leq \varepsilon/2.$$

Es gilt also

$$\|u - \varphi_{j_0}\|_{H^s} \le \|u - \varphi\|_{H^s} + \|\varphi_{j_0} - \varphi\|_{H^s} \le \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\big(H^s, (.,.)_s\big)$ dicht liegt.

Satz V.1.8. *Es sei $s \in \mathbb{R}$ und es sei $u \in H^{-s}$. Dann lässt sich die Abbildung*

$$\begin{aligned} u : \mathcal{S} &\to \mathbb{D} \\ \varphi &\mapsto \langle u,\, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \end{aligned}$$

eindeutig zu einer linearen, stetigen Abbildung von H^s nach $\mathbb{C}$ fortsetzen, welche mit $\langle u,\, v\rangle$ bezeichnet wird $\forall v \in H^s$. (Linearform).

Es sei L eine lineare, stetige Abbildung von H^s nach $\mathbb{C}$, dann gilt es ein $u \in H^{-s}$, so dass

$$L(v) = \langle u,\, v\rangle_{H^{-s},H^s} \quad \forall v \in H^s,$$

das heisst

$$(H^s)^\star = H^{-s}.$$

Beweis des Satzes V.1.8:
Behauptung 1:

$$|\langle u,\, \varphi\rangle| \le (2\pi)^{-n}\|u\|_{H^{-s}}\|\varphi\|_{H^s} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Beweis der Behauptung 1:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\mathcal{F}\,\check{\varphi}(x) &= (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\,\check{\varphi}(x)\;dx \\ &= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\,\varphi(-x)\;dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\varphi(-x)\;dx\,d\,\zeta \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\zeta}\,\varphi(x)\;dx\,d\zeta \\ &= (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\,\varphi(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \langle u,\, \varphi\rangle &= (2\pi)^{-n}\langle u,\, \mathcal{F}\mathcal{F}\,\check{\varphi}\rangle \\ &= (2\pi)^{-n}\langle \mathcal{F}\,u,\, \mathcal{F}\,\check{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\ &= (2\pi)^{-n}\langle (1+|\zeta|^2)^{-s/2}\,\mathcal{F}(u),\, (1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}\,(\check{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2} \in O_M,\ \mathcal{F}(\check{\varphi}) \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow (1+|\zeta|^2)^{s/2}\, \mathcal{F}(\check{\varphi}) \in \mathcal{S} \subset L^2$$

$$(1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, \mathcal{F}(u) \in L^2$$

da $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ Damit lässt sich $\langle u,\, \varphi\rangle$ wie folgt umschreiben

$$\langle u,\, \varphi\rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{-s/2}\ \hat{u}(1+|\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{\check{\varphi}}$$

$$\leq (2\pi)^{-n} \|u\|_{H^{-s}} \|\check{\varphi}\|_{H^s}$$

$$= (2\pi)^{-n} \|u\|_{H^{-s}} \|\varphi\|_{H^s},$$

wobei die letzte Ungleichung wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt.

U ist also eine lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}$, einer dichten Untermenge von H^s, nach $\mathbb{C}$. Daraus folgt, dass sich U eindeutig zu einer auf ganz H^s definierten, linearen stetigen Abbildung fortsetzen lässt.

$$\langle u,\, f\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u,\, \varphi_j\rangle, \quad \text{wobei} \quad f \notin \mathcal{S},\, \varphi_j \in \mathcal{S}, \quad \varphi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f.$$

Es sei nun umgekehrt $L \in (H^s)^\star$ gegeben. Ziel ist es, ein $u \in H^s$ zu finden, so dass gilt $\langle u,\, \cdot\rangle = L(\cdot)$.

Wir betrachten die folgende Abbildung

$$M : L^2 \to \mathbb{C}$$

$$f \mapsto L\Big(\mathcal{F}^{-1}\big((1+|\zeta|^2)^{-s/2} f\big)\Big) = L(w),$$

wobei

$$w := \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, f\big).$$

Im Folgenden sei $f \in \mathcal{S}$. Da $(1+|\zeta|^2)^{s/2}\, \hat{w} = f \in L^2$, ist $w \in H^s$ und es gilt

$$\|f\|_{L^2} = \|w\|_{H^s}.$$

Da $f \in \mathcal{S}$ gilt ausserdem $w \in \mathcal{S}$. Ausserdem gilt

$$|M(f)| = |L(w)| \leq C\|w\|_{H^s} = C\|f\|_{L^2},$$

das heisst

$$M \in (L^2)^\star$$

Da $L^2 = (L^2)^\star$, gibt es $g \in L^2$, so dass

$$\begin{aligned} M(f) &= \int g \cdot f \\ &= \int (1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g (1+|\zeta|^2)^{-s/2} f \\ &= \Big\langle \mathcal{F}\big((1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g(\zeta)\big),\ \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, f(\zeta)\big) \Big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Man beachte

$$\begin{aligned} (1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, \mathcal{F}\mathcal{F}\big((1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g(\zeta)\big) &= (1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, (2\pi)^n \big((1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g(\zeta)\big)^\vee \\ &= (2\pi)^n\, \check{g}(\zeta) \in L^2 \\ &\Rightarrow \mathcal{F}\big((1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g(\zeta)\big) \in H^{-s}. \end{aligned}$$

Es folgt nun

$$L(w) = M(f) = \langle \mathcal{F}\big((1+|\zeta|^2)^{s/2} g(\zeta),\, w\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle u,\, w\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \tag{1}$$

wobei

$$u = \mathcal{F}\big((1+|\zeta|^2)^{s/2}\, g(\zeta)\big),\ u \in H^{-s}.$$

(1) gilt also für alle $w \in \mathcal{S}$, so dass es ein $f \in \mathcal{S} \subset L^2$ gibt, so dass gilt

$$(1+|\zeta|^2)^{-s/2}\, f = \mathcal{F}(w).$$

Da

$$w \mapsto f = (1+|\zeta|^2)^{s/2}\, \mathcal{F}(w)$$

eine Bijektion von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist, gilt (1) $\forall w \in \mathcal{S}$.

Es gilt also

$$L(w) = \langle u,\, w\rangle \quad \forall w \in \mathcal{S}.$$

Aus dem schon Bewiesenen, nämlich der Tatsache, dass $\langle u,\, \cdot\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ eindeutig zu einer linearen, stetigen Abbildung von H^s nach $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann, folgt, dass

$$L(\cdot) = \langle u,\, \cdot\rangle_{H^{-s},H^s}.$$

V.2 Vergleich von H^s mit anderen Räumen

Lemma V.2.1. $\forall s \geq 0 \quad \forall (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$(1 + |\zeta|^2)^s \leq 4^s \left[(1 + |\zeta - \eta|^2)^s + (1 + |\eta|^2)^s\right] \tag{1}$$

$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$(1 + |\zeta|^2)^s \leq 2^{|s|} \, (1 + |\eta|^2)^s \, (1 + |\eta - \zeta|^2)^{|s|} \tag{2}$$

Beweis von Lemma V.2.1: $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$(a + b)^s \leq 2^s (a^s + b^s) \tag{3}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}(1 + |\zeta|^2) &\leq (1 + 2|\zeta - \eta|^2 + 2|\eta|^2)\\ &\leq 2(1 + |\zeta - \eta|^2 + 1 + |\eta|^2)\end{aligned}$$

Für $a := 1 + |\zeta - \eta|^2$ und $b := 1 + |\eta|^2$ folgt mit (3) nun sofort die behauptete Ungleichung (1).

$$(2) \Leftrightarrow (1 + |\zeta|^2)^s \, (1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|} \, (1 + |\zeta - \eta|^2)^{|s|}.$$

Daraus sieht man, dass es genügt, den Fall $s \geq 0$ zu zeigen. (Man vertausche allenfalls ζ und η.) Auf Grund der Homogenität genügt es ausserdem, den Fall $s = 1$ zu beweisen. (Der Fall $s = 0$ ist trivial.)

Es sei also $s = 1$. Wie schon gesehen gilt

$$\begin{aligned}(1 + |\zeta|^2) &\leq 2 + 2|\zeta - \eta|^2 + 2|\eta|^2\\ &\leq 2 + 2|\zeta - \eta|^2 + 2|\eta|^2 + 2|\eta|^2|\zeta - \eta|^2\\ &= 2(1 + |\zeta - \eta|^2)\,(1 + |\eta|^2).\end{aligned}$$

Satz V.2.2. *Es sei* $s > \frac{n}{2} + k$, *wobei* $k \in \mathbb{N}$. *Dann kann* H^s *stetig in* C^k *eingebettet werden. Ausserdem gilt* $\forall u \in H^s : |\partial^\alpha u| \to 0$ *im Unendlichen für* $|\alpha| \leq k$.

Gilt weiter $s > \dfrac{n}{2}$, *so ist* H^s *eine Algebra.*

(Die erste Aussage besagt, dass für $u \in H^s, s > \dfrac{n}{2} + k$, *gilt* $u \in C^k$ *und* $\exists\, C$, *unabhängig von* u, *so dass* $\|u\|_{H^s} \cdot C \geq \|u\|_{C^k}$*.)*

Beweis des Satzes V.2.2: Es sei zunächst $k = 0$ und es sei $u \in H^s$.

$$\hat{u}(\zeta) = (1 + |\zeta|^2)^{s/2} \hat{u}(\zeta)\, (1 + |\zeta|^2)^{-s/2},$$

wobei

$$(1 + |\zeta|^2)^{s/2}\, \hat{u}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

da

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

und

$$(1 + |\zeta|^2)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^s} < \infty,$$

da nach Voraussetzung $2\,s > n$.

Für $1 \leq n \leq \infty$ mit $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ gilt für $f \in L^p$, $g \in L^q : f \cdot g \in L^n$. (Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung $\rightarrow$ vgl. Skript von M. Struwe "Analysis III", S. 52.) In unserem Fall folgt mit $p = 2 = q \quad \hat{u}(\zeta) \in L^1$. Aus Satz IV.2.1 folgt nun $u \in C^0$ und $u \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Es sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $s > \dfrac{n}{2} + k$. Dann gilt für $|\alpha| \leq k$ mit $s' = s - k$.

$$\zeta^\alpha\, \hat{u} = \zeta^\alpha\, (1 + |\zeta|^2)^{s'/2}\, \hat{u} (1 + |\zeta|^2)^{-s'/2},$$

wobei

$$(1 + |\zeta|^2)^{-s'/2} \in L^2,$$

da

$$(s - k) \cdot 2 > n$$

und

$$\zeta^\alpha (1 + |\zeta|^2)^{s'/2}\, \hat{u} \in L^2,$$

da

$$(1 + |\zeta|^2)^{s/2}\, \hat{u} \in L^2$$

und

$$|\alpha| \leq k.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt nun wie oben, dass $\partial^\alpha u \in C^0$ für $|\alpha| \leq k$. Sie Abbildung, welche H^s in C^k einbettet ist also die Identität, die trivialerweise stetig ist.

Nun sei $s > \dfrac{n}{2}$ und es seien $u, v \in H^s$.

Behauptung: $uv \in H^s$.

Beweis der Behauptung:

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\widehat{uv} = (1+|\zeta|^2)^{s/2}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta)\,\hat{v}(\zeta-\eta)\,d\eta,$$

denn

$$\begin{aligned}
(\hat{u}\star\hat{v})^\wedge &= \hat{\hat{u}}\cdot\hat{\hat{v}}(\rightarrow \text{ Satz IV.4.6)}\\
&= (2\pi)^n\,\check{u}(2\pi)^n\,\check{v}, \quad \text{da} \quad (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\mathcal{F}\,\varphi = \check{\varphi}\\
&= (2\pi)^{2n}\,(uv)^\vee\\
&= (2\pi)^{2n}\,(2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\mathcal{F}\,(uv)\\
&= (2\pi)^n\,\mathcal{F}\mathcal{F}\,(uv)\\
&\Rightarrow\ \mathcal{F}\,(\hat{u}\star\,\hat{v}) = (2\pi)^n\,\mathcal{F}\mathcal{F}(uv)\\
&\Rightarrow\ \mathcal{F}\,(uv) = (2\pi)^{-n}\,\hat{u}\star\hat{v}.
\end{aligned}$$

Nun kann man mit (1) aus Lemma V.2.1 wie folgt weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
|(1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\widehat{uv}(\zeta)| \le C &\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}\,(\eta)\,(1+|\eta|^2)^{s/2}\;|\,\cdot|\hat{v}\,(\zeta-\eta)|\;d\eta\\
&+ C\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}\,(\eta)|\cdot|\hat{v}\,(\zeta-\eta)\,(1+|\zeta-\eta|^2)^{s/2}\;|\;d\eta,
\end{aligned}$$

wobei $|\hat{v}(\zeta-\eta)| \in L^1$ und $|\hat{u}(\eta)| \in L^1$ ($\rightarrow$ vgl. 1. Teil des Beweises) und $|\hat{v}(\zeta-\eta)(1+|\zeta-\eta|^2)^{s/2}\;| \in L^2$ und $|\hat{u}(\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\;| \in L^2$, da $u, v \in H^s$.

Die Behauptung, dass $uv \in H^s$, folgt aus

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\widehat{uv}\,(\zeta) \in L^2.$$

Dies wiederum folgt aus folgender Tatsache:

Es sei $f \in L^p$ und es sei $g \in L^q, 1 \le p \le \infty$. Dann ist für

$$1 \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} =: 1 + \frac{1}{r}$$

$$f \star g \in L^r.$$

($\rightarrow$ vgl. Skript von M. Struwe "Analysis III", S. 64). In unserem Fall ist $p = 2$ und $q = 1 \Rightarrow r = 2$.

Bemerkung V.2.3. An dieser Stelle sei der Vollständigkeit halber das folgende Resultat erwähnt:

Satz V.2.4. *Es sei $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ und es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

a) $u \star \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\partial^\alpha(u \star \varphi) = (\partial^\alpha u) \star \varphi = u \star (\partial^\alpha \varphi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

($u \star \varphi$ ist analog zum Abschnitt III.3 definiert).

b) $u \star \varphi$ *ist eine temperierte Distribution*

c) $\mathcal{F}(u \star \varphi) = \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(\varphi)$.

Beweis $\rightarrow$ vgl. Rudin, "Functional Analysis", S. 195

Satz V.2.5. *Es sei $s = \frac{n}{2} + k + \alpha$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt $H^s \subset C^{k,\alpha}$.*

Definition V.2.6. *Hölderraum $C^{k,\alpha}$.*

$$u \in C^{k,\alpha} \Leftrightarrow u \in C^k$$

und

$$\forall |\beta| \leq k$$

gilt

$$\sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} := \sup_{|\beta| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Bemerkung V.2.7. $\Delta u \in C^0 \not\Rightarrow \nabla^2 u \in C^0$, das heisst alle zweiten Ableitungen sind stetig, aber

$$\Delta u \in C^{0,\alpha} \Rightarrow \nabla^2 u \in C^{0,\alpha}.$$

Beweis des Satzes V.2.5: Es sei zunächst $k = 0 : s = \frac{n}{2} + \alpha, \alpha \in (0,1)$ und es sei $u \in H^s$. Dann gilt

$$u(x+h) - u(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \zeta}\, \hat{u}(\zeta) \cdot (e^{i\zeta \cdot h} - 1) \right) (2\pi)^{-n}$$

$$\Rightarrow$$

$$|u(x+h) - u(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |\zeta|^2)^{s/2}\, \hat{u}(\zeta)| (1 + |\zeta|^2)^{-s/2} |e^{i\zeta \cdot h} - 1|,$$

wobei

$$|(1 + |\zeta|^2)^{s/2}\, \hat{u}(\zeta)| \in L^2, \quad \text{da} \quad u \in H^s$$

und

$$(1 + |\zeta|^2)^{-s/2} |e^{i\zeta \cdot h} - 1| \in L^2$$

da

$$(1+|\zeta|^2)^{-s/2}|e^{i\zeta\cdot h}-1| \leq \; 2(1+|\zeta|^2)^{-s/2} \in L^2,$$

da

$$2\cdot s = n+\alpha > n.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt nun für den Fall $|h|<1$

$$|u(x-h)-u(x)| \leq C\|u\|_{H^s}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\zeta|^2)^{-s}|e^{i\zeta\cdot h}-1|^2\right]^{1/2}$$

$$\leq C\|u\|_H \left(\left[\int_{|\zeta|\leq\frac{1}{|h|}}(1+|\zeta|^2)^{-s}|e^{i\zeta\cdot h}-1|^2\right]^{1/2}\right.$$

$$\left.+\left[\int_{|\zeta|\geq\frac{1}{|h|}}(1+|\zeta|^2)^{-s}|e^{i\zeta\cdot h}-1|^2\right]^{1/2}\right).$$

Und es gilt

$$\int_{|\zeta|\leq\frac{1}{|h|}}(1+|\zeta|^2)^{-s}|e^{i\zeta\cdot h}-1|^2$$

$$\leq C'\int_{|\zeta|\leq\frac{1}{|h|}}(1+|\zeta|^2)^{-n/2-\alpha}|\zeta|^2|h|^2|\zeta|^{n-1}\,d|\zeta|$$

(Polarkoordinaten und Abschätzung von $|e^{i\zeta\cdot h}-1|$)

$$\leq C''|h|^\alpha.$$

Analog findet man

$$\int_{|\zeta|\geq\frac{1}{|h|}}(1+|\zeta|^2)^{-s}|\zeta|^{n-1}d|\zeta| \leq C|h|^\alpha.$$

Insgesamt hat man also

$$|u(x+h)-u(x)| \leq C\cdot|h|^\alpha.$$

Den Fall $|h|\geq 1$ behandelt man analog. Daraus folgt die Behauptung für $k=0$. Für $k\neq 0$ gilt

$$s=\frac{n}{2}+k+\alpha>\frac{n}{2}+k.$$

Sei $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann folgt aus Satz V.2.2 $u\in C^k$.

Um die Behauptung $u\in C^{k,\alpha}$ zu zeigen, führt man obige Rechnungen für die Ableitungen mit $|\alpha|\leq k$ durch.

Bemerkung V.2.8. Warum schliesst man $\alpha=0$ und $\alpha=1$ aus? Führt man obige Berechnung zum Beispiel für $\alpha=1$ durch, so erhält man

$$|u(x+h)-u(x)| \leq C|h|(\log\frac{1}{n})^{1/2} \not\Rightarrow u\in C^{0,1}$$

Satz V.2.9. *$\exists\, u \in H^{n/2}$, so dass $u \notin L^\infty$.*

Beweis des Satzes V.2.9: Betrachte

$$\hat{u}(\zeta) = \frac{(1+|\zeta|^2)^{-n}}{1+\log(1+|\zeta|^2)} \in L^2.$$

Es gilt

$$\|u\|^2_{H^{n/2}} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2(\zeta)(1+|\zeta|^2)^n$$

$$= C \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|\zeta|^2)^{-n}}{(1+\log(1+|\zeta|^2)^2} |\zeta|^{n-1}\, d|\zeta| < \infty.$$

(Man beachte: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t\cdot\log^2 t} < \infty$.)
Daraus folgt $u \in H^{n/2}$.
Andererseits gilt aber $\hat{u} \notin L^1$. (Man beachte $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t\cdot\log t} = \infty$.)
Damit erhält man $\displaystyle\int e^{-\varepsilon|\zeta|}\ \hat{u} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty$, da $e^{-\varepsilon|\zeta|}\ u \to \hat{u}$ punktweise und

$$\int e^{-\varepsilon|\zeta|^2}\hat{u} = \int \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\zeta|^2})\, u,$$

wobei

$$\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|\zeta|^2}\right) \in L^1$$

unabhängig von ε.
Angenommen, $u \in L^\infty$, dann wäre $\|u\|_\infty < \infty$ und es würde gelten

$$\int \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\zeta|^2})\, u \le \|u\|_\infty \cdot \int \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\zeta|^2}) \le \|u\|_\infty \|\, \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\zeta|^2})\|_{L^1} < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn

$$\int \mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|\zeta|^2}\right) u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Somit gilt $u \notin L^\infty$.

Proposition V.2.10. *Es sei $s > \sigma$. Dann gilt $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis der Proposition V.2.10:

$$\|u\|^2_{H^\sigma} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^\sigma\, |\hat{u}(\zeta)|^2$$

$$\le \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{\sigma-s} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s |\ \hat{u}(\zeta)|^2$$

$$\le \|u\|^2_{H^s}.$$

Proposition V.2.11. *$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $\varphi\, u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis der Proposition V.2.11:

$$(1+|\zeta|^2)^s\, |\widehat{\varphi u}\,(\zeta)|^2 = (1+|\zeta|^2)^s | \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\zeta - z)\hat{u}(z)\ dz\ |^2\ (2\pi)^{-2n}.$$

Mit (2) aus Lemma V.2.1 folgt

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2}\ |\widehat{\varphi u}\,(\zeta)| \leq C_s \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\zeta - z)|(1+|\zeta - z|^2)^{|s|/2}\ |\hat{u}(z)|\ (1+|z|^2)^{s/2},$$

wobei

$$|\hat{u}(z)|\ (1+|z|^2)^{s/2} \in L^2, \quad \text{da} \quad u \in H^s$$

und

$$|\hat{\varphi}(\zeta - z)|(1+|\zeta - z|^2)^{|s|/2} \in L^1, \quad \text{da} \quad \hat{\varphi}(1+|\zeta - z|^2)^{|s|/2} \in \mathcal{S} \subset L^1.$$

Aus der Tatsache, dass $f \star g \in L^r$ für $f \in L^p, g \in L^q$ mit $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ folgt nun

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2}|\widehat{\varphi u}(\zeta)| \in L^2,$$

woraus die Behauptung $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Definition V.2.12. *$H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne den Raum aller temperierter Distributionen, deren Produkt mit einem beliebigen Element aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ liegt.*

Bemerkung V.2.13. *$H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Es sei $\varphi \in C_0^\infty(B_2)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf B_1, dann bezeichne für

$$N \in \mathbb{N} : \varphi_N(x) = \varphi\left(\frac{x}{N}\right)$$

und

$$\mathcal{N}_N(u) = \|\varphi_N u\|_{H^s}.$$

Satz V.2.14. *Die Einbettung $H^s(\mathbb{R}^n) \overset{i}{\hookrightarrow} H^\sigma_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ist für $\sigma < s$ ist kompakt, das heisst das Bild einer kompakten Menge von $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist eine kompakte Menge in $H^\sigma_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis des Satzes V.2.14: Es sei $u_n \in H^s(\mathbb{R}^n)$ eine Folge, für welche gilt $\|u_n\|_{H^s} \leq C$ unabhängig von n.

Behauptung 1: Unter den obigen Voraussetzungen gibt es $u_n' \in H^s$ und $u_\infty \in H^s$, so dass $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\varphi(u_n' - u_\infty)\|_{H^\sigma} \to 0.$$

Beweis von Behauptung 1: Gemäss Voraussetzung gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s |\hat{u}_n|^2 \le C < \infty \quad \forall n.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $u_{n'}$ mit

$$(1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\hat{u}_{n'} \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^n)]{w} (1+|\zeta|^2)^{s/2}\,\hat{u}_\infty =: f, \quad f \in L^2$$

($\rightarrow$ vgl. Funktionalanalysis I und beachte Reflexivität und den Satz von Eberlein-Šmulyan).

Daraus folgt, dass $u_\infty = \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\zeta|^2)^{-s/2} f\right) \in H^s$.

Behauptung 2: $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\varphi(u_{n'} - u_\infty)\|_{H^\sigma} \to 0$, das heisst

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^\sigma |\hat{\varphi} \star (\hat{u}_n - \hat{u}_\infty)|^2 \to 0.$$

Beweis von Behauptung 2: Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $R > 0$, so dass gilt $(1+R^2)^{\sigma-s} = \varepsilon$. Es sei weiter $\psi_R \in C_0^\infty(B_{2R})$ mit $\psi_R \equiv 1$ auf B_R und $0 \le \psi_R \le 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^\sigma\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_R^2 (1+|\zeta|^2)^\sigma\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (1-\psi_R^2)(1+|\zeta|^2)^\sigma\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|^2.\end{aligned}$$

Dabei gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} (1-\psi_R^2)(1+|\zeta|^2)^\sigma\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)| \\ &\qquad \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} (1+|\zeta|^2)^\sigma |\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|^2 \\ &\qquad \le (1+R^2)^{\sigma-s} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} (1+|\zeta|^2)^s\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|^2 \\ &\qquad \le \varepsilon \|\varphi(u_{n'} - u_\infty)\|_{H^s} \\ &\qquad \le \varepsilon C_\varphi \left[\|u_{n'}\|_{H^s} + \|u_\infty\|_{H^s}\right] \\ &\qquad \le 2C \cdot \varepsilon C_\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\zeta - z)(\hat{u}_{n'}(z) - \hat{u}_\infty(z))\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\zeta - z)(1+|z|^2)^{-s/2}\,(1+|z|^2)^{s/2}\,(\hat{u}_{n'}(z) - \hat{u}_\infty(z)).\end{aligned}$$

Da $(\hat{u}_{n'}(z) - \hat{u}_\infty(z))\,(1+|z|^2)^{s/2} \underset{L^2}{\overset{w}{\rightharpoonup}} 0$ und $\hat{\varphi} \in \mathcal{S} \subset L^2$, also $\hat{\varphi}(1+|z|^2)^{-s/2} \in \mathcal{S}$ folgt nun

$$\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)(\zeta) \to 0 \quad \forall \zeta$$

aus

$$\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\zeta - z)\ (\hat{u}_{n'}(\zeta) - \hat{u}_\infty(z))\,dz.$$

Behauptung 3: $\|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)\|_{L^\infty(B_{2R})} \leq C_{R,\varphi}$, unabhängig von n.

Beweis von Behauptung 3: Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)(\zeta)| \leq \|\hat{\varphi}(\zeta - z)(1+|z|^2)^{-s/2}\,\|_{L^2}\,(\|u_{n'}\|_{H^s} + \|u_\infty\|_{H^s}).$$

Dabei gilt

$$\|\hat{\varphi}(\zeta - z)(1+|z|^2)^{-s/2}\,\|_{L^2} \leq C \int |\hat{\varphi}(\zeta - z)|^2\,(1+|\zeta - z|^2)^{|s|}\,(1+|\zeta|^2)^s$$

wegen (2) aus Lemma V.2.1

$$\leq C_{\zeta,\varphi}.$$

■

Es gilt nun also

$$\psi_R^2\,|\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|\,(1+|\zeta|^2)^\sigma \leq C_R\ \psi_R^2 \in L^1$$

und

$$\psi_R^2\ |\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|\,(1+|\zeta|^2)^\sigma \to 0 \quad \forall \zeta.$$

Aus der dominierten Konvergenz folgt nun

$$\int_{\mathbb{R}^n}\ \psi_R^2|\hat{\varphi} \star |\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|(1+|\zeta|^2)^\sigma \underset{n'\to\infty}{\longrightarrow}\ 0,$$

das heisst $\exists\ N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n' \geq N$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}\ \psi_R^2\ |\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|\ (1+|\zeta|^2)^\sigma \leq \varepsilon/2.$$

Insgesamt gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi} \star (\hat{u}_{n'} - \hat{u}_\infty)|\ (1+|\zeta|^2)^\sigma \leq \varepsilon\ C_\varphi + \varepsilon/2 = \varepsilon\ \left(C_\varphi + \frac{1}{2}\right).$$

Da ε beliebig war, folgt nun Behauptung 2.

Damit ist nun auch Satz V.2.12. gezeigt.

V.3 Das Lösen von Cauchy-Problemen für elliptische partielle Differentialgleichungen in Hilbert-Sobolev-Räumen

Im Folgenden sei

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{oder} \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{C}),$$

$$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{oder} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{C}),$$

$$Lu := \sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha \, \partial^\alpha \, u = f,$$

wobei

$$\exists \; \alpha_0, |\alpha_0| = m, \; C_\alpha \neq 0.$$

Definition V.3.1. *L heisst elliptisch, falls gilt*

$$\sum_{|\alpha|=m} C_\alpha \, \zeta^\alpha = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0.$$

Beispiel: $L = \Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$, das heisst $c_i = 1, \; 1 \leq i \leq n$. Dann ist sofort klar, dass gilt

$$\sum C_i \, \zeta_i^2 = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0,$$

also ist $L = \Delta$ elliptisch.

Analog sieht man auch, dass $L = \partial_t^2 - \Delta$ nicht elliptisch ist auf dem Lichtkegel ($\rightarrow$ Minkowski-Metrik).

V.4 Cauchy-Probleme in $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten

$$(-\Delta + 1) = f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\; \Leftrightarrow \;\; (|\zeta|^2 + 1) \; \hat{u} = \hat{f}.$$

Satz V.4.1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} H^{s+2} &\rightarrow H^s \\ u &\mapsto -\Delta u + u \end{aligned}$$

ist ein stetiger Isomorphismus und es gilt

$$\|u\|_{H^{s+2}} = \| - \Delta u + u\|_{H^s}.$$

Beweis des Satzes V.4.1: Es sei $u \in H^{s+2}$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^{s+2} \, |\hat{u}|^2 < \infty.$$

Ausserdem haben wir

$$(-\Delta u + u)^\wedge = (|\zeta|^2 + 1) \, \hat{u}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |(-\Delta u + u)^\wedge|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^{s+2} \, |\hat{u}|^2 < \infty.$$

Daraus folgt

$$\|u\|_{H^{s+2}} = \| - \Delta u + u\|_{H^s}.$$

Es sei nun umgekehrt $f \in H^s$. Dann gilt für $\hat{u} := (1 + |\zeta|^2)^{-1} \hat{f}$, dass u die Gleichung $-\Delta u + u = f$ löst. Daraus folgt die Surjektivität der obigen Abbildung. Da sie offensichtlich auch injektiv und stetig ist, ist damit die Behauptung gezeigt.

Dieser Satz liefert also die eindeutige Existenz einer Lösung $u \in H^{s+2}$ des Problems $-\Delta u + u = f$, $f \in H^s$.

V.5 Cauchy-Probleme in $\mathbb{R}^n_+$ (Halbraum)

$$\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \; x_n > 0\}$$

$$x \; = (x_1, \ldots, x_n) = (x', \, x_n),$$

wobei

$$x' \; = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Dann definieren wir

$$H^s(\mathbb{R}^n_+) := H^s \, (\mathbb{R}^n)/_\sim,$$

wobei

$$u \sim v \Leftrightarrow \mathit{supp}\,(u - v) \subset \mathbb{R}^n_-$$

und

$$\|u\|_{H^s\,(\mathbb{R}^n_+)} := \inf_{v \sim u} \; \|v\|_{H^s\,(\mathbb{R}^n)}$$

Probleme, welche auftreten können:

i) Wir betrachten folgendes Problem $-\Delta u + u = f$, wobei $u \in H^{s+2}\,(\mathbb{R}^N_+)$ und $f \in H^s\,(\mathbb{R}^n_+)$. Nehmen wir an, $\tilde{f} \sim f$, so gibt es $\tilde{u} \in H^{s+2}\,(\mathbb{R}^n_+)$ mit $-\Delta\,\tilde{u} + \tilde{u} = \tilde{f}$. "Wir haben also zu viele Lösungen".

ii) Betrachte $s = 0$.

$$u(x',\, x_n) := \frac{1}{\log|x_n|\;\sqrt{|x_n|}}\; \mathbf{1}_{\{x_n\in[-1,1]\}}\; \varphi\,(x'),$$

wobei $\varphi \in C_0^\infty(B_2^{n-1})$ und $\varphi \equiv 1$ auf B_1^{n-1}. Dann gilt $u \in L^2$ und $u(x',0) = \infty$ auf B_1^{n-1}, das heisst $u\,|_{\{(x',0)\}} \notin \mathcal{D}'$.

Ziel ist es, eine Spur von $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{H} = \{(x',0)\}$ zu definieren.

Satz V.5.1. *Es sei $s > \frac{1}{2}$. Dann lässt sich die lineare Abbildung*

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \textit{(Spur)}$$

$$\varphi(x', x_n) \mapsto \varphi(x', 0)$$

zu einer surjektiven, linearen, stetigen Abbildung $T : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ fortsetzen, das heisst $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\|T\,\varphi\,\|_{H^{s-1/2}\,(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,\|\varphi\|_{H^s\,(\mathbb{R}^n)}.$$

Bemerkung V.5.2. Offensichtlich haben wir durch die Spurbildung Regularität verloren. Man beachte dazu das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccl} H^s(\mathbb{R}^n) & = & H^{n/2+\alpha}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad \alpha \in (0,1) \\ & & \downarrow T & & \downarrow T \\ & & H^{n/2-1/2+\alpha}\;(\mathbb{R}^{n-1}) & \hookrightarrow & C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}). \end{array}$$

Beweis des Satzes V.5.1:

Behauptung 1: $\exists\, C > 0$, so dass $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|T\varphi\|_{H^{s-1/2}}\,(\mathbb{R}^{n-1}) \leq C\;\|\varphi\|_{H^s\,(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis von Behauptung 1: Es sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x',0) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix'\cdot\zeta'}\; \hat{\varphi}(\zeta',\zeta_n)\; d\zeta'\, d\zeta_n \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\zeta'} \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\zeta',\zeta_n)\; d\zeta_n\right]\; d\zeta' \\ &= (2\pi)^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\zeta'} \tilde{\varphi}(\zeta',0)\; d\zeta', \end{aligned}$$

wobei $(\star\star)$

$$\tilde{\varphi}(\zeta', 0) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\zeta', \zeta_n)\ d\zeta_n$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\zeta|^2)^{s/2}\ \hat{\varphi}(\zeta', \zeta_n)(1 + |\zeta|^2)^{-s/2}$$

Damit erhalten wir unter Berücksichtigung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}(1+|\zeta'|^2)^{s-1/2}|\tilde{\varphi}(\zeta')| \ &\leq (1+|\zeta'|^2)^{s-1/2} \int_{\mathbb{R}} (1+|\zeta|^2)^s\, |\hat{\varphi}\,(\zeta', \zeta_n)\ |^2\ d\zeta_n \\ &\times \int_{\mathbb{R}} (1+|\zeta|^2)^{-s}\ d\zeta_n.\end{aligned} \qquad (\star)$$

wobei gilt

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\zeta|^2)^{-s}\, d\ \zeta_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\zeta'|^2 + |\ \zeta_n|^2)^s}\ d\zeta_n \qquad (< \infty,\ \text{da } s > 1/2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{1+|\zeta'|^2}}{(1+|\zeta'|^2)^s\,(1+\lambda^2)^s}\ d\,\lambda$$

$$= C_1(1+|\zeta'|^2)^{-s+1/2} \qquad \text{mit} \quad C_1 = \int_{\mathbb{R}} (1+\lambda^2)^{-s}\ d\lambda,$$

wobei im zweitletzten Schritt die folgende Variablentransformation gebraucht wurde

$$\zeta_n = (1+|\zeta'|)^{1/2}\,\lambda$$

$$d\,\zeta_n = (1+|\zeta'|^2)^{1/2}\ d\lambda.$$

Integration von $(\star)$ bezüglich ζ' liefert schliesslich

$$\|(1+|\zeta'|^2)^{s-1/2}\,|\tilde{\varphi}(\zeta', 0)|^2\ \|_{L^1} \leq \|\varphi\|^2_{H^s\,(\mathbb{R}^n)}. \qquad (\star\star\star)$$

Aus $(\star\star)$ ist weiter ersichtlich, dass $\widehat{T\varphi} = \tilde{\varphi}$. Damit ist klar, dass $(\star\star\star)$ die Behauptung zeigt. ■

Da $\mathcal{S}$ dicht liegt in H^s folgt nun die Aussage des Satzes bis auf die Aussage der Surjektivität. Dies wollen wir nun untersuchen.

Es sei nun

$$g \in H^{s-\frac{1}{2}}\,(\mathbb{R}^{n-1}) \cap \mathcal{S}\,(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Wir suchen $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, so dass $T\varphi = g$ gilt und

$$C\|\varphi\|_{H^s\,(\mathbb{R}^n)} \geq \|g\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

wobei C unabhängig sein soll von g.

Behauptung 2: $\exists \quad C > 0$, so dass $\forall g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ gilt

$$\exists \quad \varphi \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \geq \|g\|_{H^{s-1/2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Beweis von Behauptung 2: Aus dem Beweis von Behauptung 1 wissen wir, dass die Fouriertransformation bezüglich der ersten $n-1$ Variablen von φ gerade $\tilde{\varphi}$ ist. Wir suchen also $\varphi \in H^s\,(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\tilde{g}(\zeta') = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}\,(\zeta', \zeta_n)\; d\,\zeta_n.$$

Wir definieren nun

$$\hat{\varphi}(\zeta) := C_1\; \frac{(1+|\zeta'|^2)^N}{(1+|\zeta'|^2)^{N+1/2}}\;\tilde{g}\,(\zeta'), \quad N > 0.$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}\,(\zeta) = C_1(1+|\zeta'|^2)^N\,\tilde{g}(\zeta') \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\zeta'|^2+|\zeta_n|^2)^{N+1/2}}\; d\zeta_n$$

$$= C_1(1+|\zeta'|^2)^N \tilde{g}(\zeta')\; C_N\,(1+|\zeta|^2)^{-N}.$$

Wähle nun C_1 so, dass $C_1 \cdot C_N = (2\pi)^{-1}$. Es ist nun klar, dass gilt

$$T\,\varphi = g.$$

Die Aussage

$$\|T\,\varphi\|_{H^{s-1/2}\;(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

verläuft analog zum Beweis von Behauptung 1. $\square$

Proposition V.5.3. *Es sei $s > \frac{1}{2}$ und es sei $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ so, dass supp $\varphi \subset \mathbb{R}^n_-$, dann gilt*

$$T\,\varphi \equiv 0.$$

Korollar V.5.4. $u \underset{\tilde{H}^s}{} v \quad \Rightarrow \quad Tu = Tv$, *das heisst, die Spur ist wohldefiniert auf*

$$H^s\,(\mathbb{R}^n_+),\;\; s > \frac{1}{2}.$$

Beweis der Proposition V.5.3: Es sei $h > 0$, dann ist $\tau_{-h}\,\varphi(x) = \varphi(x', x_n + h)$. Es sei weiter $\psi \in C_0^\infty$ mit *supp* $\psi \subset B_1(0)$ und $\int \psi = 1$. Wie üblich ist

$$\psi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_n}\;\Psi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

weiter gilt

$$\psi_\varepsilon \star \tau_{-h}\,\varphi \xrightarrow{H^s} \tau_{-h}\,\varphi.$$

Es sei nun $0 < h < \varepsilon$. Dann gilt

$$\psi_\varepsilon \star \tau_{-h}\,\varphi = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \text{ da } supp\,\varphi \subset \mathbb{R}^n_-.$$

Nun sei ausserdem $\chi \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\chi \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und es bezeichne $\chi_\varepsilon = \chi(\varepsilon\cdot)$. Dann gilt

$$\chi_\varepsilon(\psi_\varepsilon \star \tau_{-h}\,\varphi) \xrightarrow{H^{S^\cdot}} \tau_{-h}\,\varphi$$

und

$$T(\chi_{\varepsilon^\cdot}(\psi_\varepsilon \star \tau_{-h}\,\varphi)) = 0.$$

Daraus folgt

$$T(\tau_{-h}\,\varphi) = 0. \tag{1}$$

□

Behauptung: $\tau_{-h}\,\varphi \to \varphi$ in H^s.

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$\|\tau_{-h}\,\varphi - \varphi\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^s \left|\hat{\varphi}(\zeta)\left(e^{i\zeta_n \cdot h} - 1\right)\right|^2,$$

wobei

$$(1+|\zeta|^2)^s \left|\hat{\varphi}(\zeta)\left(e^{i\zeta_n \cdot h} - 1\right)\right|^2 \to 0 \quad \text{überall}$$

und

$$(1+|\zeta|^2)^s \left|\hat{\varphi}(\zeta)\left(e^{i\zeta_n \cdot h} - 1\right)\right|^2 \leq (1+|\zeta|^2)^s \cdot 4 \cdot |\hat{\varphi}(\zeta)|^2 \in L^1,$$

da

$$\varphi \in H^s.$$

Mit Hilfe der dominierten Konvergenz folgt die Behauptung. Daraus folgt aber unmittelbar die Aussage der Proposition. □

Satz V.5.5. *Es sei $s + 2 > \frac{1}{2}$. Die Abbildung*

$$L : H^{s+2}(\mathbb{R}^n_+) \to H^{s+3/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^s(\mathbb{R}^n_+)$$

$$u \mapsto (Tu, -\Delta u + u)$$

ist ein stetiger Isomorphismus, das heisst $\exists \quad C > 0$ so, dass

$$\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left[\|\,T\,u\,\|_{H^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|-\Delta u + u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}\right].$$

Bemerkung V.5.6. Dieses Theorem besagt, dass das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta\,u + u = f \in H^s(\mathbb{R}^n_+) \\ Tu = g \in H^{s+3/2}(\mathbb{R}^{n-1}). \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ hat.

Beweis des Satzes V.5.5: Wir betrachten zunächst folgendes Problem

$$\left.\begin{aligned} -\Delta + \lambda w &= 0 \\ Tw &= g \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Im Folgenden bezeichne $\sim$ die Fouriertransformation bezüglich der ersten $n-1$ Variablen. Wir nehmen ausserdem an $\tilde{g} \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

Ist $w \in \mathcal{S}$ eine Lösung des Problems (a), so ist $\tilde{w}(\zeta', 0)$ eine Lösung des Problems (b)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,\tilde{w} + \left(|\zeta'|^2 + \lambda\right)\,\tilde{w} &= 0 \\ \tilde{w}\,(\zeta', 0) = \tilde{g}\,(\zeta') & \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Explizit findet man

$$\tilde{w}\,(\zeta', x_n) = e^{-\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}\cdot x_n}\;\tilde{g}\,(\zeta').$$

Nun stellt sich die Frage, ob $w \in H^{s+2}$. Dazu sei $\psi(t) := e^{-t}$, $t > 0$. Dann ist $\psi \in \mathcal{S}\,(\mathbb{R})$ und $\tilde{w}\,(\zeta',\, x_n)$ lässt sich schreiben als

$$\tilde{w}\,(\zeta', x_n) = \psi\,\left(\sqrt{|\zeta'|^2 + \lambda}\;x_n\right)\cdot\tilde{g}\,(\zeta').$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta_n\cdot x_n}\;\tilde{w}(\zeta', x_n)\,dx_n &= \tilde{g}(\zeta')\int_{\mathbb{R}}\psi\left(\sqrt{|\zeta'| + \lambda}\;x_n\right)\,e^{-i\zeta_n\cdot x_n}\;dx_n \\ &= \tilde{g}(\zeta')\int_{\mathbb{R}}\psi(z_n)\;e^{-i\zeta_n\cdot\frac{z_n}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}}\;\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}\;dz_n \\ &= \tilde{g}(\zeta')\,\hat{\psi}\,\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}\right)\,\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}} \\ &= \hat{w}(\zeta',\,\zeta_n) \end{aligned}$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta|^2)^{s+2}\,|\hat{w}|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\zeta'|^2+|\zeta_n|^2)^{s+2}\,(|\zeta'|^2+\lambda)^{-1}\,|\tilde{g}(\zeta')|^2\,\left|\hat{\psi}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}\right)\right|^2$$

$$\le \|\hat{\psi}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\zeta'|^2)^{s+2}}{|\zeta'|^2+\lambda}\,|\tilde{g}(\zeta')|^2$$

$$+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta_n|^{2\cdot(s+2)}}{|\zeta'|^2+\lambda}\,\left|\hat{\psi}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}\right)\right|^2\,|\tilde{g}(\zeta')|^2\,d\zeta_n\,d\zeta'$$

$$\le \|\hat{\psi}\|_\infty\,\|g\|_{H^{s+3/2}}$$

$$+\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\zeta' \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{(s+2)\cdot 2}\,(\lambda+|\zeta'|^2)^{s+2}\,|\hat{\psi}(\eta)|^2\,\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}}\,d\eta\,|\hat{g}(\zeta')|^2,$$

$$= (\star)$$

da $\tilde{g}=\hat{g}$ und man beachte die Variablentransformation

$$\eta = \zeta_n/\sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}\,,\ d\,\zeta_n = \sqrt{|\zeta'|^2+\lambda}\cdot d\,\eta$$

Also

$$(\star)\ = \|\hat{\psi}\|_\infty\,\|g\|_{H^{s+3/2}}$$

$$+\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{g}(\zeta')|^2\,(\lambda+|\zeta'|^2)^{s+3/2}\,d\zeta' \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2\cdot(s+2)}\,|\hat{\psi}\,(\eta)|^2\,d\eta$$

$$\le \|g\,\|_{H^{s+3/2}}\,(\|\hat{\psi}\,\|_\infty + C') = \|g\|_{H^{s+3/2}}\,C.$$

Diese Überlegungen gelten für $\tilde{g}\in\mathcal{S}$, also $g\in\mathcal{S}$. Da aber $\mathcal{S}$ in H^r dicht liegt, folgt die Aussage des Satzes nun unmittelbar, denn im Satz V.4.1. haben wir schon gezeigt, dass wir $\|u\|_{H^{s+2}}$ durch $\|-\Delta\,u+u\,\|_{H^{s+2}}$ abschätzen können. Wegen besagtem Satz ist auch die Einschränkung auf $-\Delta\,u+u=0$ kein Fehler, da der Fall $-\Delta u+u=f$ dann mit Satz V.4.1 sofort behandelt werden kann.

VI Dirichlet-Probleme

VI.1 Einleitung

Ziel dieses Abschnitts ist das Lösen von **Dirichlet-Problemen**, d.h. von Problemen der Form:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ auf } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn nicht anders spezifiziert, ein offenes, **glatt berandetes** und **beschränktes** Gebiet.

Definition VI.1.1. *Es sei Ω offen. In Analogie zu Definition V.1.1. ist $\mathbf{H^1(\Omega)}$ definiert als der Raum der $u \in L^2(\Omega)$, für welche die Ableitungen $\partial_i u$ im Sinne der Distributionen ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegen.*

Aus Proposition V.1.4 wissen wir, dass $H^1(\Omega)$ ein Hilbertraum ist.

Satz VI.1.2. *Die Abbildung γ: $C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega)$, wobei $\gamma f = f|_{\partial\Omega}$ ist, lässt sich eindeutig zu einer stetigen, linearen, surjektiven Abbildung*
$\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ fortsetzen.

Beweis Der Beweis lässt sich unter Beachtung, dass Ω glatt berandet ist, auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ zurückführen. (vgl. Bony, "Cours d'analyse", Seite 205).

Satz VI.1.3. *Es sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

a) $\gamma u = 0$

b) $Zu \in H^1(\mathbb{R}^n)$, *wobei*

$$Zu = \begin{cases} u & \textit{auf } \Omega \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

c) $\exists$ *Folge* $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, *so dass* $||u - \varphi_j|| \to 0$.

Definition VI.1.4. $\mathbf{H_0^1(\Omega)}$ *bezeichne den Raum der Distribtionen aus $H^1(\Omega)$, welche eine der Eigenschaften und damit alle Eigenschaften des vorangehenden Theorems haben.*

$H_0^1(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ und somit auch ein Hilbertraum.

Satz VI.1.5 (Ungleichung von Poincaré)**.** *Es gibt eine Konstante*
$C \in \mathbb{R}$, so dass $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$||u||_{L^2} \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

Beweis

i) Es sei zun"achst $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es sei weiter $R > 0$, so dass $\Omega \subset \{x| - R \leq x_n \leq R\}$. Es gilt dann:

$$\varphi(x^{'}, x_n) = \int_{-R}^{x_n} \partial_n \varphi(x^{'}, t) dt.$$

Betrachte nun φ als Funktion nur von x_n, d.h. $\varphi(x^{'}, x_n) = \varphi(x_n)$. Ausserdem sei x_n zunächst fest. Da $C_0^\infty([-R, x_n])$ dicht liegt in $L^2([-R, x_n])$ und da $L^2([-R, x_n])$ ein Hilbertraum ist, gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung :

$$|(f, g)| \leq ||f|| \cdot ||g||$$

wobei

$$(f, g) = \int_{-R}^{R} f \cdot g \; dt \text{ und } ||f|| = (f, f)^{1/2}$$

In unserem Fall gilt also:

$$\begin{aligned}
|(\partial_n \varphi, 1)|^2 &= \Big| \int_{-R}^{x_n} \partial_n \varphi(x^{'}, t) dt \Big|^2 \\
&= |\varphi(x^{'}, x_n)|^2 \\
&\leq \Big(\int_{-R}^{x_n} 1 dt \Big) \Big(\int_{-R}^{x_n} |\partial_n \varphi(x^{'}, t)|^2 dt \Big) \\
&\leq \Big(\int_{-R}^{R} 1 dt \Big) \Big(\int_{-R}^{R} |\partial_n \varphi(x^{'}, t)|^2 dt \Big)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega |\varphi(x^{'}, x_n)|^2 dx^{'} dx_n &\leq \iiint_{|x_n| \leq R; |t| \leq R} 2R |\partial_n \varphi(x^{'}, t)|^2 dt dx^{'} dx_n \\
&\leq 4R^2 \iint_\Omega |\partial_n \varphi(x^{'}, t)|^2 dt dx^{'}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung f"ur $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $C = 2R$ gezeigt.

ii) Sei nun $u \in H_0^1(\Omega)$. Wegen Theorem 3 gibt es eine Folge φ_j von Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$, so dass $||u - \varphi_j||_{H^1} \to 0$. Da die behauptete Ungleichung für alle φ_j gilt, folgt nun sofort die Behauptung auch im Fall $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definition VI.1.6. *Es seien u, v in $H^1(\Omega)$. Dann definieren wir:*

$$\mathbf{B(u, v)} := \sum_i \int_\Omega \partial_i u \overline{\partial_i v} dx$$

*Weiter definieren wir die **Energie** von u:*

$$\mathbf{E(u)} := B(u, u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

Da für konstante u gilt: $E(u) = 0$, ist $E(u)^{1/2}$ keine Norm auf $H^1(\Omega)$. Es gilt aber:

Korollar VI.1.7. *Auf $H_0^1(\Omega)$ definiert $B(u,v)$ ein Skalarprodukt und die Norm $E(u)^{1/2}$ ist äquivalent zu $||u||_{H^1}$. Ausserdem ist $(H_0^1(\Omega), B(.,.))$ ein Hilbert-raum.*

Bemerkung: Die konstanten u liegen nicht in $H_0^1(\Omega)$, denn es gilt $\gamma u \neq 0$. Nach Theorem 3 und Definition 4 liegen sie folglich nicht in $H_0^1(\Omega)$.

Auf Grund der Definition von $||u||_{H^1}$ und der Definition von $E(u)$ ist sofort klar, dass gilt: $||u||_{H^1}^2 = E(u) + ||u||_{L^2}$.
Ist nun $u \in H_0^1(\Omega)$, so liefert die Ungleichung von Poincaré:
$E(u) \leq ||u||_{H^1}^2 \leq (1 + C^2)E(u)$

Bemerkung: Man beachte die Analogie zur Energie einer Kurve, die wir aus der Differentialgeometrie kennen.

VI.2 Homogenes Dirichlet-Problem

Im Folgenden betrachten wir nur noch reellwertige Funktionen, somit ist B symmetrisch.

Lemma VI.2.1. *Es sei $u \in H^1(\Omega)$. Es gibt dann ein $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, so dass $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:*

$$B(u,v) = B(\tilde{u}, v)$$

Beweis Wir betrachten die lineare Abbildung $L(v) = B(u,v)$ auf $H_0^1(\Omega)$. Gemäss der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt: $|L(v)| \leq E(u)^{1/2}E(v)^{1/2}$. Dies zeigt, dass L stetig, also eine Linearform ist auf $(H_0^1(\Omega), B(.,.))$. Aus dem Darstellungssatz im Hilbertraum wissen wir nun, dass es ein eindeutiges Element $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ gibt, so dass gilt: $L(v) = B(\tilde{u}, v)\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung: Der Beweis zeigt sogar, dass es genau ein Element $\tilde{u}$ gibt, so dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ die Gleichung $B(u,v) = B(\tilde{u}, v)$ gilt.

Satz VI.2.2. *Es sei $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Dann gilt:*

a) Es gibt genau eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$, die das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega$$
$$\gamma u = g$$

löst.

b) Die L"osung u ist das einzige Element in $A = \{f \in H^1(\Omega) |\ \gamma f = g\}$, welches die Energie E minimiert.

Beweis

a) Aus Theorem 2 wissen wir, dass es ein $u_1 \in H^1(\Omega)$ gibt, so dass $\gamma u_1 = g$. Es sei weiter $\tilde{u}_1$ die Funktion aus Lemma 8, d.h. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $B(u_1, v) = B(\tilde{u}_1, v)$. Da $\tilde{u}_1$ in $H_0^1(\Omega)$ liegt, gilt $\gamma\tilde{u}_1 = 0$. Folglich erf"ullt $u = u_1 - \tilde{u}_1$ die Gleichung $\gamma u = g$ und $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ gilt: $B(u, v) = B(u_1, v) - B(\tilde{u}_1, v) = 0$. Insbesondere gilt f"ur $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$B(u, \varphi) = \sum_i \int_\Omega \partial_i u \partial_i \varphi dx = \sum_i < \partial_i u; \partial \varphi_i >= 0$$

und folglich

$$< \Delta u, \varphi >= 0.$$

Damit ist gezeigt, dass u tatsächlich eine Lösung des Dirichlet-Problems ist. Zeigen wir nun die Eindeutigkeit: Es sei U die Differenz zweier Lösungen. Dann gilt: $U \in H^1(\Omega)$, $\Delta U = 0$ und $\gamma U = 0$. Folglich liegt U sogar in $H_0^1(\Omega)$. Somit gilt f"ur alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$< \Delta U; \varphi >= -\sum_i \int \partial_i U \partial_i \varphi dx = 0.$$

D. h. $B(U, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $H_0^1(\Omega)$, muss $U = 0$ gelten.

b) Es sei w ein beliebiges Element aus $H^1(\Omega)$, welches $\gamma w = g$ erfüllt. Die Differenz $w - u$ erfüllt folglich $\gamma(w - u) = 0$ und liegt also in $H_0^1(\Omega)$. Dann gilt:

$$E(w) = B(w, w) = B(u, u) + 2B(u, w - u) + B(w - u, w - u).$$

Aus dem Beweis von Teil a) wissen wir, dass u senkrecht steht auf allen Elementen aus $H_0^1(\Omega)$, d.h. $B(u, w - u) = 0$. Daher gilt: $E(w) = E(u) + E(w - u) \geq E(u)$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $u = w$ ist.

VI.3 Inhomogenes Dirichlet-Problem

Definition VI.3.1. *Es sei Ω offen. Eine Distribution u auf Ω liegt in $\mathbf{H^{-1}(\Omega)}$, falls eine Konstante C existiert, so dass $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:*

$$| < u; \varphi > | \leq CE(\varphi)^{1/2} = C\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 dx\Big)^{1/2} = C||\nabla\varphi||_{L^2}$$

Bemerkung: Jedes $f \in L^2(\Omega)$ liegt in $H^{-1}(\Omega)$: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt auch $\varphi \in L^2(\Omega)$, denn insbesondere ist φ stetig auf einer kompakten Menge, d.h. $\max_{x \in supp\, \varphi} |\varphi(x)|^2$ wird angenommen, und somit gilt:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx \leq \max_{x \in supp\, \varphi} |\varphi(x)|^2 \cdot |\Omega| < \infty$$

und somit liegt φ in $L^2(\Omega)$. Dann erhält man mit der Ungleichung von Hölder:

$$|<f;\varphi>| = \Big|\int_\Omega f\varphi\Big| \leq \int_\Omega |f\varphi|dx \leq ||f||_{L^2}\cdot||\varphi||_{L^2}.$$

Weiter gilt nun gemäss der Ungleichung von Poincaré:

$$|<f;\varphi>| \leq ||f||_{L^2}\cdot||\varphi||_{L^2} \leq C||f||_{L^2}E(\varphi)^{1/2}.$$

Man beachte, dass gilt $C_0^\infty(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$.
Es gilt sogar $\partial_i f\in H^{-1}(\Omega)$ wie die folgenden Ungleichungen zeigen:

$$|<\partial_i f;\varphi>| = |<f;\partial_i\varphi>| \leq ||f||_{L^2}||\partial_i\varphi||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}E(\varphi)^{1/2}$$

Lemma VI.3.2. *Die Definition V.1.3 für den Fall $s=-1$ und Definition 10 für $\Omega=\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis

"$\Rightarrow$" Es sei $u\in H^{-1}(\Omega)$ gemäss Definition V.1.3 für den Fall $s=-1$. Dann entnehmen wir dem Beweis von Theorem V.1.6, Behauptung 1, dass $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\Omega)$ gilt:

$$|<u;\varphi>| \leq (2\pi)^{-n}||u||_{H^{-1}}||\varphi||_{H^1}.$$

Weiter gilt:

$$||\varphi||_{H^1} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega|\partial^\alpha\varphi|^2\Big)^{1/2} \leq ||\varphi||_{L^2}+||\nabla\varphi||_{L^2} \leq C'||\nabla\varphi||_{L^2}$$

Wir haben also die gewünschte Ungleichung

$$|<u;\varphi>| \leq C||\nabla\varphi||_{L^2}$$

(Man beachte die Poincaré-Ungleichung).
Da sie insbesondere $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, haben wir die geforderte Eigenschaft aus Definition 10 gezeigt.

"$\Leftarrow$" Es sei nun also u eine Distribution mit der Eigenschaft, dass es eine Konstante C gibt, so dass für alle $\varphi\in C_0^\infty$ gilt:

$$|<u;\varphi>| \leq C||\nabla\varphi||_{L^2}$$

D. h. $<u;.>$ ist eine lineare, stetige Abbildung auf dem dichten Unterraum $C_0^\infty(\Omega)$ von $H^1(\Omega)$. Somit kann u zu einer Linearform, die wir wiederum mit u bezeichnen, auf ganz $H^1(\Omega)$ fortgesetzt werden. Dies bedeutet aber, dass $u\in(H^1(\Omega))^*$ ist. Da gemäss Theorem V.1.6 der Dualraum von $H^1(\Omega)$ gerade $H^{-1}(\Omega)$ ist, folgt, dass u ein Element von $H^{-1}(\Omega)$ ist und damit auch Definition V.1.3 erfüllt.

Das Konzept aus Definition 10 kann wie folgt erweitert werden:

Definition VI.3.3. *Es sei $m \in \mathbb{N}$. Mit $\mathbf{H^{-m}(\mathbb{R}^n)}$ bezeichnet man den Raum der Distributionen u, für welche eine Konstante C existiert, so dass*
$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *gilt:*

$$| < u; \varphi > | \leq C||\varphi||_m$$

wobei

$$||\varphi||_m = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha \varphi||_{L^2}^2 \Big)^{1/2}$$

Satz VI.3.4. *Für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass gilt*

$$\Delta u = -f$$

Beweis Die lineare Abbildung $\varphi \mapsto < f; \varphi >$ ist auf dem dichten Unterraum $C_0^\infty(\Omega)$ von $H_0^1(\Omega)$ definiert und dort auch stetig bezüglich der Norm $E^{1/2}$. Sie lässt sich also zu einer Linearform L auf $H_0^1(\Omega)$ fortsetzen. Da $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $L(v) = B(u, v)$. Insbesondere haben wir für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$< f; \varphi >= B(u, \varphi) = \sum_i < \partial_i u; \partial_i \varphi >= - < \Delta u; \varphi >$$

Dies zeigt $\Delta u = -f$.
Nun zeigen wir noch die Eindeutigkeit. Es sei U die Differenz zweier Lösungen. U liegt in $H_0^1(\Omega)$ und erfüllt $\Delta U = 0$. Dem Beweis von Theorem 9 entnimmt man, dass dies impliziert, dass $U = 0$ ist.

Korollar VI.3.5. *Jedes Element $f \in H^{-1}(\Omega)$ ist Summe von Ableitungen von Funktionen aus $L^2(\Omega)$.*

Beweis Auf Grund des vorangehenden Theorems ist bekannt, dass ein $u \in H_0^1(\Omega)$ existiert, welches $\Delta u = -f$ erfüllt. Wir können folglich f schreiben als $f = -\sum_i \partial_i(\partial_i u)$ und die Funktionen $\partial_i u$ liegen in $L^2(\Omega)$ (vgl. Definition von $H_0^1(\Omega)$).

Korollar VI.3.6. *Es sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ und es sei $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Es gibt dann genau eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des Dirichlet-Problems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f \ \textit{auf}\ \Omega \\ \gamma u &= g \end{aligned}$$

Beweis Einerseits wissen wir aus Theorem 9, dass es ein Elemnt $v \in H^1(\Omega)$ gibt, welches $\Delta v = 0$ und $\gamma v = g$ erfüllt. Andererseits wissen wir aus Theorem 13, dass ein $w \in H_0^1(\Omega)$ existiert, für welches gilt $\Delta w = -f$. Die Funktion $u = v + w$ ist dann eine Lösung des gestellten Problems.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Es sei wiederum U die Differenz zweier Lösungen. Da $U \in H_0^1(\Omega)$ und $\Delta U = 0$ folgt nun sofort $U = 0$.

Bibliographie

- J.M. Bony
  "Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier"
  Ecole Polytechnique (2001) ISBN: 2-7302-0775-9

- H. Brezis
  "Analyse Fonctionnelle"
  Masson (1983) ISBN: 2-225-77198-7

- D. Gilbarg and N.S. Trudinger
  "Elliptic Partial Differential Equations of second order"
  Springer (2001) ISBN: 3-540-41160-7

- M.E. Taylor
  "Partial Differential Equation"
  volume I (chapters 3 and 4) (1996) ISBN: 0-387-94653-5

- W. Rudin
  "Functional Analysis"
  McGraw-Hill.Inc. 1991, ISBN: 0-07-054236-8

- Michael Struwe
  Skript: *"Analysis III"*
  http://www.math.ethz.ch/∼struwe/skripten.html

- Michael Struwe
  Skript: *"Funktionalanalysis I"*
  http://www.math.ethz.ch/∼struwe/skripten.html

- Giovanni Felder
  Skript: *"MMP I"*
  http://www.math.ethz.ch/∼felder/mmp/mmp1