

**Le rôle de l'intégrabilité par
compensation dans l'analyse des
problèmes invariants conformes.**

Tristan Rivière*

Mini-cours à Nice les 16 et 18 mars 2009.

*Department of Mathematics, ETH Zentrum, CH-8093 Zürich, Switzerland.

I Introduction

Le cours se situe à la rencontre de deux domaines des mathématiques : le calcul des variations et la théorie de l'invariance conforme.

L'invariance conforme est une propriété jouant un rôle important dans de nombreux domaines de la physique (théorie conforme des champs, théorie de la renormalisation, théorie de la turbulence, relativité générale...etc) et naturellement de la géométrie (théorie des surfaces de riemann, invariants conformes de la géométrie riemannienne : tenseur de Weyl, Q -courbure, champs de Yang-Mills...). Nous nous proposons d'étudier dans ce cours certains rôles joués par l'invariance conforme en analyse et plus précisément dans l'étude des non-linéarités des équations aux dérivées partielles issues de problèmes variationnels invariants conformes (applications harmoniques, surfaces minimales et à courbure moyenne prescrite, équation de Yang-Mills...etc).

Une transformation est conforme lorsqu'elle préserve infinitésimalement les angles et donc quand sa différentielle en tout point est une similitude. En dimension 2, contrairement aux dimensions plus grandes, le groupe des transformations conformes est particulièrement important, de dimension infinie, et correspond aux applications holomorphes . Il est donc plus riche dans cette dimension à laquelle nous allons nous restreindre dans ce mini-cours bien que de nombreux arguments que nous présenterons ont des correspondants naturels en dimension plus grande.

La rencontre entre le calcul des variations et l'invariance conforme s'est effectuée au début du XXème siècle en particulier dans la résolution du problème de Plateau - en fait posé par Lagrange déjà en 1760 - apportée par J.Douglas et T.Radó - qui valut en particulier la médaille Fields à Jesse Douglas en 1936.

Problème de Plateau. *Étant donnée une courbe régulière, fermée et connexe Γ dans \mathbb{R}^3 peut-on trouver une immersion du disque D^2 dont le bord ∂D^2 est envoyé homeomorphiquement sur Γ par u et pour laquelle $u(D^2)$ a une aire minimale?*

Une des idées importante de Douglas et Radó fût de minimiser l'énergie de l'application u

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 \, dx \wedge dy \quad ,$$

qui à de bonne propriétés de coercivité et de semicontinuité inférieure pour la topologie faible de l'espace de Sobolev $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$, plutôt que de minimiser l'aire elle même

$$A(u) = \int_{D^2} |\partial_x u \times \partial_y u| \, dx \wedge dy \quad .$$

Cela est rendu possible grace à l'inégalité suivante, valable pour tout u dans $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$,

$$A(u) \leq E(u) \quad ,$$

avec égalité si et seulement si u est faiblement conforme :

$$|\partial_x u| = |\partial_y u| \quad \text{et} \quad \partial_x u \cdot \partial_y u = 0 \quad \text{p.p.} \quad .$$

Un avantage certain de E par rapport à A est que A est invariant par l'action d'un groupe de dimension infini : celui des difféomorphismes positifs quelconque du domaine D^2 dans lui même,¹ alors que l'énergie E en revanche n'est pas invariante par un

¹En effet, pour deux paramétrisations positives de D^2 différentes (x, y) et (x', y') , on a, pour toute paire de fonctions f et g sur D^2

$$df \wedge dg = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g \, dx \wedge dy = \partial_{x'} f \partial_{y'} g - \partial_{y'} f \partial_{x'} g \, dx' \wedge dy'$$

et donc $dx \wedge dy$ et $dx' \wedge dy'$ ayant le même signe on obtient

$$|\partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g| \, dx \wedge dy = |\partial_{x'} f \partial_{y'} g - \partial_{y'} f \partial_{x'} g| \, dx' \wedge dy'$$

ce qui implique l'invariance de A par la composition avec les difféomorphismes positifs.

groupe aussi grand mais seulement par le groupe de Möbius des transformations conformes de degré 1 du disque dans lui même qui est de dimension finie.²

L'idée est finalement assez proche de celle de minimiser, en paramétrisation normale $|\dot{\gamma}| = 1$, l'énergie d'une courbe $\int_{[0,1]} |\dot{\gamma}|^2 dt$ plutôt que le lagrangien de la longueur $\int_{[0,1]} |\dot{\gamma}| dt$ invariant par le groupe "trop gros" des difféomorphismes positifs du segment $[0, 1]$.

Si donc un minimum de l'aire A existe et est réalisé par une immersion conforme du disque - ce qui semble *a-priori* raisonnable car tous les disques (D^2, g) sont conformément équivalents au disque plat D^2 - il sera certainement obtenu en minimisant E dont les points critiques sont les applications harmoniques u dans \mathbb{R}^3 : satisfaisant

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(D^2) \quad . \quad (\text{I.1})$$

La mise en oeuvre est cependant compliquée par la donnée au bord qui est une forme de donnée de Dirichlet "libre" le long de la courbe Γ et la non-compacité du groupe de Möbius qu'il

²L'invariance de E par le groupe conforme se voit aisément en particulier en passant par la variable complexe $z = x + iy$. On note

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

et

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

de façon à ce que $du = \partial_z u dz + \partial_{\bar{z}} u d\bar{z}$ et que donc

$$E(u) = \frac{i}{2} \int_{D^2} (|\partial_z u|^2 + |\partial_{\bar{z}} u|^2) dz \wedge d\bar{z} \quad .$$

Si donc on compose u par une transformation conforme, donc holomorphe, $z = f(w)$, on a pour $\tilde{u}(w) = u(z)$

$$|\partial_w \tilde{u}|^2 = |f'(w)|^2 |\partial_z u|^2 \circ f \quad \text{et} \quad |\partial_{\bar{w}} \tilde{u}|^2 = |f'(w)|^2 |\partial_{\bar{z}} u|^2 \circ f \quad .$$

Par ailleurs $dz \wedge d\bar{z} = |f'(w)|^2 dw \wedge d\bar{w}$. En combinant ces identités précédentes on obtient l'invariance conforme recherchée $E(u) = E(\tilde{u})$.

faut "casser" par la méthode dite *des 3 points*. Finalement on a le résultat suivant.

Theorem I.1 [*Douglas-Radó-Courant*] *Étant donnée une courbe Γ régulière fermée connexe de \mathbb{R}^3 , il existe un minimum continu u de E dans l'espace des applications $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$ envoyant le bord ∂D^2 dans Γ de façon monotone et telle que u satisfait*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } D^2 \\ |\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2 - 2i \partial_x u \cdot \partial_y u = 0 & \text{dans } D^2 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

□

La conséquence de la condition double (I.2) - harmonique et conforme - est que $u(D^2)$ réalise une surface minimale³ dont il sera démontré plus tard par R.Osserman qu'elle ne possède pas de point de branchement à l'intérieur et pas non plus au bord comme le prouvera bien plus tard S.Hildebrandt.

La résolution du problème de Plateau par Douglas et Radó est un exemple d'utilisation du lagrangien invariant conforme E pour aborder une question "extérieure", celle de minimiser l'aire d'un disque à bord fixé. L'analyse de ce problème a été facilitée par la très grande simplicité de l'équation (I.1) satisfaite par les points critiques de E : l'équation de Laplace. Les principales questions d'analyse concernant cette équation (régularité, compacité, unicité...etc) sont plus ou moins toutes résolues par

³On rappelle le résultat de géométrie différentielle des surfaces suivant : Soit u une paramétrisation positive conforme d'un disque orienté dans \mathbb{R}^3 alors, le vecteur courbure moyenne \vec{H} , parallèle au vecteur unité normal \vec{n} , est donné par

$$\vec{H} = H \vec{n} = 2^{-1} e^{-2\lambda} \Delta u \quad ,$$

où $e^\lambda = |\partial_x u| = |\partial_y u|$ et H est la courbure moyenne $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$. En d'autres termes on a

$$\Delta u = 2H \partial_x u \times \partial_y u \quad . \quad (\text{I.3})$$

l'application directe du principe du maximum. L'objet de ce mini-cours est de considérer ces mêmes questions d'analyse (en particulier celles liées à la régularité) pour les points critiques des lagrangiens quadratiques invariants conformes en général, satisfaisant des propriétés de coercivité. Comme nous le verrons le principe du maximum ne s'applique plus et il faut alors trouver un substitut à cet outil puissant. L'invariance conforme va se traduire par un type particulier de non-linéarité dans les équations qu'elle engendre. Nous verrons comment la structure spécifique de ces non-linéarités permet de réécrire les équations d'Euler des lagrangiens invariants conformes sous forme de lois de conservations. Ces nouvelles formulations combinées à la théorie de l'*intégrabilité par compensation*, dont nous allons rappeler certains résultats fondamentaux, sont la clé pour la compréhension de l'analyse de ces problèmes spécifiques mais aussi de bien d'autres de l'analyse en géométrie comme les *surfaces de Willmore*, les *applications poly- et α -harmoniques*, les *champs de Yang-Mills*, les *équations d'Hermitte-Einstein*, les *Wave maps...etc.*

II Les lagrangiens invariants conformes quadratiques et coercifs en dimension 2.

On étudie les lagrangiens de la forme

$$L(u) = \int_{D^2} l(u, \nabla u) \, dx \, dy \quad , \quad (\text{II.4})$$

où l'intégrand l est une fonction des variables $z \in \mathbb{R}^m$ et $p \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^m$ satisfaisant la condition de dépendance "presque quadratique" en p et de coercivité suivante

$$C^{-1} |p|^2 \leq l(z, p) \leq C |p|^2 \quad , \quad (\text{II.5})$$

Enfin nous faisons l'hypothèse d'invariance conforme : pour toute transformation conforme f de degré 1 positive et toute application $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} L(u \circ f) &= \int_{f^{-1}(D^2)} l(u \circ f, \nabla(u \circ f)) \, dx' \, dy' \\ &= \int_{D^2} l(u, \nabla u) \, dx \, dy = L(u) \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Exemple 1. Nous l'avons vu dans l'introduction, il s'agit de l'énergie de Dirichlet des applications à valeur dans \mathbb{R}^m

$$E(u) = \int_{D^2} |\nabla u|^2 \, dx \, dy \quad ,$$

dont les points critiques satisfont l'équation de Laplace (I.1) qui, sous l'hypothèse supplémentaire de conformité, s'interprète géométriquement comme l'équation des *surfaces minimales*. Les questions de régularités ainsi que de compacité relative à cette équation sont résolues par application du principe du maximum.

Exemple 2. Nous nous donnons une métrique arbitraire dans \mathbb{R}^m : $(g_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_m} \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{S}_m^+)$, où \mathcal{S}_m^+ désigne le sous-ensemble de $M_m(\mathbb{R})$ constitué des matrices $m \times m$ symétriques définies

positives. Nous faisons l'hypothèse de majoration et de coercivité uniforme suivante

$$\exists C > 0 \quad \text{t. q.} \quad C^{-1}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq C\delta_{ij} \quad \text{sur } \mathbb{R}^m.$$

On suppose enfin que

$$\|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} < +\infty$$

Sous ces hypothèses le deuxième exemple de lagrangien quadratique coercif invariant conforme, et qui généralise le premier est

$$\begin{aligned} E_g(u) &= \frac{1}{2} \int_{D^2} \langle \nabla u, \nabla u \rangle_g \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{D^2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(u) \nabla u^i \cdot \nabla u^j \, dx \, dy \quad . \end{aligned}$$

La vérification que E_g est bien invariant conforme peut s'effectuer comme pour l'énergie de Dirichlet E au moyen de la variable complexe $z = x + iy$ et ne présente pas de difficulté nouvelle. Les points critiques faibles de E_g sont les applications $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ satisfaisant :

$$\forall \xi \in C_0^\infty(D^2, \mathbb{R}^m) \quad \frac{d}{dt} E_g(u + t\xi)|_{t=0} = 0 \quad .$$

Un calcul élémentaire permet d'établir que u est un point critique faible pour E_g si et seulement si u satisfait au sens des distributions l'équation d'Euler suivante

$$\forall i = 1 \cdots m \quad \Delta u^i + \sum_{k,l=1}^m \Gamma_{kl}^i(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^l = 0 \quad . \quad (\text{II.7})$$

où Γ_{kl}^i sont les symboles de Christoffel de la métrique g dont l'expression explicite en fonction de g_{ij} est donné par

$$\Gamma_{kl}^i(z) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m g^{is} (\partial_{z_l} g_{km} + \partial_{z_k} g_{lm} - \partial_{z_m} g_{kl}) \quad .$$

(g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) .

L'équation (II.7) s'appelle équation des *applications harmoniques*⁴ à valeur dans (\mathbb{R}^m, g) .

Comme dans le cas plat, si on suppose en plus que u est conforme (II.7) est équivalent au fait que $u(D^2)$ est une surface minimale dans (\mathbb{R}^m, g) .

On note $\Gamma^i(\nabla u, \nabla u) := \sum_{k,l=1}^m \Gamma_{kl}^i \nabla u^k \cdot \nabla u^l$ et l'équation des applications harmoniques s'écrit alors

$$\Delta u + \Gamma(\nabla u, \nabla u) = 0 \quad . \quad (\text{II.8})$$

Les questions d'analyse que l'on pose par rapport à cette équation sont les suivantes

i) **Passage à la limite faible** : Soit u_n une suite de solution des *applications harmoniques* d'énergie E_g uniformément bornée, est ce que l'on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $W^{1,2}$ vers une *application harmonique* ?

ii) **Convergence des suites de Palais-Smale** : Soit une suite d'applications u_n dans $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ d'énergie uniformément bornée satisfaisant

$$\Delta u_n + \Gamma(\nabla u_n, \nabla u_n) = \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } H^{-1} \quad .$$

Existe-t-il une sous-suite de u_n qui converge faiblement vers une *application harmonique* ?

iii) **Régularité des solutions faibles.** : Soit u une application de $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ satisfaisant l'équation des *applications harmoniques*, (II.7), au sens des distributions. Est-ce que u est régulière ? (C^0 ?, C^∞ ?, analytique ?)

⁴L'équation (II.7) peut être interprétée comme l'équivalent bi-dimensionnel de l'équation des géodésique en paramétrisation normale :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{k,l=1}^m \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0 \quad .$$

L'éventuelle résolution de la question iii) est fortement reliée aux 2 précédentes et donc nous allons essentiellement regarder des questions de régularité dans ce mini-cours.

Avant d'étudier d'autres exemples de Lagrangiens invariants conformes nous nous attardons un peu à étudier la difficulté de la question de la régularité des applications harmoniques en dimension 2 iii).

L'équation des applications harmonique (II.8) appartient à la famille des systèmes elliptiques à *croissance quadratique*, dits aussi à *croissance naturelle*, de la forme

$$\Delta u = f(u, \nabla u) \quad , \quad (\text{II.9})$$

où $f(z, p)$ est une fonction quelconque continue pour laquelle il existe $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$ satisfaisant

$$\forall z \in \mathbb{R}^m \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^m \quad f(z, p) \leq C_1 |p|^2 + C_0 \quad . \quad (\text{II.10})$$

Ces équations sont critiques en dimension 2 pour l'espace de Sobolev $W^{1,2}$: en effet

$$u \in W^{1,2} \Rightarrow \Gamma(\nabla u, \nabla u) \in L^1 \Rightarrow \nabla u \in L_{loc}^p(D^2) \quad \forall p < 2 \quad .$$

C'est à dire que du point de vue de la régularité l'insertion de l'hypothèse $\nabla u \in L^2$ dans la non-linéarité de l'équation celle ci nous "rend" une information $\nabla u \in L_{loc}^p(D^2) \quad \forall p < 2$ ou même $\nabla u \in L_{loc}^{2,\infty}$ - définition en note⁵- "presque" identique à l'information initiale dont nous sommes partis. Si l'information de départ avait été identique à l'information d'arrivée le problème

⁵L'espace $L^{2,\infty}(\omega)$ est l'espace *faible*- L^2 de Marcinkiewicz des applications f mesurables satisfaisant

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^2 |\{p \in \omega ; |f(p)| > \lambda\}| < +\infty \quad , \quad (\text{II.11})$$

où $|\cdot|$ est la mesure de Lebesgue. $L^{2,\infty}$ est une espace "un peu plus grand" que L^2 qui a cependant les mêmes propriétés d'échelle que L^2 .

serait "bootstrapable" et les questions i), ii) et iii) seraient en très bonne voie d'être résolues. La difficulté est donc dans cette "très légère" perte d'information $L^2 \rightarrow L^{2,\infty}$.

Il existe des exemples simples d'équations à croissance quadratique en dimension 2 pour lesquelles les réponses aux questions i), ii) et iii) sont toutes 3 négatives.

Par exemple l'équation suivante⁶

$$\Delta u + |\nabla u|^2 = 0 \quad (\text{II.12})$$

est à croissance quadratique et admet une solution $W^{1,2}(D^2)$ qui n'est pas bornée dans L^∞ et donc pas continue

$$u(x, y) := \log \log \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad .$$

On a donc répondu par la négative à la question de la régularité. Il 'est pas compliqué non plus de construire des contre-exemples à la question de la limite faible i) - et donc à fortiori ii) - pour l'équation (II.12) une fois que l'on observe l'identité générale suivante valable pour les applications C^2

$$\Delta e^u = e^u [\Delta u + |\nabla u|^2] \quad . \quad (\text{II.13})$$

On vérifie aisément que le logarithme d'une solution positive de

$$\Delta v = -2\pi \sum_i \lambda_i \delta_{a_i}$$

, où $\lambda_i > 0$ et δ_{a_i} sont des masses de Dirac isolées, est une solution $W^{1,2}$ de (II.12).⁷

⁶Cette équation est invariante conforme, il a été démontré par J. Frehse qu'elle est même variationnelle mais issue d'un Lagrangien non invariant conforme :

$$L(u) = \int_{D^2} \left(1 + \frac{1}{1 + e^{12u} (\log 1/|(x,y)|)^{-12}} \right) |\nabla u|^2(x,y) \, dx \, dy \quad ,$$

voir [Fre].

⁷En effet, d'après (II.13) $u = \log(v)$ satisfait $\Delta u + |\nabla u|^2 = 0$ en dehors des points a_i .

On choisit alors une fonction f régulière positive non nulle d'intégrale égale à 1, supportée dans la boule de rayon $1/4$ et de centre 0. Il existe une suite de mesures atomiques à poids, λ_i^n , positifs

$$f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \delta_{a_i^n}$$

telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^n = 1$, convergeant au sens des mesures de Radon vers f . Soit donc

$$u_n(x, y) := \log \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^n \log \frac{2}{|(x, y) - a_i^n|} \right]$$

On a sur D^2

$$v_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \log \frac{2}{|(x, y) - a_i^n|} > \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \log \frac{8}{5} = \log \frac{8}{5} \quad . \quad (\text{II.14})$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{D^2} |\nabla u_n|^2 &= - \int_{D^2} \Delta u_n = - \int_{\partial D^2} \frac{\partial u_n}{\partial r} \\ &\leq \int_{\partial D^2} \frac{|\nabla v_n|}{|v_n|} \leq \frac{1}{\log \frac{8}{5}} \int_{\partial D^2} |\nabla v_n| \leq C \end{aligned}$$

où C est indépendant de n . u_n réalise donc une suite de solution de (II.12) de norme $W^{1,2}$ uniformément bornée. Comme

Au voisinage d'un point a_i , ∇u a le comportement asymptotique suivant

$$|\nabla u| = \frac{|\nabla v|}{|v|} \simeq \frac{1}{|(x, y) - a_i| \log |(x, y) - a_i|} \in L^2 \quad .$$

Donc $|\nabla u|^2 \in L^1$. $\Delta u + |\nabla u|^2$ est une distribution dans $H^{-1} + L^1$ portée par les points isolés a_i . Elle est donc une combinaison linéaire de masses de Dirac portés par les a_i :

$$\Delta u + |\nabla u|^2 = \sum_i \mu_i \delta_{a_i} \quad .$$

Δu est donc la somme d'une fonction L^1 et des masses de Dirac. Comme Δu est dans H^{-1} les coefficients μ_i doivent être nuls et donc u est une solution de (II.12).

f_n converge au sens des mesures de Radon vers f , v_n converge fortement dans $W^{1,p}$ pour tout $p < 2$ vers

$$v := \log \frac{2}{r} * f \quad .$$

La minoration uniforme (II.14) et la convergence forte précédente implique que $u_n = \log v_n$ converge fortement dans $W^{1,p}$ pour tout $p < 2$ vers

$$u := \log \left[\log \frac{2}{r} * f \right]$$

Les hypothèses sur f implique que $\Delta(e^u) = -2\pi f \neq 0$, comme f est une fonction régulière e^u l'est aussi et donc, d'après (II.13), u ne satisfait pas (II.12).

On a donc construit une suite de solutions de (II.12) qui converge faiblement dans $W^{1,2}$ vers une application qui n'est plus solution de (II.12).

Exemple 3. Dans cet exemple on se donne cette fois-ci une application $(\omega_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_m}$ dans $C^1(\mathbb{R}^m, so(m))$ où $so(m)$ désigne l'espace des matrices carrées $m \times m$ antisymétriques. On fait par ailleurs l'hypothèse de majoration uniforme suivante

$$\|\nabla \omega\|_{L^\infty(D^2)} < +\infty \quad .$$

On introduit le Lagrangien E^ω défini pour toute application $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$

$$E^\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2 + \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij}(u) \partial_x u^i \partial_y u^j - \partial_y u^i \partial_x u^j \, dx \, dy \quad (\text{II.15})$$

L'invariance conforme de ce lagrangien vient du fait qu'à l'énergie E on a ajouté l'intégrale sur D^2 du *tiré en arrière* de $\omega = \omega_{ij} dz^i \wedge dz^j$ par u qui est invariant par composition de u avec des difféomorphismes de D^2 positifs quelconque.

L'équation d'Euler Lagrange de (II.15) pour les variations de la forme $u + t\xi$ - où ξ est une fonction arbitraire C^∞ à support compact dans D^2 - s'écrit : pour tout $i = 1 \cdots m$

$$\Delta u^i - 2 \sum_{k,l=1}^m H_{kl}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0 \quad (\text{II.16})$$

où $\nabla^\perp u^l = (-\partial_y u^k, \partial_x u^k)$ ⁸ et H_{kl}^i est antisymétrique en k et l et est donné par la formule suivante. On introduit la 2-forme H sur \mathbb{R}^m à valeur dans \mathbb{R}^m

$$H^i(z) := \sum_{k,l=1}^m H_{kl}^i(z) dz^k \wedge dz^l \quad .$$

La 2-forme à valeur vectorielle H intervenant dans l'équation d'Euler (II.16) est l'unique solution de

$$\forall z \in \mathbb{R}^m \quad \forall U, V, W \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} d\omega_z(U, V, W) &= 4 U \cdot H(V, W) \\ &= 4 \sum_{i=1}^m U^i H^i(V, W) \quad . \end{aligned}$$

En dimension 3 par exemple $d\omega$ est une 3-forme qui s'identifie à une fonction sur \mathbb{R}^m : il existe H telle que $d\omega = 4H dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$. Avec cette notation l'équation d'Euler s'écrit alors : pour tout $i = 1 \cdots m$

$$\Delta u^i = 2H(u) \partial_x u^{i+1} \partial_y u^{i-1} - \partial_x u^{i-1} \partial_y u^{i+1} \quad . \quad (\text{II.17})$$

où on utilise l'indexation dans \mathbb{Z}_3 . (II.17) s'écrit aussi

$$\Delta u = 2H(u) \partial_x u \times \partial_y u \quad .$$

⁸Avec cette notation $\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l$ désigne le jacobien suivant

$$\nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = \partial_x u^k \partial_y u^l - \partial_y u^k \partial_x u^l \quad .$$

On reconnaît l'équation (I.3) des *surfaces à courbure moyenne prescrite* H .

De façon tout à fait générale, l'équation (II.16) admet l'interprétation géométrique suivante. Soit u une solution conforme de (II.16) alors $u(D^2)$ est une surface dont le vecteur courbure moyenne au point $u(x, y)$ est donné par

$$e^{-2\lambda} u^* H = \left(e^{-2\lambda} \sum_{k,l=1}^m H_{kl}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l \right)_{i=1 \cdots m}, \quad (\text{II.18})$$

où e^λ est le facteur conforme $e^\lambda = |\partial_x u| = |\partial_y u|$.

L'équation (II.16) réalise aussi, comme dans l'exemple 2, un système elliptique à croissance quadratique qui est donc lui aussi critique en dimension 2 pour la norme $W^{1,2}$. Les difficultés d'analyse posées par ce système elliptique non-linéaire sont donc *a priori* de même nature que celles posées par l'équation des *applications harmoniques*.

Exemple 4.

Finallement on peut mélanger les deux variantes précédentes et introduire, pour le choix d'une métrique g C^1 sur \mathbb{R}^m et d'une 2-forme ω aussi C^1 sur \mathbb{R}^m et toutes deux de norme Lipschitz uniformément bornées sur \mathbb{R}^m ,

$$E_g^\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} \langle \nabla u, \nabla u \rangle_g dx dy + u^* \omega \quad .$$

Il s'agit à nouveau d'un Lagrangien invariant conforme, coercif et à croissance quadratique. Les points critiques de ce lagrangien satisfont l'équation d'Euler suivante : pour tout $i = 1 \cdots m$

$$\Delta u^i + \sum_{k,l=1}^m \Gamma_{kl}^i(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^l - 2 \sum_{k,l=1}^m H_{kl}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0 \quad . \quad (\text{II.19})$$

A nouveau le système elliptique précédent admet une interprétation géométrique qui généralise toutes les précédentes. Si u satisfait (II.19) et est conforme, $u(D^2)$ est une surface de (\mathbb{R}^m, g) dont le vecteur courbure moyenne est donné aussi par (II.18).

L'équation (II.19) réalise elle aussi, comme dans les exemples précédents, un système elliptique à croissance quadratique qui est donc lui aussi critique en dimension 2 pour la norme $W^{1,2}$.

Il se trouve que E_g^ω couvre toutes les possibilités de Lagrangiens invariants conformes coercifs et quadratiques. Le résultat correspondant a été démontré par M.Grüter.

Theorem II.2 [Gr] *Soit $l(z, p)$ une fonction de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R} . On suppose que l est C^1 par rapport à la première variable et C^2 par rapport à la deuxième. On suppose par ailleurs que l satisfait l'hypothèse de coercivité et de croissance quadratique suivante :*

$$\begin{aligned} \exists C > 0 \quad t.q. \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^m \\ C^{-1}|p|^2 \leq l(X, p) \leq C|p|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Soit L le lagrangien, d'intégrant l et défini pour les applications u $W^{1,2}$ de D^2 dans \mathbb{R}^m :

$$L(u) = \int_{D^2} l(u, \nabla u)(x, y) \, dx \, dy \quad . \quad (\text{II.21})$$

On suppose enfin que L est invariant conforme : pour toute application conforme ϕ positive de degré 1 on a

$$L(u \circ \phi) = \int_{\phi^{-1}(D^2)} l(u \circ \phi, \nabla(u \circ \phi))(x, y) \, dx \, dy = L(u) \quad . \quad (\text{II.22})$$

Alors il existe une métrique g C^1 sur \mathbb{R}^m et une 2-forme ω C^1 de \mathbb{R}^m telles que

$$L = E_g^\omega \quad . \quad (\text{II.23})$$

Applications à valeur dans une sous-variété de \mathbb{R}^m .

Jusqu'à présent nous nous sommes restreints à des applications de D^2 dans une variété ne possédant qu'une seule carte : (\mathbb{R}^n, g) . Plus généralement il est possible de considérer l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ de D^2 dans une variété riemannienne (N^n, g) quelconque orientée de dimension n et supposée de régularité C^2 . Lorsqu'elle est compacte et sans bord (ce que nous supposons à partir de maintenant pour simplifier la présentation), grace au théorème de Nash, cette variété peut être plongée isométriquement dans un espace euclidien \mathbb{R}^m . L'espace $W^{1,2}(D^2, N^n)$ est alors défini par

$$W^{1,2}(D^2, N^n) := \{u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m) ; u(p) \in N^n \text{ p.p. } p \in D^2\}$$

Etant donnée une 2-forme ω C^1 sur N^n , on peut considérer pour les u dans $W^{1,2}(D^2, N^n)$ le lagrangien

$$E^\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2 dx dy + u^* \omega \quad . \quad (\text{II.24})$$

Les points critiques de E^ω dans $W^{1,2}(D^2, N^n)$ sont définis de la façon suivante :

Soit π_N la projection orthogonale sur N^n qui à chaque point d'un voisinage de N (choisit suffisamment proche de N^n) associe le point de N^n le plus proche. π_N est une application régulière dans un voisinage suffisamment proche de N^n .

On dit alors que u dans $W^{1,2}(D^2, N^n)$ est un point critique de E^ω si pour toute application ξ dans $C_0^\infty(D^2, \mathbb{R}^m)$ on a

$$\frac{d}{dt} E^\omega(\pi_N(u + t\xi))_{t=0} = 0 \quad . \quad (\text{II.25})$$

La condition (II.25) est satisfaite pour tout ξ dans $C_0^\infty(D^2, \mathbb{R}^m)$ si et seulement si u est solution de l'équation d'Euler Lagrange

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) \quad (\text{II.26})$$

où nous utilisons les notations suivantes : $A(z)$ est la deuxième forme fondamentale au point z de N^n du plongement de N^n dans \mathbb{R}^m qui a une paire de vecteur de $T_z N^n$ associe un vecteur perpendiculaire à $T_z N^n$. $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ au point (x, y) de D^2 est précisément le vecteur de \mathbb{R}^m donné par

$$A(u)(\nabla u, \nabla u) := A(u)(\partial_x u, \partial_x u) + A(u)(\partial_y u, \partial_y u) \quad .$$

$H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u)$ au point (x, y) de D^2 est donc le vecteur suivant de \mathbb{R}^m :

$$\begin{aligned} H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) &:= H(u)(\partial_x u, \partial_y u) - H(u)(\partial_y u, \partial_x u) \\ &= 2H(u)(\partial_x u, \partial_y u) \quad , \end{aligned}$$

où $H(z)$ est la 2-forme alternée de $T_z N^n$ à valeurs dans $T_z N^n$ donnée par

$$\forall U, V, W \in T_z N^n \quad d\omega(U, V, W) := U \cdot H(z)(V, W) \quad .$$

Dans le cas particulier où $\omega = 0$ l'équation se réduit à

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0 \quad , \quad (\text{II.27})$$

Cette équation est appelée *équation des applications harmoniques* à valeur dans N^n .

Nous démontrons (II.26) dans le cas de la codimension 1. Soit ν le vecteur unité normal. On étend naturellement ω sur un "petit" voisinage de N^n en prenant son *tiré en arrière* par la projection $\pi_N : \pi_N^* \omega$. Infinitésimalement, au premier ordre, considérer les variations pour E^ω de la forme $\pi_N(u + t\xi)$ consiste à regarder des variations de la forme $u + t d\pi_N(u)\xi$ ce qui revient aussi à considérer les variations de la forme $u + tv$ où $v \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m) \cap L^\infty$ satisfait $v \cdot \nu(u) = 0$ presque partout. En suivant le résultat de l'exemple 3 précédent, u est point critique

de E^ω pour les variations précédentes si pour tout v satisfaisant $v \cdot \nu(u) = 0$ p.p.

$$\int_{D^2} \sum_{i=1}^m \left[\Delta u^i - 2 \sum_{k,l=1}^m H_{kl}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l \right] v^i dx dy = 0$$

où H est la 2-forme dans \mathbb{R}^m à valeurs vectorielles donnée pour tout z sur N^n par

$$\forall U, V, W \in \mathbb{R}^m \quad d\pi_N^* \omega(U, V, W) := U \cdot H(z)(V, W) \quad .$$

on a donc au sens des distributions

$$[\Delta u - H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u)] \wedge \nu(u) = 0 \quad , \quad (\text{II.28})$$

où on se souvient que $\nu \circ u \in L^\infty \cap W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ ce qui fait que l'identité précédente a bien un sens dans $\mathcal{D}'(D^2)$.

On observe que si un des vecteurs U , V ou W est normal à N^n - c.a.d. parallèle à ν - $d\pi_N^* \omega(U, V, W) = 0$ et donc en particulier pour tout V et W dans \mathbb{R}^m

$$\nu(z) \cdot H(z)(V, W) = 0 \quad .$$

Donc

$$\begin{aligned} & [\Delta u - H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u)] \cdot \nu(u) = \Delta u \cdot \nu(u) \\ & = \operatorname{div}(\nabla u \cdot \nu(u)) - \nabla u \cdot \nabla(\nu(u)) = -\nabla u \cdot \nabla(\nu(u)) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

où on a utilisé que $\nabla u \cdot \nu(u) = 0$ presque partout car ∇u est tangent à N^n .

En combinant (II.28) et (II.29) on obtient que u satisfait au sens des distributions l'équation suivante

$$\Delta u - H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) = -\nu(u) \nabla(\nu(u)) \cdot \nabla u \quad . \quad (\text{II.30})$$

La seconde forme fondamentale agissant sur deux vecteurs U et V de $T_z N^n$ en codimension 1 est donnée par

$$A(z)(U, V) = \nu(z) \langle d\nu_z U, V \rangle \quad , \quad (\text{II.31})$$

et donc (II.30) est bien l'expression (II.26) annoncée.

Nous terminons cette section par l'énoncé de la conjecture d'Hildebrandt formulée vers la fin des années 70.

Conjecture 1 *[Hil] [Hil2] Les points critiques d'énergie finie des lagrangiens invariants conformes continuellement différentiables, coercifs et quadratiques sont Hölder continus.*

C'est à la démonstration de cette conjecture que nous consacrons la suite de ce mini-cours sachant que sa résolution est très liée aux questions de compacité i) et ii) que nous évoquions plus haut, mais que malheureusement nous n'aurons pas le temps de traiter ici.

Nous commencerons par présenter dans la section suivante les premières résolutions partielles apportées par H.Wente et F.Hélein et l'importance jouée dans ces approches par les *lois de conservations* et *l'intégrabilité par compensation*.

La dernière section sera consacrée à la théorie des systèmes elliptiques linéaires à potentiel antisymétrique et l'application de cette théorie à la preuve de la conjecture d'Hildebrandt.

III L'intégrabilité par compensation appliquée à la régularité des points critiques de certains lagrangiens invariants conformes.

III.1 L'équation des surfaces à courbure moyenne constante.

Soit $H \in \mathbb{R}$ On étudie les propriétés d'analyse des solutions dans $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$ de l'équation

$$\Delta u - 2H \partial_x u \times \partial_y u = 0 \quad . \quad (\text{III.1})$$

La structure en jacobien du second membre permet par exemple de répondre positivement, sans trop de difficultés, à la question du passage à la limite pour les **suites de Palais Smale** :

Soit F_n une suite de distributions convergeant vers zero dans $H^{-1}(D^2, \mathbb{R}^3)$ et u_n une suite d'applications de norme $W^{1,2}$ uniformément bornée et satisfaisant l'équation

$$\Delta u_n - 2H \partial_x u_n \times \partial_y u_n = F_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H^{-1}(D^2) \quad .$$

On écrit

$$\begin{aligned} (\partial_x u_n \times \partial_y u_n)^i &= \partial_x u_n^{i+1} \partial_y u_n^{i-1} - \partial_x u_n^{i-1} \partial_y u_n^{i+1} \\ &= \partial_x (u_n^{i+1} \partial_y u_n^{i-1}) - \partial_y (u_n^{i+1} \partial_x u_n^{i-1}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

La majoration uniforme de la norme $W^{1,2}$ des applications u_n permet d'extraire une sous-suite $u_{n'}$ qui converge faiblement dans $W^{1,2}$ vers une limite u_∞ . En utilisant le théorème de Rellich-Kondrachov on en déduit la compacité fort de $u_{n'}$ dans L^2 en particulier et donc il est possible de passer à la limite dans les termes quadratiques suivants

$$u_n^{i+1} \partial_y u_n^{i-1} \rightarrow u_\infty^{i+1} \partial_y u_\infty^{i-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2)$$

et

$$u_n^{i+1} \partial_x u_n^{i-1} \rightarrow u_\infty^{i+1} \partial_x u_\infty^{i-1} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2)$$

En combinant ce fait avec l'écriture (III.2) des jacobiens, on obtient que u_∞ est solution de l'équation à courbure moyenne constante (III.1).

La question de la **régularité** des solutions faibles $W^{1,2}$ de l'équation à courbure moyenne constante (III.2) requiert un peu plus d'élaboration et en particulier l'introduction d'un résultat de l'intégrabilité par compensation établi par H. Wente.

Theorem III.1 [We] Soient a et b deux fonctions dans $W^{1,2}(D^2)$ et soit ϕ l'unique solution dans $W_0^{1,p}(D^2)$ - pour tout $1 \leq p < 2$ - de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a & \text{dans } D^2 \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

alors ϕ est dans $C^0 \cap W^{1,2}(D^2)$ et

$$\|\phi\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla\phi\|_{L^2(D^2)} \leq C_0 \|\nabla a\|_{L^2(D^2)} \|\nabla b\|_{L^2(D^2)} \quad . \quad (\text{III.4})$$

où C_0 est une constante indépendante de a et b .⁹ □

Démonstration du théorème III.1.

On suppose que a et b sont dans $C^\infty(D^2)$ ce qui permet de donner un sens à toutes les expressions que l'on manipule sans avoir d'états d'âme, puis un simple argument de densité permet de passer à la limite dans l'estimation (III.4) obtenue pour a et b C^∞ et de l'étendre à a et b quelconques dans $W^{1,2}$. On obtiendra par cela la continuité de ϕ qui sera limite uniforme de fonctions régulière du fait de l'estimation L^∞ dans (III.4).

On observe tout d'abord que, par la combinaison d'une simple intégration par partie et de Cauchy-Schwartz l'estimation $W^{1,2}$

⁹on démontre en fait que le théorème s'étend à des surfaces riemanniennes orientées quelconques - avec ou sans bord- avec une constante C_0 indépendante de la surface - voir [Ge] et [To] - ce qui est tout à fait remarquable et peut s'avérer très utile.

sur ϕ se déduit de l'estimation L^∞ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{D^2} |\nabla \phi|^2 &= - \int_{D^2} \phi \Delta \phi \leq \|\phi\|_\infty \|\partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a\|_1 \\ &\leq 2 \|\phi\|_\infty \|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \quad . \end{aligned}$$

étape 1. étant données deux fonctions \tilde{a} et \tilde{b} dans $C_0^\infty(\mathbb{C})$ - qui est dense dans $W^{1,2}(\mathbb{C})$, nous démontrons l'estimation correspondante à (III.4) pour

$$\tilde{\phi} := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} * \left[\partial_x \tilde{a} \partial_y \tilde{b} - \partial_x \tilde{b} \partial_y \tilde{a} \right] \quad . \quad (\text{III.5})$$

Du à l'invariance par translation il suffit de montrer la majoration suivante

$$|\tilde{\phi}(0)| \leq C_0 \|\nabla \tilde{a}\|_{L^2(\mathbb{C})} \|\nabla \tilde{b}\|_{L^2(\mathbb{C})} \quad . \quad (\text{III.6})$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log r \partial_x \tilde{a} \partial_y \tilde{b} - \partial_x \tilde{b} \partial_y \tilde{a} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \log r \frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{a} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{a} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial r} \right) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{a} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} \frac{dr}{r} d\theta \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} d\theta = 0$, nous pouvons retirer sur chaque cercle $\partial B_r(0)$ une constante à \tilde{a} que l'on choisit être sa valeur moyenne \bar{a}_r sur $\partial B_r(0)$. On obtient donc

$$\tilde{\phi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [\tilde{a} - \bar{a}_r] \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} \frac{dr}{r} d\theta \quad .$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwartz et

de Poincaré sur le cercle S^1 , on obtient

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{a} - \bar{a}_r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \theta} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \theta} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

L'inégalité recherchée (III.6) se déduit donc de l'inégalité précédente en appliquant à nouveau Cauchy-Schwartz.

De retour sur le disque D^2 , le théorème d'extension de Whitney donne l'existence de \tilde{a} et \tilde{b} telles que

$$\int_{\mathbb{C}} |\nabla \tilde{a}|^2 \leq C_1 \int_{D^2} |\nabla a|^2 \quad , \quad (\text{III.7})$$

et

$$\int_{\mathbb{C}} |\nabla \tilde{b}|^2 \leq C_1 \int_{D^2} |\nabla b|^2 \quad . \quad (\text{III.8})$$

Soit $\tilde{\phi}$ la fonction donnée par (III.5), la différence $\phi - \tilde{\phi}$ satisfait l'équation

$$\begin{cases} \Delta(\phi - \tilde{\phi}) = 0 & \text{dans } D^2 \\ \phi - \tilde{\phi} = -\tilde{\phi} & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

L'application du *principe du maximum* donne alors au vu des inégalités (III.6), (III.7) et (III.8)

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_{L^\infty(D^2)} \leq \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(\partial D^2)} \leq C \|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \quad .$$

Au moyen de l'inégalité triangulaire $|\|\phi\|_\infty - \|\tilde{\phi}\|_\infty| \leq \|\phi - \tilde{\phi}\|_\infty$ et à nouveau de l'inégalité (III.6) on obtient le résultat désiré sur la majoration L^∞ de ϕ et le théorème III.1 est entièrement démontré. \square

Démonstration de la régularité des solutions de l'équation à courbure moyenne constante.

On se propose d'établir tout d'abord l'existence d'une constante positive $\alpha > 0$ telle que

$$\sup_{\rho < 1/4, p \in B_{1/2}(0)} \rho^{-\alpha} \int_{B_\rho(p)} |\nabla u|^2 < +\infty \quad . \quad (\text{III.9})$$

Ceci implique, par un résultat classique d'analyse fonctionnelle¹⁰, que $u \in C^{0,\alpha/2}(B_{1/2}(0))$. On en déduit que u est Hölder continu dans l'intérieur du disque D^2 . Nous expliquons plus bas comment passer de la continuité Hölderienne à C^∞ .

Soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe un rayon $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $r < \rho_0$ et tout p dans $B_{1/2}(0)$

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 < \varepsilon_0 \quad .$$

Nous choisirons ε_0 suffisamment petit plus loin et nous considérons des rayons $r < \rho_0$. Dans $B_r(p)$ nous décomposons u de la manière suivante : $u = \phi + v$ où

$$\begin{cases} \Delta \phi = H \partial_x u \times \partial_y u & \text{dans } B_r(p) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B_r(p) \end{cases}$$

On applique le théorème III.1 à ϕ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_r(p)} |\nabla \phi|^2 &\leq C_0 |H| \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \\ &\leq C_0 |H| \varepsilon_0 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$v = u - \phi$ est harmonique. Nous appliquons à v le lemme suivant.

¹⁰Voir par exemple [Gi]

Lemma III.1 Soit v une fonction harmonique dans D^2 . Pour tout point p dans D^2 la fonction

$$\rho \longrightarrow \frac{1}{\rho^2} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2$$

est croissante. □

Preuve du lemme III.1. Nous avons

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho^2} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \right] = -\frac{2}{\rho^3} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 + \frac{1}{\rho^2} \int_{\partial B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \quad . \quad (\text{III.11})$$

Soit \bar{v} la moyenne de v sur $\partial B_\rho(p)$: $\bar{v} := |\partial B_\rho(p)|^{-1} \int_{\partial B_\rho(p)} v$.

On a donc

$$0 = \int_{B_\rho(p)} (v - \bar{v}) \Delta v = - \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 + \int_{\partial B_\rho(p)} (v - \bar{v}) \frac{\partial v}{\partial \rho} \quad .$$

Ceci implique

$$\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \leq \left(\frac{1}{\rho^2} \int_{\partial B_\rho(p)} |v - \bar{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B_\rho(p)} \left| \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{III.12})$$

En Fourier v s'écrit $v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ et $v - \bar{v} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n e^{in\theta}$.

On a donc

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho(p)} |v - \bar{v}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |a_n|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^2 |a_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 d\theta \quad .$$

En combinant cette dernière identité avec (III.12) on obtient donc

$$\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \leq \left(\int_{\partial B_\rho(p)} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B_\rho(p)} \left| \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{III.13})$$

En multipliant l'équation de laplace par $(x-x_p) \partial_x v + (y-y_p) \partial_y v$ et en intégrant par partie sur $B_\rho(p)$ on obtient l'**identité de Pohozaev** :

$$2 \int_{\partial B_\rho(p)} \left| \frac{\partial v}{\partial \rho} \right|^2 = \int_{\partial B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \quad . \quad (\text{III.14})$$

Cette identité combinée à (III.13) donne la positivité du membre de droite dans (III.11) et le lemme est démontré. \square

Suite de la preuve de la régularité. Daprès le lemme précédent on a

$$\int_{B_{\rho/2}(p)} |\nabla v|^2 \leq \frac{1}{4} \int_{B_\rho(p)} |\nabla v|^2 \quad . \quad (\text{III.15})$$

Comme $\Delta v = 0$ dans $B_\rho(p)$ et $\phi = 0$ sur $\partial B_\rho(p)$ on a

$$\int_{B_\rho(p)} \nabla v \cdot \nabla \phi = 0 \quad .$$

En combinant cette identité avec l'inégalité (III.15) précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_{\rho/2}(p)} |\nabla(v + \phi)|^2 &\leq \frac{1}{2} \int_{B_\rho(p)} |\nabla(v + \phi)|^2 \\ &+ 3 \int_{B_\rho(p)} |\nabla \phi|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

ce qui, avec (III.10), donne

$$\int_{B_{\rho/2}(p)} |\nabla u|^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 3 C_0 |H| \varepsilon_0 \right) \int_{B_\rho(p)} |\nabla u|^2 \quad . \quad (\text{III.17})$$

Ayant fixé à l'avance ε_0 suffisamment petit tel que $3 C_0 |H| \varepsilon_0 < 1/4$ on obtient finalement.

$$\int_{B_{\rho/2}(p)} |\nabla u|^2 \leq \frac{3}{4} \int_{B_\rho(p)} |\nabla u|^2 \quad . \quad (\text{III.18})$$

L'itération de cette inégalité donne l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $p \in B_{1/2}(0)$ et tout $r < \rho_0$

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \leq \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^\alpha \int_{D^2} |\nabla u|^2$$

Ce qui implique (III.9). La solution de l'équation à courbure moyenne constante est donc Hölder continue. On déduit de (III.9) et de l'équation (III.1) l'estimation

$$\sup_{\rho < 1/2, p \in B_{1/2}(0)} \rho^{-\alpha} \int_{B_\rho(p)} |\Delta u| < +\infty \quad . \quad (\text{III.19})$$

Une estimation classique sur les noyaux de Riesz donne que pour $p \in B_{1/4}(0)$, on a

$$|\nabla u|(p) \leq C \frac{1}{|x|} * \chi_{B_{1/2}} |\Delta u| + C$$

Où $\chi_{B_{1/2}}$ est la fonction caractéristique de la boule $B_{1/2}(0)$. En combinant cette identité avec les injections de Adams [Ad], on obtient que $u \in W^{1,q}(B_{1/4}(0))$ pour tout q satisfaisant $2/leq < (2-\alpha)/(1-\alpha)$. En reinjectant cette information dans l'équation (III.1) on obtient que $\Delta u \in L^r$ pour un $r > 1$. L'équation devient alors sous-critique dans cet espace et un argument de "bootstrap" classique donne que $u \in C^\infty$. Ce qui conclut la preuve de la régularité des solutions faibles de l'équation à courbure moyenne constante.

III.2 L'équation des applications harmoniques à valeur dans la sphère S^n .

Dans le cas où la variété d'arrivée N^n est de codimension 1 ($N^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$) l'équation des applications harmoniques (II.27) s'écrit - c.f. (II.31) -

$$-\Delta u = \nu(u) \nabla(\nu(u)) \cdot \nabla u \quad . \quad (\text{III.20})$$

où u à nouveau désigne le vecteur unité normale à la sous-variété N^n de \mathbb{R}^{n+1} de codimension 1. Dans le cas où cette sous-variété en particulier est la sphère S^n , $\nu(u) = u$ et donc l'équation devient

$$-\Delta u = u |\nabla u|^2 \quad . \quad (\text{III.21})$$

Une autre caractérisation de (III.21) est la suivante :

$u \in W^{1,2}(D^2, S^n)$ satisfait (III.21) si et seulement si

$$u \wedge \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2) \quad . \quad (\text{III.22})$$

En effet pour toute application u à valeur dans S^n on a

$$0 = \Delta \frac{|u|^2}{2} = \text{div}(u \nabla u) = |\nabla u|^2 + u \Delta u$$

ainsi donc Δu est parallèle à u - satisfait (III.22) - si et seulement si le coefficient de proportionalité est $-|\nabla u|^2$ ce qui est équivalent à (III.21). Il est intéressant de noter que (III.22) est équivalent à

$$\forall i, j = 1 \cdots n + 1 \quad \text{div}(u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i) = 0 \quad . \quad (\text{III.23})$$

- cette remarque a été faite par J. Shatah [Sha] -. Cette dernière formulation de l'équation des applications harmoniques à valeur dans la sphère S^n permet de passer aisément à la limite faible comme dans les structures en jacobiens de l'équation à courbure moyenne constante précédente.

La **régularité des applications harmoniques à valeur dans S^n** a été trouvée par F.Hélein, [He], et se démontre de la manière suivante.

Pour toute paire i, j dans $\{1 \cdots n + 1\}$ l'équation (III.23) implique que le champs de vecteur $u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i$ est un rotationnel et donc qu'il existe $B_j^i \in W^{1,2}$ tel que

$$\nabla^\perp B_j^i = u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i \quad .$$

L'équation (III.21) s'écrit en coordonnées

$$-\Delta u^i = \sum_{j=1}^{n+1} u^i \nabla u_j \cdot \nabla u^j \quad . \quad (\text{III.24})$$

On fait alors apparaître les champs $\nabla^\perp B_j^i$ dans le membre de droite de la manière suivante : on observe que

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_j \nabla u^i \cdot \nabla u^j = \nabla u^i \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{n+1} |u^j|^2 / 2 \right) = \nabla u^i \cdot \nabla |u|^2 / 2 = 0 \quad .$$

En soustrayant cette expression égale à zero dans le membre de droite, (III.24) peut alors s'écrire, pour tout $i = 1 \cdots n + 1$,

$$\begin{aligned} -\Delta u^i &= \sum_{j=1}^{n+1} \nabla^\perp B_j^i \cdot \nabla u^j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \partial_x B_j^i \partial_y u^j - \partial_y B_j^i \partial_x u^j \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

On reconnaît alors la forme que nous avons exploité pour démontrer la régularité des solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante : " Δu =somme de jacobiens". On peut alors suivre pas par pas chaque étape de cette preuve, l'adapter au cas présent et obtenir ainsi la régularité des *applications harmoniques* à valeur dans la sphère S^n .

III.3 La méthode des repères mobiles de F. Hélein et la régularité des applications harmoniques à valeurs dans une variété quelconque.

Lorsque la variété d'arrivée n'est plus une sphère (ou plus généralement un espace homogène), la structure en jacobien du second membre disparaît apparemment et les approches précédentes semblent ne plus pouvoir s'appliquer directement.

Afin d'étendre le résultat de régularité précédent au cas d'une variété d'arrivée quelconque, F. Hélein a introduit une méthode dite *méthodes des repères mobiles* qui vient compenser l'absence de symétrie globale de cette variété, apparemment à l'origine des structures en divergence (III.24) de l'équation, et exploiter des "symétries infinitésimales" en exprimant l'équation des *applications harmoniques* dans des repères mobiles privilégiés sur la variété d'arrivée, adaptés à l'application, dits *repères de Coulomb*.

Cette méthode, quoiqu'en apparence peut naturelle et un peu mystérieuse, s'est avérée très efficace par la suite dans d'autres problèmes de régularité et de compacité comme par exemple pour les solutions de l'équations des ondes non linéaires dite "wave maps" (voir [FMS],[ShS], [Tao1], [Tao2]...etc) et merite donc que l'on s'y arrête sachant qu'elle pourra être dépassées par la suite, au moins dans le cadre des questions que nous nous posons dans ce mini-cours.

Rappelons le théorème de F.Hélein.

Theorem III.2 [He] *Soit N^n une sous-variété fermée C^2 de \mathbb{R}^m . Soit u une application dans $W^{1,2}(D^2, N^n)$ satisfaisant l'équation des applications harmoniques (II.27) au sens faible. Alors u est $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha < 1$.*

Démonstration du théorème III.2 dans le cas où N^n est un tore bidimensionnel.

On présente la démonstration dans un cas particulier, celui d'une variété d'arrivée bidimensionnelle parallélisable - admettant un champs de repère tangent global - c'est à dire un tore T^2 plongé de façon quelconque dans un espace euclidien \mathbb{R}^m quelconque. Le but étant de présenter la *méthode des repères mobiles* dans le cadre le plus simple possible, sachant que le cas général se traite de façon très semblable une fois que l'on a "relevé" notre application harmonique u à valeur dans N^n en

une application, elle aussi harmonique, $J \circ u$, mais cette fois ci à valeur dans un tore $(S^1)^N$ qui est parallélisable¹¹.

On considère donc une application u dans $W^{1,2}(D^2, T^2)$ - $T^2 \subset \mathbb{R}^m$ - satisfaisant au sens faible (II.27). On muni T^2 d'un champs de repère tangent, régulier, orthonormal, positif et global. : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Soit $\tilde{e} := (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ la composition de ce repère avec u :

$$\tilde{e}_i(x, y) := \varepsilon_i(u(x, y)) \quad .$$

On cherche à optimiser cette application \tilde{e} de D^2 à valeur dans les champs de repères tangents à T^2 en minimisant sur toutes les applications $W^{1,2}$ de D^2 à valeur dans les rotations du plan $\mathbb{R}^2 \simeq T_{u(x,y)}T^2$ l'énergie suivante

$$\min_{\psi \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R})} \int_{D^2} |(e_1, \nabla e_2)|^2 dx dy \quad , \quad (\text{III.26})$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^m et

$$e_1(x, y) + ie_2(x, y) := e^{i\psi(x,y)} (\tilde{e}_1(x, y) + i\tilde{e}_2(x, y)) \quad .$$

L'idée est de chercher le champs de repère le plus régulier possible dans lequel on va écrire l'équation des applications harmoniques. Le problème variationnel (III.26) est bien posé et admet une solution dans $W^{1,2}$. En effet on a

$$|(e_1, \nabla e_2)|^2 = |\nabla\psi + (\tilde{e}_1, \nabla\tilde{e}_2)|^2 \quad .$$

Il existe donc un unique minimum dans $W^{1,2}$ qui satisfait

$$0 = \text{div}(\nabla\psi + (\tilde{e}_1, \nabla\tilde{e}_2)) = \text{div}((e_1, \nabla e_2)) \quad . \quad (\text{III.27})$$

A priori $(e_1, \nabla e_2)$ est juste dans L^2 mais en fait, grace à cette "sélection" particulière apportée par le problème variationnel

¹¹Ce travail de relèvement un peu technique est expliqué en détail dans [He] -lemme 4.1.2

(III.26) nous allons voir que ce champs de vecteur sur D^2 est dans $W^{1,1}$ qui s'injecte lui même continuellement dans L^2 en dimension deux¹². Le champs de vecteur $(e_1, \nabla e_2)$ étant de divergence nulle il existe une fonction $\phi \in W^{1,2}$ telle que

$$(e_1, \nabla e_2) = \nabla^\perp \phi \quad . \quad (\text{III.29})$$

Par ailleurs ϕ satisfait du fait de cette définition

$$-\Delta \phi = (\nabla e_1, \nabla^\perp e_2) = \sum_{j=1}^m \partial_y e_1^j \partial_x e_2^j - \partial_x e_1^j \partial_y e_2^j \quad . \quad (\text{III.30})$$

On observe que le second membre de cette équation élliptique est une combinaison linéaire de jacobien de fonctions dans $W^{1,2}$. Cette situation est formellement très similaires à celle que nous avons rencontré dans les 2 problèmes précédents de l'équation à courbure moyenne constante ainsi que de l'equation des applications harmoniques à valeur dans une sphère. Afin d'exploiter cette structure nous faisons appel à un nouveau théorème de l'intégrabilité par compensation qui vient étendre le théorème III.1 de H.Wente.

Theorem III.3 [CLMS] Soient a et b deux fonctions dans $W^{1,2}(D^2)$ et soit φ l'unique solution dans $W_0^{1,p}(D^2)$ - pour tout $1 \leq p < 2$ - de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a & \text{in } D^2 \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial D^2 \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

¹²En fait grace à un théorème de Luc Tartar - [Tar2] - nous savons que $W^{1,1}(D^2)$ s'injecte continuellement dans l'espace de Lorentz $L^{2,1}(D^2)$ dont le dual est l'espace L^2 -faible, ou $L^{2,\infty}(D^2)$, de Marcinkievicz dont nous avons rappelé précédemment la définition : voir (II.11). L'espace $L^{2,1}(D^2)$ est celui des fonctions mesurables f satisfaisant

$$\int_0^{+\infty} |\{p \in D^2 ; |f(p)| > \lambda\}|^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad . \quad (\text{III.28})$$

alors φ est dans $W^{2,1}$ et

$$\|\nabla^2\varphi\|_{L^1(D^2)} \leq C_1 \|\nabla a\|_{L^2(D^2)} \|\nabla b\|_{L^2(D^2)} \quad . \quad (\text{III.32})$$

où C_1 est une constante indépendante de a et b .¹³ \square

L'application de ce théorème à ϕ solution de (III.30) nous dit que $(e_1, \nabla e_2)$ est dans $W^{1,1}$.

Nous exprimons alors l'équation des *applications harmoniques* (II.27) dans ce *repère mobile* "plus régulier que les autres". (II.27) est équivalent à

$$\begin{cases} (\Delta u, e_1) = 0 \\ (\Delta u, e_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \partial_x u, \partial_y u &\in T_u N^n = \text{vec}\{e_1, e_2\} \\ (\nabla e_1, e_1) &= (\nabla e_2, e_2) = 0 \\ (\nabla e_1, e_2) + (e_1, \nabla e_2) &= 0 \end{aligned}$$

on obtient que (III.33) s'écrit

$$\begin{cases} \text{div}((e_1, \nabla u)) = -(\nabla e_2, e_1) \cdot (e_2, \nabla u) \\ \text{div}((e_2, \nabla u)) = (\nabla e_2, e_1) \cdot (e_1, \nabla u) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Par ailleurs on a

$$\begin{cases} \text{rot}((e_1, \nabla u)) = -(\nabla^\perp e_2, e_1) \cdot (e_2, \nabla u) \\ \text{rot}((e_2, \nabla u)) = (\nabla^\perp e_2, e_1) \cdot (e_1, \nabla u) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

¹³Ce résultat implique le théorème III.1 grâce à l'injection de Sobolev $W^{2,1}(D^2) \subset W^{1,2} \cap C^0$. Il a été précédé de 2 autres résultats intermédiaires : Le premier de L.Tartar, [Tar1] qui dit que la transformée de Fourier de $\nabla\varphi$ est dans l'espace de Lorentz $L^{2,1}$ - ce qui implique aussi le théorème III.1. L'autre de S.Müller, [Mul], qui démontre ce théorème III.3 sous l'hypothèse supplémentaire cependant que le jacobien $\partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a$ soit positif.

On procède à la décomposition de Hodge L^2 de $(e_1, \nabla u)$ ainsi que de $(e_2, \nabla u)$. Il existe donc C_1, C_2, D_1 et D_2 quatre fonctions $W^{1,2}$ telles que

$$(e_i, \nabla u) = \nabla C_i + \nabla^\perp D_i \quad .$$

On introduit $W = (C_1, C_2, D_1, D_2)$ et avec ces notations (III.34) et (III.35) se réécrit de la façon suivante

$$-\Delta W = \Omega \cdot \nabla W \quad , \quad (\text{III.36})$$

où Ω est le champ de vecteur à valeur dans les matrices 4×4 suivant

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^\perp \phi & 0 & -\nabla \phi \\ \nabla^\perp \phi & 0 & \nabla \phi & 0 \\ 0 & \nabla \phi & 0 & -\nabla^\perp \phi \\ -\nabla \phi & 0 & \nabla^\perp \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Comme $\phi \in W^{2,1}$ le théorème suivant - théorème III.4 - va nous dire que ∇W , et donc ∇u , est dans L^p pour un $p > 2$ ce qui, au moyen de l'opération de "bootstrap" déjà utilisée dans le cas de l'équation des surfaces à courbure moyenne constantes nous donneras que u est dans $W^{2,q}$ pour tout $q < +\infty$ ce qui impliquera le résultat recherché et le théorème III.2 est démontré dans le cas où la variété d'arrivée est un tore bidimensionnel. \square

Theorem III.4 Soit W une application dans $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n)$ du système linéaire suivant

$$-\Delta W = \Omega \cdot \nabla W \quad , \quad (\text{III.38})$$

où Ω est un champ de vecteur $W^{1,1}$ sur D^2 à valeur dans les matrices $n \times n$. Alors, il existe $p > 2$ tel que $W \in W^{1,p}(B_{1/2}(0))$ en particulier W est Hölder-continu^{14 15}. \square

Démonstration du théorème III.4.

Comme dans la démonstration de la régularité des solutions de l'équation à courbure moyenne constante, le but est ici aussi d'établir une estimation de type Morrey de la forme : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{p \in B_{1/2}(0) ; 0 < \rho < 1/4} \rho^{-\alpha} \int_{B_\rho(p)} |\Delta W| < +\infty \quad . \quad (\text{III.39})$$

Le résultat du théorème se déduit alors des inégalités d'Adams, [Ad], comme précédemment.

Soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe un rayon ρ_0 tel que pour tout $r < \rho_0$ et tout p dans $B_{1/2}(0)$

$$\|\Omega\|_{L^{2,1}(B_r(p))} < \varepsilon_0 \quad .$$

Où on a utilisé l'injection de $W^{1,1}$ dans l'espace de Lorentz $L^{2,1}$ mentionné précédemment.

Nous choisirons ε_0 suffisamment petit plus loin et nous considérons des rayons $r < \rho_0$. Dans $B_r(p)$ nous décomposons W

¹⁴L'optimalité du résultat précédent se mesure en considérant l'exemple de la section précédente $u = W = \log \log 1/r$. Dans cet exemple $\Omega = \nabla u$ manque d'être $W^{1,1}$ par le fait que

$$\int_0^1 \frac{dr}{r \log \frac{1}{r}} = +\infty \quad .$$

¹⁵L'hypothèse $\Omega \in W^{1,1}$ peut être remplacée par $\Omega \in L^{2,1}$

de la manière suivante : $W = \Phi + V$ où

$$\begin{cases} \Delta\Phi = \Omega \cdot \nabla W & \text{dans } B_r(p) \\ \Phi = 0 & \text{sur } \partial B_r(p) \end{cases} .$$

Un résultat classique des opérateurs de Riesz - voir [Ad] - donne l'existence d'une constante indépendante C_0 indépendante de r telle que

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi\|_{L^{2,\infty}(B_r(p))} &\leq C_0 \int_{B_r(p)} |\Omega \cdot \nabla W| \\ &\leq C_0 \|\Omega\|_{L^{2,1}(B_r(p))} \|\nabla W\|_{L^{2,\infty}(B_r(p))} \quad (\text{III.40}) \\ &\leq C_0 \varepsilon_0 \|\nabla W\|_{L^{2,\infty}(B_r(p))} \end{aligned}$$

Pour ce qui est de V , nous savons que cette application est harmonique et donc on peut lui appliquer le lemme III.1 qui nous dit que pour tout $0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned} \|\nabla V\|_{L^{2,\infty}(B_{\delta r}(p))}^2 &\leq \|\nabla V\|_{L^2(B_{\delta r}(p))}^2 \\ &\leq \left(\frac{4\delta}{3}\right)^2 \|\nabla V\|_{L^2(B_{3r/4}(p))}^2 \quad (\text{III.41}) \\ &\leq C_1 \left(\frac{4\delta}{3}\right)^2 \|\nabla V\|_{L^{2,\infty}(B_r(p))}^2 , \end{aligned}$$

où C_1 est une constante indépendante de r - la norme $L^{2,\infty}$ d'une fonction harmonique sur la boule unité contrôlant toutes les autres normes sur la boules de rayon $3/4$ -. ¹⁶

On choisit alors δ suffisamment petit et indépendant de r tel que $C_1 \left(\frac{4\delta}{3}\right)^2 < 1/16$. On choisit aussi ε_0 suffisamment petit tel que $C_0 \varepsilon_0 < 1/8$. En combinant (III.40) et (III.41) on obtient

¹⁶On observe ici l'intérêt de travailler avec des normes $L^{2,\infty}$ et $L^{2,1}$ du gradient qui ont les mêmes propriétés de changement d'échelles et n'engendrent pas des exposants en r différents dans les estimées lorsque r tend vers zero.

une inégalité de la forme suivante, valable pour tout $p \in B_{1/2}(0)$ et pour tout $r < \rho_0$

$$\|\nabla W\|_{L^{2,\infty}(B_{\delta r}(p))} \leq \frac{1}{2} \|\nabla W\|_{L^{2,\infty}(B_r(p))} \quad . \quad (\text{III.42})$$

Comme dans la preuve de la régularité des solutions de l'équation à courbure moyenne constante, l'itération d'une telle inégalité donne une estimée de la forme

$$\sup_{p \in B_{1/2}(0) ; 0 < \rho < 1/4} \rho^{-\alpha} \|\nabla W\|_{L^{2,\infty}(B_\rho(p))} < +\infty \quad . \quad (\text{III.43})$$

En utilisant à nouveau la dualité $L^{2,1} - L^{2,\infty}$, ainsi que la majoration de $\|\Omega\|_{L^{2,1}(D^2)}$, (III.43) donne

$$\sup_{p \in B_{1/2}(0) ; 0 < \rho < 1/4} \rho^{-\alpha} \|\Omega \cdot \nabla W\|_{L^1(B_\rho(p))} < +\infty \quad , \quad (\text{III.44})$$

ce qui donne (III.39) et le théorème est démontré. \square

IV Les systèmes de Schrödinger à potentiels antisymétriques et la démonstration de la conjecture d'Hildebrandt.

Les méthodes que nous avons utilisé jusqu'à présent pour approcher la conjecture d'Hildebrandt et démontrer la régularité des solutions $W^{1,2}$ du système général

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) \quad (\text{IV.1})$$

reposent sur deux idées principales

- i) écrire si possible les termes non-linéaires quadratiques sous forme de combinaisons linéaire de jacobiens - ou *formes nulles*.
- ii) projeter l'équation (IV.1) sur un *repère mobile* $(e_1 \cdots e_n)$ satisfaisant la *condition de Coulomb*

$$\forall i, j = 1 \cdots m \quad \text{div}((e_j, \nabla e_i)) = 0 \quad .$$

Ces deux approches combinées permettent de prouver la régularité Hölder des solutions $W^{1,2}$ de (IV.1) lorsque la sous-variété N^n est C^2 et lorsque la courbure moyenne prescrite H est Lipschitz - voir [Bet1], [Cho] et aussi [He]. Cela semble être les hypothèses minimales exploitables pour ce type de stratégie.

Notons qu'afin de démontrer la conjecture d'Hildebrandt il faut être capable de relaxer l'hypothèse sur H d'être Lipschitz à être L^∞ seulement !

Malgrès son élégance certaine et son efficacité prouvée, un fort désavantage de la *méthode des repères mobiles* est sa relative opacité : ¹⁷

¹⁷Un autre désavantage des repères mobiles tient au fait que l'opération qui consiste à transformer l'application harmonique d'un domaine de dimension plus grande que deux à

Qu'y a-t-il de si spécial et de plus favorable aux questions de régularité et de compacité dans une non-linéarité de la forme

$$A(u)(\nabla u, \nabla u) - H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) \quad ,$$

par rapport à la non-linéarité du contre-exemple de la première partie

$$|\nabla u|^2 \quad ?$$

- qui paraît bien plus simple à première vue ! -

Les repères mobiles ne répondent pas vraiment à cette question.

Considérons une application faiblement harmonique, d'énergie finie, de D^2 dans une sous-variété N^n régulière fermée, orientée, de codimension 1 quelconque de \mathbb{R}^{n+1} . Nous avons vu à la fin de la section 2 que l'équation s'écrit

$$-\Delta u = \nu(u) \nabla(\nu(u)) \cdot \nabla u \quad . \quad (\text{IV.2})$$

où ν est le vecteur unité normal à N^n correspondant à l'orientation de N^n .

En coordonnées l'équation (IV.2) s'écrit encore : pour tout $i = 1 \dots n + 1$

$$-\Delta u^i = \nu(u)^i \sum_{j=1}^{n+1} \nabla(\nu(u))_j \cdot \nabla u^j \quad . \quad (\text{IV.3})$$

On peut alors essayer d'adapter à ce cas plus général l'opération effectuée par F. Hélein pour passer de (III.24) à (III.25). La première étape se généralise en effet : du fait que ∇u est perpendiculaire à $\nu(u)$ on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} \nu_j(u) \nabla u^j = 0 \quad .$$

valeur dans une variété N^n en une application harmonique dans une variété parallélisable $(S^1)^q$ requiert que N^n ait une régularité plus élevée, C^5 , que la régularité naturelle C^2 . C'est sous cette hypothèse plus forte C^5 que l'hypothèse naturelle C^2 qu'a été prouvé la régularité partielle des applications harmoniques - voir [Bet2] et [He] à nouveau. - avant l'introduction des systèmes de Schrödinger à potentiels anti-symétriques dans ce contexte - voir [RiSt].

En insérant cette identité dans (IV.4) on obtient que l'équation des *applications harmoniques* à valeur dans N^n s'écrit

$$-\Delta u^i = \sum_{j=1}^{n+1} (\nu(u)^i \nabla(\nu(u))_j - \nu(u)_j \nabla(\nu(u))^i) \cdot \nabla u^j \quad . \quad (\text{IV.4})$$

La deuxième étape par contre ne se généralise pas *a-priori* : il n'y a pas de raison pour laquelle le champs de vecteur

$$\nu(u)^i \nabla(\nu(u))_j - \nu(u)_j \nabla(\nu(u))^i$$

soit à divergence nulle. C'était le cas lorsque N^n était une sphère mais cela disparaît aussitôt dès que l'on change, même très légèrement la métrique. Ce qui reste par contre et qui est totalement robuste c'est l'antisymétrie de la matrice

$$\Omega := (\nu(u)^i \nabla(\nu(u))_j - \nu(u)_j \nabla(\nu(u))^i)_{i,j=1 \dots n+1} \quad . \quad (\text{IV.5})$$

Cette antisymétrie est en fait la clé du problème que nous nous posons depuis le début de ce mini-cours. Nous avons le théorème suivant.

Theorem IV.1 [Riv1] *Soit Ω un champs de vecteur L^2 sur D^2 à valeur dans les matrices antisymétriques - c.a.d. $\Omega \in L^2(\wedge^1 D^2 \otimes so(m))$. Soit u une application dans $W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ satisfaisant l'équation¹⁸*

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2) \quad . \quad (\text{IV.6})$$

alors il existe $p > 2$ tel que $u \in W_{loc}^{1,p}(D^2, \mathbb{R}^m)$, en particulier u est Hölder continue. □

¹⁸En coordonnées l'équation s'écrit aussi : pour tout $i = 1 \dots m$

$$-\Delta u^i = \sum_{j=1}^m \Omega_j^i \cdot \nabla u^j \quad .$$

Avant de démontrer ce théorème nous observons déjà quelques conséquences dans le cadre des questions que nous nous sommes posées.

On voit bien déjà que le théorème IV.1 s'applique à l'équation (IV.4) et donne la régularité des *applications harmoniques* à valeur dans une variété de codimension 1.

Une autre application assez directe du théorème IV.1 concerne les solutions de l'équation à courbure moyenne prescrite dans \mathbb{R}^3

$$\Delta u = 2H(u) \partial_x u \times \partial_y u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(D^2) \quad .$$

Cette équation se réécrit sous la forme

$$\Delta u = H(u) \nabla^\perp u \times \nabla u \quad ,$$

On introduit alors

$$\Omega := H(u) \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^\perp u_3 & \nabla^\perp u_2 \\ \nabla^\perp u_3 & 0 & -\nabla^\perp u_1 \\ -\nabla^\perp u_2 & \nabla^\perp u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on observe successivement que Ω est antisymétrique, que si H est supposé être dans L^∞ alors Ω est dans L^2 et enfin que, pour cette notation, u satisfait l'équation (IV.6). Les hypothèses du théorème IV.1 sont toutes satisfaites et donc u est en particulier Hölder continu.

On mesure déjà par cet exemple l'efficacité du théorème IV.1 dans le cadre de la conjecture d'Hildebrandt . On a pu passer de l'hypothèse $H \in W^{1,\infty}$ présente dans les travaux précédents - [Hei1], [Hei2], [Gr2], [Bet1] ...- à l'hypothèse "minimale" - correspondant à la conjecture d'Hildebrandt - : $H \in L^\infty$.

En fait, la conjecture d'Hildebrandt est complètement résolue grace au théorème suivant

Theorem IV.2 [Riv1] Soit N^n une sous-variété de \mathbb{R}^m - $1 \leq n < m$ quelconques - supposée fermée, orientée et de régularité C^2 . Soit ω une 2-forme C^1 sur N^n . Soit u , enfin, un point critique $W^{1,2}(D^2, N^n)$ de l'énergie

$$E^\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2(x, y) dx dy + u^* \omega \quad .$$

Alors u satisfait toutes les hypothèses du théorème IV.1 et est donc Hölder continue. \square

Preuve du théorème IV.2.

Les points critiques de E^ω satisfont l'équation (II.26) qui s'écrit en coordonnées de la façon suivante : pour tout $i = 1 \cdots m$

$$\Delta u^i = - \sum_{j,k=1}^m H_{jk}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j - \sum_{j,k=1}^m A_{jk}^i(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^j \quad . \quad (\text{IV.7})$$

Dans un premier temps on observe que, comme

$$H_{jk}^i(z) = d\omega_z(\varepsilon_i, \varepsilon_j \varepsilon_k)$$

- où $(\varepsilon_i)_{i=1 \cdots m}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^m -, l'antisymétrie de la 3-forme $d\omega$ donne pour tout $z \in \mathbb{R}^m$ $H_{jk}^i(z) = -H_{ik}^j(z)$. (IV.7) s'écrit alors

$$\Delta u^i = - \sum_{j,k=1}^m (H_{jk}^i(u) - H_{ik}^j(u)) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j - \sum_{j,k=1}^m A_{jk}^i(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^j \quad . \quad (\text{IV.8})$$

On observe par ailleurs que comme $A(u)(U, V)$ est orthogonal au plan tangent pour tout choix de vecteurs U et V ¹⁹ . On a

¹⁹Normalement A est défini pour le choix d'une paire de vecteurs tangent à la surface. Cependant on peut étendre A sur N^n à toutes les paires de vecteurs de \mathbb{R}^m en prenant le pull-back par la projection sur N^n qui est bien défini dans un voisinage de N^n

donc en particulier pour tout $i, k = 1 \cdots m$

$$\sum_{j=1}^m A_{ik}^j \nabla u^j = 0 \quad . \quad (\text{IV.9})$$

On insère cette identité dans (IV.8) qui devient

$$\begin{aligned} \Delta u^i &= - \sum_{j,k=1}^m (H_{jk}^i(u) - H_{ik}^j(u)) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^j \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^m (A_{jk}^i(u) - A_{ik}^j(u)) \nabla u^k \cdot \nabla u^j \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

La matrice $m \times m$ $\Omega := (\Omega_j^i)_{i,j=1 \dots m}$ définie par

$$\Omega_j^i := \sum_{k=1}^m (H_{jk}^i(u) - H_{ik}^j(u)) \nabla^\perp u^k + \sum_{k=1}^m (A_{jk}^i(u) - A_{ik}^j(u)) \nabla u^k \quad ,$$

est clairement antisymétrique et dans L^2 . Avec cette notation, l'équation (IV.10) s'écrit sous la forme (IV.6) et donc toutes les hypothèses du théorème IV.1 sont satisfaites, ce qui conclut la démonstration du théorème IV.2. \square

Des lois de conservation pour les systèmes de Schrödinger à potentiels antisymétriques.

Il nous reste donc à démontrer le théorème IV.1. Pour cela nous allons écrire les systèmes de Schrödinger à potentiels antisymétriques sous forme de *Lois de conservations*. Nous avons le résultat suivant.

Theorem IV.3 [*Riv1*] *Soit Ω un champs de vecteur L^2 sur D^2 à valeur dans les matrices $m \times m$ antisymétriques. Soient A et B deux applications $W^{1,2}$ de D^2 à valeur dans les matrices carrées $m \times m$ et satisfaisant l'équation*

$$\nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B \quad . \quad (\text{IV.11})$$

Si A est inversible presque partout et si on a la majoration

$$\|A\|_{L^\infty(D^2)} + \|A^{-1}\|_{L^\infty(D^2)} < +\infty \quad , \quad (\text{IV.12})$$

alors u satisfait le système de Schrödinger (IV.6) si et seulement si la loi de conservation suivante est satisfaite

$$\operatorname{div}(A\nabla u - B\nabla^\perp u) = 0 \quad . \quad (\text{IV.13})$$

Si u satisfait une telle loi, (IV.13), pour A et B dans $W^{1,2}$ et A satisfaisant (IV.12), alors il existe $p > 2$ tel que $u \in W_{loc}^{1,p}(D^2, \mathbb{R}^m)$ et u est donc Hölder-continue dans l'intérieur de D^2 . \square

On peut observer que la loi de conservation (IV.13), si elle existe, vient généraliser les lois de conservation des problèmes avec symétries de la section précédente :

1) Dans le cas de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, (III.1), celle-ci est équivalente à la loi de conservation (IV.13) pour

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad ,$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -H u_3 & H u_2 \\ H u_3 & 0 & -H u_1 \\ -H u_2 & H u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Dans le cas de l'équation des applications harmoniques à valeur dans S^n , (III.25), celle-ci est équivalente à la loi de conservation (IV.13) pour

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad ,$$

et $B = (B_j^i)$

$$\nabla^\perp B_j^i = u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i \quad .$$

La dernière partie de ce mini-cours consistera à construire A et B pour tout Ω antisymétrique de norme L^2 suffisamment petite - voir théorème IV.4 plus bas. Ainsi donc en particulier toutes les équations d'Euler des lagrangiens coercifs, quadratiques et invariants conforme peuvent s'écrire sous forme divergence. Ce fait est tout à fait surprenant. En effet dans les 2 cas précédents, de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante et de l'équation des applications harmoniques à valeur dans S^n , la formulation en divergence était aussi obtenu comme conséquence du théorème de Noether - qui dit grosso-modo qu'à chaque symétrie d'un lagrangien correspond une quantité conservée c'est à dire à divergence nulle -. Dans ces deux cas particuliers les symétries sont claires les deux lagrangiens sont invariants par l'action des isométries de l'espace d'arrivée \mathbb{R}^m . On est en droit de se demander alors la question suivante : **de quelles symétries "cachées" provient la formulation en divergence générale (IV.13) ?** Ce mini-cours laisse en suspend cette question.

Avant donc de construire A et B dans le cas général nous démontrons le théorème IV.3.

Démonstration du théorème IV.3.

La première partie du théorème est la conséquence du calcul simple suivant.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(A \nabla u - B \nabla^\perp u) &= A \Delta u + \nabla A \cdot \nabla u - \nabla B \cdot \nabla^\perp u \\
 &= A \Delta u + (\nabla A + \nabla^\perp B) \cdot \nabla u \\
 &= A(\Delta u + \Omega \cdot \nabla u) = 0
 \end{aligned}$$

La question de la régularité se règle comme suit. Comme dans les problèmes précédents on cherche à établir une estimation de

Morrey de la forme il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{p \in B_{1/2}(0) ; 0 < \rho < 1/4} \rho^{-\alpha} \int_{B_\rho(p)} |\Delta u| < +\infty \quad . \quad (\text{IV.14})$$

Le résultat du théorème se déduit alors des inégalités d'Adams, [Ad], comme précédemment.

Soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe un rayon ρ_0 tel que pour tout $r < \rho_0$ et tout p dans $B_{1/2}(0)$

$$\int_{B_r(p)} |\nabla A|^2 + |\nabla B|^2 < \varepsilon_0 \quad . \quad (\text{IV.15})$$

Nous choisirons ε_0 suffisamment petit plus loin et nous considérons des rayons $r < \rho_0$.

On observe que $A\nabla u$ satisfait le système elliptique suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla u) = \nabla B \cdot \nabla^\perp u = \partial_y B \partial_x u - \partial_x B \partial_y u \\ \operatorname{rot}(A\nabla u) = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u = \partial_x A \partial_y u - \partial_y A \partial_x u \end{cases}$$

On procède alors sur $B_r(p)$ à la *décomposition de Hodge linéaire* L^2 de $A\nabla u$ suivante : il existe deux fonctions C et D -uniques modulo des constantes - respectivement dans dans $W_0^{1,2}(B_r(p))$ et $W^{1,2}(B_r(p))$ telles que

$$A\nabla u = \nabla C + \nabla^\perp D \quad . \quad (\text{IV.16})$$

En effet on résoud, dans un premier temps l'équation

$$\begin{cases} \Delta C = \operatorname{div}(A\nabla u) = \partial_y B \partial_x u - \partial_x B \partial_y u \\ C = 0 \quad . \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Le théorème de Wente (III.1) nous dit que C est dans $W^{1,2}$ et que

$$\int_{D^2} |\nabla C|^2 \leq C_0 \int_{D^2} |\nabla B|^2 \int_{D^2} |\nabla u|^2 \quad . \quad (\text{IV.18})$$

Par construction $\operatorname{div}(A\nabla u - \nabla C) = 0$, le lemme de Poincaré, dans un deuxième temps, nous donne donc l'existence de D dans $W^{1,2}$ tel que $\nabla^\perp D := A\nabla u - \nabla C$ et satisfaisant

$$\begin{aligned} \int_{D^2} |\nabla D|^2 &\leq 2 \int_{D^2} |A\nabla u|^2 + |\nabla C|^2 \\ &\leq 2\|A\|_\infty \int_{D^2} |\nabla u|^2 + 2C_0 \int_{D^2} |\nabla B|^2 \int_{D^2} |\nabla u|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

D satisfait l'équation suivante

$$\Delta D = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u = \partial_x A \partial_y u - \partial_y A \partial_x u \quad .$$

Exactement comme dans la preuve plus haut de la régularité des solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, on décompose $D = \phi + v$ où ϕ satisfait

$$\begin{cases} \Delta \phi = \partial_x A \partial_y u - \partial_y A \partial_x u & \text{dans } B_r(p) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B_r(p) \end{cases} \quad , \quad (\text{IV.20})$$

et où v est harmonique. A nouveau par le théorème III.1 de Wente nous avons pour ϕ l'ésimation suivante

$$\int_{B_r(p)} |\nabla \phi|^2 \leq C_0 \int_{B_r(p)} |\nabla A|^2 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \quad . \quad (\text{IV.21})$$

Les arguments de la démonstration de la régularité des solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante s'appliquent exactement ici afin de démontrer l'équivalent de (III.16) mais sur une boule $B_{\delta r}(p)$ où $0 < \delta < 1$ sera choisi plus loin. Précisément nous avons

$$\begin{aligned} \int_{B_{\delta r}(p)} |\nabla D|^2 &\leq 2\delta^2 \int_{B_r(p)} |\nabla D|^2 \\ &\quad + 3 \int_{B_r(p)} |\nabla \phi|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

En combinant (IV.15), (IV.18), (IV.19), (IV.21) et (IV.22) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_{\delta r}(p)} |A \nabla u|^2 &\leq 3\delta^2 \int_{B_r(p)} |A \nabla u|^2 \\ &+ C_1 \varepsilon_0 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

En utilisant l'hypothèse sur les majorations L^∞ de A et de A^{-1} , on déduit de (IV.23) l'inégalité suivante. Pour tout $1 > \delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_{B_{\delta r}(p)} |\nabla u|^2 &\leq 3\|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \delta^2 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \\ &+ C_1 \|A^{-1}\|_\infty \varepsilon_0 \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

On choisit désormais ε_0 et δ strictement positifs et indépendants de r et p tels que

$$3\|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \delta^2 + C_1 \|A^{-1}\|_\infty \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \quad .$$

Pour ce choix de δ on a donc obtenu l'inégalité suivante

$$\int_{B_{\delta r}(p)} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \quad .$$

L'itération de cette inégalité comme dans les démonstrations des résultats de régularité précédents donne l'existence de $\alpha > 0$ pour lequel

$$\sup_{p \in B_{1/2}(0) ; 0 < \rho < 1/4} \rho^{-2\alpha} \int_{B_\rho(p)} |\nabla u|^2 < +\infty \quad .$$

Comme $|\Delta u| \leq |\Omega| |\nabla u|$, l'inégalité précédente donne (IV.14) et le théorème IV.3 est démontré. \square

Il nous reste à démontrer l'existence de A et B dans $W^{1,2}$ satisfaisant l'équation (IV.11) et l'hypothèse (IV.12).

La construction des lois de conservations pour les systèmes à potentiels antisymétriques et la démonstration du théorème IV.1.

Le théorème suivant combiné avec le théorème IV.3 donne le théorème IV.1 qui lui même implique le théorème IV.2 et donne en particulier une démonstration de la conjecture d'Hildebrandt.

Theorem IV.4 [Riv1] *Il existe une constante $\varepsilon_0(m) > 0$ ne dépendant que de l'entier m telle que, pour tout champ de vecteur L^2 , Ω , sur D^2 à valeur dans, $so(m)$, l'espace des matrices carrées $m \times m$ antisymétriques satisfaisant*

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon_0(m) \quad , \quad (\text{IV.25})$$

on peut construire $A \in L^\infty(D^2, Gl_m(\mathbb{R})) \cap W^{1,2}$ et $B \in W^{1,2}(D^2, M_m(\mathbb{R}))$ satisfaisant

i)

$$\int_{D^2} |\nabla A|^2 + \|dist(A, SO(m))\|_{L^\infty(D^2)} \leq C(m) \int_{D^2} |\Omega|^2 \quad , \quad (\text{IV.26})$$

ii)

$$\int_{D^2} |\nabla B|^2 \leq C(m) \int_{D^2} |\Omega|^2 \quad , \quad (\text{IV.27})$$

iii)

$$\nabla_\Omega A := \nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B \quad (\text{IV.28})$$

où $C(m)$ est une constante ne dépendant que de la dimension m des matrices. \square

Avant de passer à la preuve du théorème IV.4 proprement dite nous faisons tout d'abord quelques commentaires.

A la lecture du théorème une première question naturelle se pose : **Pourquoi l'antisymétrie de Ω est-elle importante ?**

On peut le comprendre de la façon suivante.

Dans le cas simple où Ω est à **divergence nulle** Ω s'écrit alors

$$\Omega = \nabla^\perp \xi \quad ,$$

où ξ est une application $W^{1,2}$ à valeur dans les matrices antisymétriques. En choisissant donc

i)

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad .$$

et

ii)

$$B_{ij} = \xi_{ij}$$

on a une solution du problème.

Dans le cas général on cherche naturellement à se "rapprocher" le plus possible du cas simple précédent. Une première tentative est de procéder à une **décomposition de Hodge linéaire** L^2 de Ω . C'est à dire il existe ξ et P dans $W^{1,2}$ tels que

$$\Omega = \nabla^\perp \xi - \nabla P \quad . \quad (\text{IV.29})$$

Si A existe il satisfait une équation de la forme

$$\Delta A = \nabla A \cdot \nabla^\perp \xi - \text{div}(A \nabla P) \quad . \quad (\text{IV.30})$$

Une telle équation est critique dans $W^{1,2}$. Cependant, autant le terme $\nabla A \cdot \nabla^\perp \xi$ - qui est une combinaison linéaire de jacobiens de fonctions a-priori dans $W^{1,2}$ - est très favorable, en invoquant le théorème III.1 de Wente, pour rendre cette équation "bootstrappable" dans $W^{1,2}$ autant le terme $\text{div}(A \nabla P)$ n'est pas favorable

car $W^{1,2}(D^2)$ ne s'injecte pas dans L^∞ et donc $A\nabla P$ ne serait pas dans L^2 *a-priori*...etc.

L'idée est donc de se "rapprocher" du cas simple à divergence nulle en exploitant la **structure antisymétrique** de Ω et en procédant à une **décomposition de Hodge non-linéaire**²⁰ L^2 de Ω .

C'est à dire il existe ξ application $W^{1,2}$ à valeur dans les matrices antisymétriques et une application P à valeur dans le groupe des rotations de \mathbb{R}^m , $SO(m)$, satisfaisant

$$\Omega = P \nabla^\perp \xi P^{-1} - \nabla P P^{-1} \quad . \quad (\text{IV.31})$$

L'avantage de (IV.31) par rapport à (IV.30) n'est pas évident *a-priori*. On s'est apparemment un peu compliqué la vie avec les multiplications à gauche et à droite par P et P^{-1} . Cela dit l'avantage certain de (IV.31) par rapport à (IV.30) est que, P étant une rotation dans le deuxième cas, cette application n'est pas seulement dans $W^{1,2}$ mais dans $W^{1,2} \cap L^\infty$ - une rotation est toujours bornée ! Nous allons exploiter naturellement ce petit gain de régularité. Un deuxième avantage de la décomposition non-linéaire (IV.31) pour notre problème par rapport à (IV.30) se voit comme suit. Si A et B sont des solutions de (IV.28) alors on observe que

$$\begin{aligned} \nabla_{\nabla^\perp \xi}(AP) &= \nabla(AP) - (AP) \nabla^\perp \xi \\ &= \nabla A P + A \nabla P - A P (P^{-1} \Omega P + P^{-1} \nabla P) \\ &= (\nabla_\Omega A) P = -\nabla^\perp B P \quad . \end{aligned}$$

Si donc on introduit $\tilde{A} := AP$, \tilde{A} satisfait

$$\Delta \tilde{A} = \nabla \tilde{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P \quad . \quad (\text{IV.32})$$

²⁰qui s'interprète aussi comme un **changement de Jauge** de Ω que l'on voit comme une connection pour le fibré trivial sur D^2 avec comme groupe de structure $SO(m)$.

Contrairement à (IV.30), le membre de droite de (IV.32) est une combinaison linéaire de jacobiens d'applications qui sont *a-priori* dans $W^{1,2}$. On obtient donc, grace au théorème III.1, un contrôle *a-priori* de \tilde{A} dans $L^\infty \cap W^{1,2}$. Le système va donc être "bootstrappable" cette fois.

L'existence de la *décomposition de Hodge non-linéaire* L^2 est donnée par le résultat de K.Uhlenbeck²¹ suivant.

Theorem IV.5 [Uhl], [Riv1] *Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe $\varepsilon(m) > 0$ et une constante $C(m) > 0$ telles que pour tout champ de vecteur, Ω, L^2 sur le disque D^2 à valeur dans dans l'espace $so(m)$ des matrices $m \times m$ antisymétriques et satisfaisant*

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon(m) \quad ,$$

il existe $\xi \in W^{1,2}(D^2, so(m))$ et $P \in W^{1,2}(D^2, SO(m))$ tels que

$$\Omega = P \nabla^\perp \xi P^{-1} - \nabla P P^{-1} \quad . \quad (\text{IV.33})$$

$$\xi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D^2 \quad (\text{IV.34})$$

et

$$\int_{D^2} |\nabla \xi|^2 + \int_{D^2} |\nabla P|^2 \leq C(m) \int_{D^2} |\Omega|^2 \quad . \quad (\text{IV.35})$$

□

Démonstration du théorème IV.4.

On considère P et ξ donnés par le théorème précédent. Pour toute application $A \in L^\infty \cap W^{1,2}(D^2, M_m(\mathbb{R}))$ on note $\tilde{A} = AP$. Soient A et B des solutions de (IV.28), alors \tilde{A} et B satisfont le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{A} = \nabla \tilde{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P \\ \Delta B = -\text{div}(\tilde{A} \nabla \xi P^{-1}) + \nabla^\perp \tilde{A} \cdot \nabla P^{-1} \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

²¹Ce résultat n'apparaît pas explicitement dans [Uhl] mais nous expliquons dans l'appendice de [Riv1] comment le déduire de l'approche d'Uhlenbeck.

Naturellement on introduit alors le système elliptique linéaire inversible suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{A} = \nabla \hat{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp \hat{B} \cdot \nabla P \\ \Delta B = -\operatorname{div}(\hat{A} \nabla \xi P^{-1}) + \nabla^\perp \hat{A} \cdot \nabla P^{-1} \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{et} \quad B = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D^2 \\ \int_{D^2} \tilde{A} = \pi^2 \operatorname{Id}_m \end{array} \right. \quad (\text{IV.37})$$

où \hat{A} et \hat{B} sont des données arbitraires respectivement dans $L^\infty \cap W^{1,2}$ et $W^{1,2}$. Grace à l'équivalent du théorème III.1 pour les données au bord de Neuman²² à la place de Dirichlet, on obtient les estimées suivantes pour l'unique solution (\tilde{A}, B) de (IV.37)

$$\begin{aligned} \int_{D^2} |\nabla \tilde{A}|^2 + \|\tilde{A} - \operatorname{Id}_m\|_\infty^2 &\leq C \int_{D^2} |\nabla \hat{A}|^2 \int_{D^2} |\nabla \xi|^2 \\ &+ C \int_{D^2} |\nabla \hat{B}|^2 \int_{D^2} |\nabla P|^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{D^2} |\nabla(\tilde{B} - B_0)|^2 &\leq C \|\hat{A} - \operatorname{Id}_m\|_\infty^2 \int_{D^2} |\nabla \xi|^2 \\ &+ C \int_{D^2} |\nabla \hat{A}|^2 \int_{D^2} |\nabla P|^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

où B_0 est la solution $W^{1,2}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta B_0 = -\operatorname{div}(\nabla \xi P^{-1}) \quad \text{dans} \quad D^2 \\ B_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D^2 \end{array} \right. \quad (\text{IV.40})$$

²²On laisse la démonstration de ce théorème en exercice.

Si donc

$$\int_{D^2} |\nabla P|^2 + |\nabla \xi|^2$$

est suffisamment petit - ce qui peut être garanti, au vu de l'estimée (IV.35), en prenant $\int_{D^2} |\Omega|^2$ majoré par une constante $\varepsilon_0(m)$ suffisamment petite - alors un argument de point fixe élémentaire dans l'espace $L^\infty \cap W^{1,2}(D^2, M_m(\mathbb{R})) \times W^{1,2}(D^2, M_m(\mathbb{R}))$ donne l'existence d'une solution (\tilde{A}, B) du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{A} = \nabla \tilde{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P \\ \Delta B = -\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla \xi P^{-1}) + \nabla^\perp \tilde{A} \cdot \nabla P^{-1} \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{et} \quad B = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D^2 \\ \int_{D^2} \tilde{A} = \pi^2 \operatorname{Id}_m \end{array} \right. \quad (\text{IV.41})$$

Par construction cette solution (\tilde{A}, B) satisfait les majorations (IV.26) et (IV.27) - avec $A = \tilde{A} P^{-1}$.

On vérifie maintenant que (A, B) est une solution de (IV.28) ce qui terminera la preuve du théorème IV.4.

On procède pour cela à la *décomposition de Hodge linéaire* L^2 suivante

$$\nabla \tilde{A} - \tilde{A} \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B P = \nabla C + \nabla^\perp D$$

où $C = 0$ sur ∂D^2 . La première équation de (IV.41) nous dit que $\Delta C = 0$ et donc $C \equiv 0$ sur D^2 . La deuxième équation et les conditions au bord de (IV.41) nous disent que D satisfait l'équation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\nabla D P^{-1}) = 0 \quad \text{dans} \quad \partial D^2 \\ D = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D^2 \end{array} \right. . \quad (\text{IV.42})$$

Il existe donc $E \in W^{1,2}(D^2, M_n(\mathbb{R}))$ tel que $\nabla D P^{-1} = \nabla^\perp E$ et E satisfait

$$\begin{cases} -\Delta E = \nabla^\perp D \cdot \nabla P^{-1} & \text{dans } D^2 \\ \frac{\partial E}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

La version "Neuman" du théorème III.1 donne l'estimation

$$\int_{D^2} |\nabla E| \leq C_0 \int_{D^2} |\nabla D|^2 \int_{D^2} |\nabla P^{-1}|^2 \quad . \quad (\text{IV.44})$$

Cependant $\nabla D = \nabla^\perp E P$ donc en particulier $|\nabla D| \leq |\nabla E|$. En insérant cette inégalité dans (IV.44) on obtient que pour $\int_{D^2} |\nabla P|^2$ choisi suffisamment petit - et donc pour $\varepsilon_0(m)$ choisi suffisamment petit dans (IV.25) - $D \equiv 0$ ce qui implique finalement que

$$\nabla \tilde{A} - \tilde{A} \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B P = 0 \quad \text{dans } D^2 \quad ,$$

et le théorème IV.4 est démontré. \square

V Conclusion.

References

- [Ad] Adams, David R. "A note on Riesz potentials." *Duke Math. J.* 42 (1975), no. 4, 765–778.
- [Bet1] Bethuel, Fabrice "Un rsultat de rgularit pour les solutions de l'equation de surfaces courbure moyenne prescrite." (French) [A regularity result for solutions to the equation of surfaces of prescribed mean curvature] *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.* 314 (1992), no. 13, 1003–1007.
- [Bet2] Bethuel, Fabrice "On the singular set of stationary harmonic maps." *Manuscripta Math.* 78 (1993), no. 4, 417–443.
- [Cho] Choné, Philippe "A regularity result for critical points of conformally invariant functionals." *Potential Anal.* 4 (1995), no. 3, 269–296.
- [CLMS] Coifman, R.; Lions, P.-L.; Meyer, Y.; Semmes, S. "Compensated compactness and Hardy spaces". *J. Math. Pures Appl.* (9) 72 (1993), no. 3, 247–286.
- [Ev] Evans Craig "Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres" *Arch. Rat. Mech. Anal.* 116 (1991), 101–113.
- [Fre] Frehse, Jens "A discontinuous solution of a mildly nonlinear elliptic system". *Math. Z.* 134 (1973), 229–230.
- [FMS] Freire, Alexandre; Müller, Stefan; Struwe, Michael "Weak convergence of wave maps from $(1 + 2)$ -dimensional Minkowski space to Riemannian manifolds." *Invent. Math.* 130 (1997), no. 3, 589–617.
- [Ge] Y.Ge "Estimations of the best constant involving the L^2 norm in Wente's inequality and compact H -Surfaces in Euclidian space." *C.O.C.V.*, 3, (1998), 263–300.

- [Gi] Giaquinta, Mariano "Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems." *Annals of Mathematics Studies*, 105. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
- [Gr] Grüter, Michael "Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities." *Manuscripta Math.* 47 (1984), no. 1-3, 85–104.
- [Gr2] Grüter, Michael "Regularity of weak H -surfaces". *J. Reine Angew. Math.* 329 (1981), 1–15.
- [Hei1] Heinz, Erhard "Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme". (German) *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1975, no. 1, 1–13.
- [Hei2] Heinz, Erhard "Über die Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme". (German) [On the regularity of weak solutions of nonlinear elliptic systems] *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1986, no. 1, 1–15.
- [He] F.Hélein "Harmonic maps, conservation laws and moving frames" *Cambridge Tracts in Math.* 150, Cambridge University Press, 2002.
- [Hil] Hildebrandt, S. "Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings." *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, vol 1,2,3 (Beijing, 1980), 481-615, Science Press, Beijing, 1982.
- [Hil2] Hildebrandt, S. "Quasilinear elliptic systems in diagonal form". *Systems of nonlinear partial differential equations* (Oxford, 1982), 173-217, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 111, Reidel, Dordrecht, 1983.

- [LaRi] Lamm, Tobias; Tristan Rivière "Conservation laws for fourth order systems in four dimensions". *Comm.P.D.E.*, 33 (2008), no. 2, 245-262
- [Mul] Müller, Stefan "Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1 ". *J. Reine Angew. Math.* 412 (1990), 20–34.
- [Riv1] Rivière, Tristan "Conservation laws for conformally invariant variational problems." *Invent. Math.* 168 (2007), no. 1, 1–22.
- [Riv2] Rivière, Tristan "Analysis aspects of Willmore surfaces," *Inventiones Math.*, 174 (2008), no.1, 1-45
- [RiSt] Rivière, Tristan; Struwe, Michael "Partial regularity for harmonic maps and related problems." *Comm. Pure Appl. Math.* 61 (2008), no. 4, 451–463.
- [Sha] Shatah, Jalal "Weak solutions and development of singularities of the $SU(2)$ σ -model." *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (1988), no. 4, 459–469.
- [ShS] Shatah, Jalal; Struwe, Michael "The Cauchy problem for wave maps." *Int. Math. Res. Not.* 2002, no. 11, 555–571.
- [Tao1] Tao, Terence "Global regularity of wave maps. I. Small critical Sobolev norm in high dimension." *Internat. Math. Res. Notices* 2001, no. 6, 299–328.
- [Tao2] Tao, Terence "Global regularity of wave maps. II. Small energy in two dimensions." *Comm. Math. Phys.* 224 (2001), no. 2, 443–544.
- [Tar1] Tartar, Luc "Remarks on oscillations and Stokes' equation. Macroscopic modelling of turbulent flows" (Nice, 1984), 24–31, *Lecture Notes in Phys.*, 230, Springer, Berlin, 1985

- [Tar2] Tartar, Luc "An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces." Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 3. Springer, Berlin; UMI, Bologna, 2007.
- [To] Topping, Peter "The optimal constant in Wente's L^∞ estimate", *Comm. Math. Helv.* 72, (1997), 316-328.
- [Uhl] Uhlenbeck, Karen K. "Connections with L^p bounds on curvature." *Comm. Math. Phys.* 83 (1982), no. 1, 31–42.
- [We] Wente, Henry C. "An existence theorem for surfaces of constant mean curvature". *J. Math. Anal. Appl.* 26 1969 318–344.