ETH Zürich
Departement Mathematik

Der Brouwersche Fixpunktsatz in der Algebraischen Topologie

Bachelorarbeit von Simon Knellwolf

Sommer 2006

Leitung: Prof. Richard Pink
Assistenz: Dr. Alexander Caspar

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Sei D eine kompakte konvexe Teilmenge des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : D \to D$ mindestens einen Fixpunkt. Dieses Resultat hat der holländische Mathematiker Luitzen E. J. Brouwer anfangs des 20. Jahrhunderts erstmals bewiesen und damit den Grundstein für viele weitere Untersuchungen im Gebiet der topologischen Fixpunkttheorie gelegt. In dieser Arbeit stelle ich dem ursprünglichen Beweis von Brouwer einen neueren Beweis mit Homologietheorie gegenüber. Letzterer ist typisch für die Algebraische Topologie, wo man versucht, geometrische Aussagen in die Algebra zu übersetzen und mit deren Methoden zu beweisen.

Dank

Ich danke Herrn Prof. Richard Pink für seine Bereitschaft, mich bei dieser Arbeit zu betreuen. Er machte mich unter anderem auf die Thematik der Fixpunkte in der Algebraischen Topologie aufmerksam, liess mir jedoch grosse Freiheit, eigene Akzente zu setzen.

Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Dr. Alexander Caspar. In unseren wöchentlichen Treffen besprachen wir sowohl den Inhalt, wie auch die Form dieser Arbeit. Ich schätzte seine ehrliche Kritik und hilfreichen Tips sehr.

1 Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht ein klassisches Resultat der topologischen Fixpunkttheorie. Aus diesem Grund beginne ich mit einigen allgemeinen Grundbegriffen und Notationen im Zusammenhang mit Fixpunkten und Fixpunkträumen. Anschliessend stelle ich den Brouwerschen Fixpunktsatz vor und illustriere seine Bedeutung an zwei Anwendungen.

Ein topologischer Raum soll immer ein topologischer Hausdorffraum sein. Im ersten Teil bewegen wir uns fast ausschliesslich im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ mit der Standardtopologie. Zwei spezielle Unterräume sind die n-dimensinale *Einheitskugel*

$$\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

und deren topologischer Rand, die $(n-1)$-dimensionale *Sphäre*

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

1.1 Fixpunkte und Fixpunkträume

Sei X ein topologischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung. Dann heisst $x \in X$ ein *Fixpunkt* von f, falls $x = f(x)$. Einen Fixpunkt zu besitzen, ist damit auf den ersten Blick die Eigenschaft einer Abbildung. Bei gegebenem topologischem Raum X ist es aber möglich, dass die Existenz eines Fixpunktes von $f : X \to X$ nur vom Raum X abhängt.

Definition 1.1. Ein topologischer Raum X heisst ein *Fixpunktraum*, falls jede stetige Abbildung $f : X \to X$ mindestens einen Fixpunkt besitzt. Man sagt auch, der Raum X habe die *Fixpunkteigenschaft*.

Beispiel 1.2. Das abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für $a < b$ hat die Fixpunkteigenschaft. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Da a die kleinste Zahl in $[a, b]$ ist und $f(a)$ in $[a, b]$ liegt, gilt $a - f(a) \leq 0$ und auf ähnliche Weise folgt $b - f(b) \geq 0$. Die Abbildung $x \mapsto x - f(x)$ ist stetig und hat somit nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle, welche somit ein Fixpunkt von f ist.

Beispiel 1.3. Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist kein Fixpunktraum, da beispielsweise die stetige Abbildung $x \mapsto x + 1$ keinen Fixpunkt besitzt.

1.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Entgegen obiger Beispiele ist es im allgemeinen nicht einfach, zu entscheiden, ob ein gegebener topologischer Raum ein Fixpunktraum ist oder nicht. Resultate in diesem Bereich sind entsprechend interessant. Der Brouwersche Fixpunktsatz ist ein solches Resultat.

Theorem 1.4 (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Im Abschnitt 2 betrachte ich den ursprünglichen Beweis von Brouwer, dem ich im Abschnitt 3 einen Beweis mit Homologietheorie gegenüberstelle. □

Seien X, Y topologische Räume und $h : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Angenommen X habe die Fixpunkteigenschaft und $g : Y \to Y$ sei stetig. Als Komposition stetiger Abbildungen ist $f = h^{-1} \circ g \circ h : X \to X$ ebenfalls stetig und besitzt folglich einen Fixpunkt $x_0 \in X$. Wir erhalten $f(x_0) = h^{-1} \circ g \circ h(x_0)$ $= x_0$ und somit $g \circ h(x_0) = h(x_0)$. Das heisst $h(x_0)$ ist ein Fixpunkt von g. Damit haben wir gezeigt, dass die Fixpunkteigenschaft topologisch invariant ist und es folgt aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz, dass alle kompakten konvexen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ die Fixpunkteigenschaft besitzen, da sie homöomomorph zu $\mathbf{D}^n$ sind.

Beispiel 1.5. Das offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ für $a < b$ ist kein Fixpunktraum, da es homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist (siehe Beispiel 1.3).

Im Fall $n = 1$ bestehen die kompakten konvexen Unterräume aus einem einzelnen Punkt oder aus einem abgeschlossenen Intervall. Für einen Raum bestehend aus einem Punkt ist die Fixpunkteigenschaft klar, und für die abgeschlossenen Intervalle haben wir in Beispiel 1.2 gesehen, dass sie aus dem Zwischenwertsatz folgt. Im Jahr 1909 gelang es Brouwer[1], den Fall $n = 3$ zu zeigen und wenig später konnte er den allgemeinen Fall von $n \geq 1$ beweisen. Dazu benützte er den Begriff des Grades von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, den er wenig vorher entwickelte und mit dem er unter anderem auch die Sätze über die Invarianz der Dimension und die Invarianz des Gebietes zeigen konnte.

Der Brouwersche Fixpunktsatz hat eine grosse Bedeutung in der reinen Mathematik, insbesondere für die Entwicklung der topologischen Fixpunkttheorie. Er hat aber auch zahlreiche Anwendungen in sehr praxisorientierten Gebieten. Ich illustriere das an zwei Beispielen.

1.3 Zwei Anwendungen

Die erste Anwendung stammt aus der Mathematik, hat aber keinen direkten Bezug zu Fixpunkten. Es ist eine der vielen Möglichkeiten, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Ich mag diesen Beweis besonders gut, weil er entgegen dem üblichen Vorgehen der Algebraischen Topologie, eine algebraische Aussage mit Hilfe einer topologischen beweist. In der zweiten Anwendung versichert uns der Brouwersche Fixpunktsatz, dass es in einem bestimmten Input-Output Modell der Wirtschaft eine Gleichgewichtssituation von Angebot und Nachfrage gibt.

[1] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966, holländischer Mathematiker und Philosoph

Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein Teil der Doktorarbeit von GAUSS[2] aus dem Jahr 1799. Eine mögliche Formulierung lautet folgendermassen.

Theorem 1.6. *Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Betrachte das normierte Polynom $q(x) = \frac{p(x)}{a_n}$ mit Koeffizienten $b_i = \frac{a_i}{a_n}$ für $i = 0, \ldots, n$. Es reicht, die Aussage für q zu zeigen, da p und q dieselben Nullstellen besitzen. Definiere

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\},$$

wobei $R = 2 + |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-1}|$. Die Abbildung g auf D, definiert durch

$$g(z) = g(re^{i\theta}) = \begin{cases} z - \frac{q(z)}{Re^{i\theta(n-1)}}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{q(z)}{Rz^{n-1}}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist stetig und wir zeigen jetzt $g(D) \subset D$. Für $|z| \leq 1$ haben wir

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| z - \frac{q(z)}{Re^{i\theta(n-1)}} \right| \leq |z| + \left| \frac{q(z)}{Re^{i\theta(n-1)}} \right| = |z| + \frac{|q(z)|}{R} \\ &\leq 1 + \frac{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-1}| + 1}{R} \leq 1 + 1 < R \end{aligned}$$

und für $1 < |z| \leq R$

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| z - \frac{q(z)}{Rz^{n-1}} \right| = \left| z - \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1}}{Rz^{n-1}} - \frac{z}{R} \right| \\ &\leq R + \frac{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-1}|}{R} - 1 = R + \frac{R-2}{R} - 1 < R. \end{aligned}$$

Somit ist $g : D \to D$ eine stetige Abbildung auf einem kompakten konvexen Unterraum $D \subset \mathbb{C}$. Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Dann hat g nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $z_0 \in D$ und aus der Definition von g folgt $q(z_0) = 0$. □

Existenz von Gleichgewichten in der Wirtschaft

Das Input-Output Modell von LEONTIEF[3] ist eine Analysemethode der empirischen Wirtschaftsforschung insbesondere für volkswirtschaftliche Analysen. Es modelliert die Situation von N Produzenten, welche für die Herstellung ihres eigenen Produktes eine gewisse Menge von Produkten der anderen benötigen.

[2] Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker
[3] Wassily Leontief, 1906-1999, russisch-amerikanischer Wirtschaftsforscher

Für $1 \leq i, j \leq N$ bezeichne x_i das Einkommen des Produzenten i und f_{ij} den Betrag, für welchen er Produkte des Produzenten j einkauft, wobei f_{ij} positiv ist und stetig von x_i abhängt. Das Einkommen eines Produzenten soll aussschliesslich vom Verkauf seines Produktes stammen und er soll das ganze Einkommen wieder in Produkte der anderen Produzenten investieren. Das heisst

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} f_{ij}(x_i) \text{ für alle } j = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

und

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} f_{ij}(x_i) \text{ für alle } i = 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Unter der Bedingung (1.2) versichert uns der Brouwersche Fixpunktsatz, dass es in diesem System eine Gleichgewichtssituation gibt. Das heisst, dass es Einkommen (und damit verbundene Produktionsmengen) $x_1^0, \ldots, x_N^0$ gibt, so dass auch die Bedingung (1.1) erfüllt ist.

Satz 1.7. *Sei $N \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}$ positiv und $f_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq N$ stetige positive Abbildungen, welche die Bedingung (1.2) erfüllen. Dann besitzt die Abbildung*

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} f_{i1}(x_i) \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{N} f_{iN}(x_i) \end{pmatrix}$$

auf der Menge $D = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^{N} x_i \leq C\}$ mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Die Stetigkeit von g folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen f_{ij}. Bleibt $g(D) \subset D$ zu zeigen. Sei $x = (x_1, \ldots, x_N) \in D$, dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} f_{i1}(x_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{N} f_{iN}(x_i) &= \sum_{j=1}^{N} f_{1j}(x_1) + \ldots + \sum_{j=1}^{N} f_{Nj}(x_N) \\ &\overset{(1.2)}{=} x_1 + \ldots + x_N \leq C. \end{aligned}$$

Somit $g(x) \in D$ für alle $x \in D$ und da $D \subset \mathbb{R}^N$ ein kompakter konvexer Unterraum ist, folgt aus dem Fixpunktsatz von Brouwer, dass g mindestens einen Fixpunkt in D besitzt. $\square$

Die Anwendung dieses Satzes auf unser Modell ist klar. Für die Konstante C können wir beispielsweise NK nehmen, wobei K das gesamte sich im Umlauf befindende Kapital ist.

2 Ursprünglicher Beweis von Brouwer

Der ursprüngliche Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes basiert auf dem Begriff des Abbildungsgrades. Brouwer entdeckte, dass man jeder stetigen Abbildung zwischen zwei geschlossenen Mannigfaltigkeiten eine homotopieinvariante ganze Zahl zuordnen kann, und nannte sie den Grad der Abbildung. Bei der Betrachtung von stetigen Abbildungen $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ stellte er fest, dass ihr Grad immer ± 1 betragen muss, falls sie keinen Fixpunkt besitzen. Dies führte ihn zum Beweis des Fixpunktsatzes.

In diesem Abschnitt werde ich dem Vorgehen von Brouwer folgen, und versuchen seine Konzepte in heute üblicher Terminologie zu formulieren. Ich führe zuerst den Abbildungsgrad ein, allerdings nicht allgemein für stetige Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, sondern lediglich für stetige Abbildungen $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$. Das reicht für unseren Zweck und führt uns direkt zum Beweis, wie er in der Publikation [1] von Brouwer aus dem Jahr 1911 erschienen ist.

2.1 Der Grad von stetigen Abbildungen $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$

Veranschaulichung im Fall $n = 1$

Vor der allgemeinen Definition möchte ich eine Interpretation des Grades einer stetigen Abbildung $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ geben. Betrachte den Wert $f(x) \in \mathbf{S}^1$, während x einmal im Uhrzeigersinn um $\mathbf{S}^1$ läuft. Dann ist der Grad von f die Anzahl Umdrehungen im Uhrzeigersinn minus die Anzahl Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn. Er lässt sich bestimmen, indem wir $\mathbf{S}^1$ im Uhrzeigersinn durch Punkte $z_1, \ldots, z_q, z_{q+1} = z_1$ in q Kreisbögen $A_1, \ldots, A_q$ zerlegen, so dass $\max_{x,y \in A_i} |f(x) - f(y)| < 1$ für alle $i = 1, \ldots, q$. Damit ist der kürzeste Kreisbogen $\overline{A}_i$ zwischen $f(z_i)$ und $f(z_{i+1})$ für $1 \leq i \leq q$ eindeutig bestimmt. Der Kreisbogen $\overline{A}_i$ heisst positiv, wenn er im Uhrzeigersinn von $f(z_i)$ nach $f(z_{i+1})$ läuft, andernfalls heisst er negativ. Wähle ein $\xi \in \mathbf{S}^1$, so dass $\xi \neq f(z_i)$ für $1 \leq i \leq q$ und bezeichne mit p^+ die Anzahl positiver $\overline{A}_i$, die ξ enthalten, mit p^- die Anzahl negativer $\overline{A}_i$, die ξ enthalten. Der Grad von f ist dann die Zahl $p^+ - p^-$. Wir werden sehen, dass sie weder von der Unterteilung noch von der Wahl von ξ abhängt.

Für die allgemeine Definition erweitern wir das Konzept der Kreisbögen zu sphärischen Simplices.

Simplices in $\mathbb{R}^n$

Eine Menge von $n + 1$ Punkten $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ heisst in *allgemeiner Lage*, wenn $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nicht auf einer gemeinsamen $(n-1)$-dimensionalen

Hyperebene liegen. Dies ist äquivalent zu

$$\det(x_0 \dots x_n) = \begin{vmatrix} x_0^1 & \dots & x_0^n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ x_n^1 & \dots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

wobei $(x_i^1, \dots, x_i^n)$ die Koordinaten des Punktes x_i sind.

Definition 2.1. Sei $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage. Dann heisst

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \text{ mit } 0 < \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

das von A aufgespannte n*-Simplex*. Die Menge A heisst die *Eckenmenge* von σ.

Jedes von einer nicht leeren Teilmenge $B \subset A$ aufgespannte Simplex τ heisst eine *Seite* von σ. Ist $\emptyset \neq B \subsetneq A$ heisst τ eine *echte Seite* von σ. Die Vereinigung aller echten Seiten ist der *Rand* von σ.

Definition 2.2. Ein *endlicher Simplizalkomplex* K ist eine endliche Menge von Simplices, die folgende zwei Bedingungen erfüllt.

1. Von jedem Simplex $\sigma \in K$, sind auch alle seine Seiten in K.
2. Für alle Simplices $\sigma, \tau \in K$ mit $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ist $\tau \cap \sigma$ eine gemeinsame Seite von σ und τ.

Die *Eckenmenge* von K ist die Vereinigung der Eckenmengen seiner Simplices. Die Menge $|K| = \cup_{\sigma \in K} \sigma$ bezeichnet den K unterliegenden topologischen Raum.

Definition 2.3. Ein *orientiertes* n*-Simplex* ist ein n-Simplex σ zusammen mit einer festen Anordnung seiner Eckpunkte. Wir schreiben $[\sigma] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ und definieren die *Orientierung* von $[\sigma]$ als $\operatorname{sign}[\sigma] = \operatorname{sign}\det(x_0 \dots x_n)$.

Lemma 2.4. *Seien* $[\sigma] = [p, x_1, \dots, x_n]$ *und* $[\tau] = [q, x_1, \dots, x_n]$ *zwei orientierte* n*-Simplices und* H *die von den Punkten* $x_1, \dots, x_n$ *aufgespannte* $(n-1)$*-dimensionale Hyperebene. Dann liegen* p *und* q *genau dann auf verschiedenen Seiten von* H*, wenn* $\operatorname{sign}[\sigma] \neq \operatorname{sign}[\tau]$.

Beweis. Die beiden Punkte p und q liegen genau dann auf verschiedenen Seiten von H, wenn der Geradenabschnitt von p nach q definiert durch $t \mapsto (1-t)p + tq$ für $0 < t < 1$ die Hyperebene H in einem Punkt $h = (1-t_h)p + t_h q$ schneidet. Wegen $h \in H$ und der Multilinearität der Determinante gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \det(h, x_1, \dots, x_n) = \det((1-t_h)p + t_h q, x_1, \dots, x_n) \\ &= (1-t_h)\det(p, x_1, \dots, x_n) + t_h \det(q, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Wegen $t_h > 0$ und $1 - t_h > 0$ folgt $\operatorname{sign}[\sigma] \neq \operatorname{sign}[\tau]$. Liegen p und q auf derselben Seite von H, dann schneidet der Geradenabschnitt von p nach q die

Hyperebene H in keinem Punkt. Das heisst $\det((1-t)p+tq, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Die Determinante ist stetig und aus dem Zwischenwertsatz folgt $\det((1-t)p+tq, x_1, \ldots, x_n) > 0$, $\forall t \in [0,1]$ oder $\det((1-t)p+tq, x_1, \ldots, x_n) < 0$, $\forall t \in [0,1]$. Somit ist insbesondere $\operatorname{sign}[\sigma] = \operatorname{sign}[\tau]$. $\square$

Sphärische Simplices und Triangulierungen von $\mathbf{S}^n$

Sei $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Menge von $n+1$ Punkten auf $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $A \cup \{0\}$ in allgemeiner Lage liegt. Dann ist der Nullpunkt nicht im von A aufgespannten n-Simplex σ enthalten, und die Abbildung

$$\psi : \sigma \to \mathbf{S}^n \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i = 0, 1, \ldots, n \right\},$$

die jedem Punkt $x \in \sigma$ den Schnittpunkt des vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahls durch x mit $\mathbf{S}^n$ zuweist, ist wohldefiniert und ein Homöomorphismus.

Definition 2.5. Seien A, σ und ψ wie oben. Dann heisst das homöomorphe Bild von σ unter ψ das von A aufgespannte *sphärische n-Simplex s*. Die *Seiten* von s sind Bilder der Seiten von σ. Der *Rand* von s ist das Bild des Randes von σ.

Ein *orientiertes sphärisches n-Simplex* $[s]$ ist ein sphärisches n-Simplex zusammen mit einer festen Anordnung seiner Eckpunkte. Die *Orientierung* von $[s]$ entspricht derjenigen von $[x_0, x_1, \ldots, x_n, 0]$.

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung* von X ist ein Simplizialkomplex K zusammen mit einem Homöomorphismus $|K| \xrightarrow{\cong} X$. Nach obigen Betrachtungen ist es möglich, eine Triangulierung von $\mathbf{S}^n$ zu konstruieren, deren Simplizialkomplex nur aus n-Simplices besteht, die via ψ homöomorph zu sphärischen n-Simplices sind. Ein solche Triangulierung können wir als Unterteilung von $\mathbf{S}^n$ in sphärische n-Simplices auffassen, die sich nicht überschneiden und deren $(n-1)$-dimensionale Seiten genau zwei n-Simplices gemeinsam sind.

Sei T von nun an eine solche Triangulierung von $\mathbf{S}^n$. Die *Eckenmenge* $E(T)$ von T sei die Eckenmenge des zugrundeliegenden Simpliziakomplexes. Die *Eckenmenge* eines sphärischen Simplex s von T bezeichnen wir mit $E(s)$.

Eckenabbildungen und ihr Grad

Zunächst betrachten wir nun Abbildungen, die nur auf den Eckpunkten $E(T)$ einer Triangulierung definiert sind und diese auf $\mathbf{S}^n$ abbilden.

Definition 2.6. Eine Abbildung $\varphi : E(T) \to \mathbf{S}^n$, so dass gilt

$$\max_{x,y \in E(s)} |\varphi(x) - \varphi(y)| < 1,\ \forall s \in T, \tag{2.1}$$

nennen wir eine *Eckenabbildung* auf T.

Sei φ eine Eckenabbildung auf T. Falls die Menge $\{\varphi(x) \in \mathbf{S}^n \mid x \in E(s)\} \cup \{0\}$ für ein $s \in T$ in allgemeiner Lage liegt, spannt sie wegen der Bedingung (2.1) eindeutig ein sphärisches n-Simplex auf, das wir mit s_φ bezeichnen. Ein orientiertes sphärisches Simplex $[s] = [x_0, \dots, x_n]$ wird zu einem orientierten sphärischen Simplex $[s]_\varphi$, dessen Orientierung derjenigen von $[\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_n), 0]$ entspricht. Mit folgendem Beispiel wird klar, dass sich unter φ die Orientierung verändern kann.

Beispiel 2.7. Die Eckenabbildung $\alpha : E(T) \to \mathbf{S}^n$ ordnet jedem Eckpunkt x von T seinen Antipodenpunkt $-x$ zu. Betrachte ein $[s] = [x_0, \dots, x_n] \in T$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}[s]_\alpha = \operatorname{sign}\det(-x_0, \dots, -x_n, 0) &= \operatorname{sign}\begin{vmatrix} -x_0^1 & \dots & -x_0^{n+1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ -x_n^1 & \dots & -x_n^{n+1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1}\operatorname{sign}\det(x_0, \dots, x_n, 0) = (-1)^{n+1}\operatorname{sign}[s].\end{aligned}$$

Betrachten wir wieder eine beliebige Eckenabbildung φ auf T. Liegt die Menge $\{\varphi(x) \in \mathbf{S}^n \mid x \in E(s)\} \cup \{0\}$ für ein $s \in T$ nicht in allgemeiner Lage, heisst s_φ *degeneriert*. Im entsprechenden Fall von $[s]$ besitzt $[s]_\varphi$ keine Orientierung und per Konvention ist $\operatorname{sign}[s]_\varphi = 0$.

Der *Rand* von s_φ ist die Vereinigung aller sphärischen Simplices, welche von einer Eckenmenge $\{\varphi(x) \in \mathbf{S}^n \mid x \in F\}$ mit $F \subsetneq E(s)$ aufgespannt werden.

Die Menge $\{s_\varphi \mid s \in T\}$ ist im allgemeinen keine Triangulierung von $\mathbf{S}^n$, weil degenerierte oder sich überlappende sphärische Simplices s_φ auftreten können. Sie hat aber folgende Eigenschaft.

Lemma 2.8. *Seien eine Triangulierung T von $\mathbf{S}^n$ und eine Eckenabbildung φ wie bisher. Wähle ein $\xi \in \mathbf{S}^n$ nicht auf dem Rand eines s_φ für alle $s \in T$ und definiere*

$$p^\pm(\xi, T, \varphi) = \#\left\{r \in T \mid \xi \in r_\varphi \wedge \operatorname{sign} r_\varphi = \pm \operatorname{sign} r\right\}.$$

Dann ist die Zahl $D(\xi, T, \varphi) = p^+(\xi, T, \varphi) - p^-(\xi, T, \varphi)$ unabhängig von der Wahl von ξ.

Beweis. Betrachte zuerst den Fall, dass keines der s_φ für $s \in T$ degeneriert ist. Wähle $\xi, \zeta \in \mathbf{S}^n$ nicht auf dem Rand eines s_φ für alle $s \in T$ und verbinde ξ und ζ mit einem Weg auf $\mathbf{S}^n$, der keine Seite eines s_φ tieferer Dimension als $n-1$ durchläuft. Wenn ξ entlang dieses Weges nach ζ wandert, kann sich $D(\xi, T, \varphi)$ nur ändern, wenn ξ eine $(n-1)-$dimensionale Seite eines s_φ kreuzt. Eine solche Seite ist das Bild einer $(n-1)$-dimensionalen Seite von genau zwei sphärischen n-Simplices $s = (p, x_1, \dots, x_n)$ und $r = (q, x_1, \dots, x_n)$. Wegen Lemma 2.4 gilt

$$\operatorname{sign} s \neq \operatorname{sign} r. \tag{2.2}$$

Betrachten wir nun die $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H, welche durch den Nullpunkt und die Seite $(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))$ geht und von ξ gekreuzt wird. Es sind zwei Situationen zu betrachten.

(i) $\varphi(p)$ und $\varphi(q)$ liegen auf derselben Seite von H. In diesem Fall verlässt (oder betritt) ξ sowohl s_φ wie auch r_φ. Nach Lemma 2.4 ist $\operatorname{sign} s_\varphi = \operatorname{sign} r_\varphi$ und mit (2.2) folgt, dass $p^+(\xi,T,\varphi)$ und $p^-(\xi,T,\varphi)$ beide um 1 abnehmen (zunehmen) und folglich $D(\xi,T,\varphi)$ unverändert bleibt.

(ii) $\varphi(p)$ und $\varphi(q)$ liegen auf verschiedenen Seiten von H. In diesem Fall verlässt ξ das sphärische Simplex s_φ und betritt r_φ oder umgekehrt. Die beiden beiden Simplices haben aber nun dieselbe Orientierung. Somit verändert sich keines der $p^\pm(\xi,T,\varphi)$ und damit $D(\xi,T,\varphi)$ auch hier nicht.

Es bleibt noch der Fall mit degeneriertem s_φ. Weil wir ξ und ζ so wählen, dass sie nicht auf dem Rand eines s_φ liegen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Eckenabbildung $\varphi' : E(T) \to \mathbf{S}^n$, so dass

- kein $s_{\varphi'}$ degeneriert ist für alle $s \in T$ und $|\varphi(x) - \varphi'(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in E(T)$,
- für alle nicht degenerierten s_φ gilt $\operatorname{sign} s_\varphi = \operatorname{sign} s_{\varphi'}$, und
- ξ beziehungsweise ζ liegt genau dann im Innern von $s_{\varphi'}$, wenn es im Innern von s_φ liegt.

Damit entspricht φ' dem ersten Fall und $D(\zeta,T,\varphi) = D(\zeta,T,\varphi') = D(\xi,T,\varphi') = D(\xi,T,\varphi)$. □

Nach diesem Lemma können wir also $D(\xi,T,\varphi) = D(T,\varphi)$ schreiben. Die Argumentation im degenerierten Fall in obigen Beweis liefert ein allgemeineres Resultat.

Lemma 2.9. *Seien T eine Triangulierung von $\mathbf{S}^n$ und φ eine Eckenabbildung wie bisher. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für jede Eckenabbildung $\varphi' : E(T) \to \mathbf{S}^n$ mit $\forall x \in E(T) : |\varphi(x) - \varphi'(x)| < \varepsilon$ gilt $D(T,\varphi) = D(T,\varphi')$.*

Der Grad von stetigen Abbildungen $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$

Sei $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ stetig. Weil f stetig und $\mathbf{S}^n$ kompakt ist, können wir unsere Triangulierung T von $\mathbf{S}^n$ so wählen, so dass $\max_{x,y\in s} |f(x) - f(y)| < 1$ für alle $s \in T$. Es ist klar, dass die Einschränkung $f\mid_{E(T)}$ eine Eckenabbildung im Sinn von (2.1) ist. Wir schreiben $\varphi_f = f\mid_{E(T)}$ und nennen φ_f die *zu f und T gehörende Eckenabbildung.*

Lemma 2.10. *Für jede stetige Abbildung $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ ist die Zahl $D(T,\varphi_f)$ unabhängig von der Triangulierung T.*

Beweis. Wir können eine gegebene Triangulierung T von $\mathbf{S}^n$ beliebig verfeinern, indem wir ihrer Eckenmenge endlich viele neue Punkte und entsprechende Seiten hinzufügen. Auf diese Weise können wir zu je zwei Triangulierungen T und T' eine gemeinsame Triangulierung T'' finden. Sowohl $D(T, \varphi_f)$ wie auch $D(T', \varphi'_f)$ sind dann mit $D(T'', \varphi''_f)$ identisch. Das folgt aus wiederholter Anwendung der Beobachtung, dass beim Hinzufügen eines Eckpunktes zu T die Zahl $D(T, \varphi_f)$ sich nicht verändert. Das wiederum folgt aus Lemma 2.8, wenn wir für unsere Berechnung einen Punkt ξ im Innern eines unveränderten sphärischen Simplex wählen. $\square$

Die Zahl $D(T, \varphi_f)$ hängt also nur von $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ ab und wir schreiben $D(T, \varphi_f) = D(f)$.

Definition 2.11. Sei $n \geq 1$ und $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ eine stetige Abbildung. Dann heisst die Zahl $D(f)$ der *Grad* von f.

Beispiel 2.12. Es ist klar, dass die Identität $\mathbf{1} : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ den Grad 1 hat.

Beispiel 2.13. Eine stetige Abbildung $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, so dass $f(\mathbf{S}^n) \subset \mathbf{S}^n$ nicht dicht ist, hat den Grad 0. Wähle zur Berechnung einen Punkt $\xi \notin f(\mathbf{S}^n)$. Insbesondere hat jede konstante Abbildung den Grad 0.

Beispiel 2.14. Die Antipodenabbildung $\alpha : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, $\alpha(x) = -x$ hat den Grad $(-1)^{n+1}$ (siehe Beispiel 2.7).

Bemerkung 2.15. Für Abbildungen $\mathbf{S}^0 \to \mathbf{S}^0$ kann obige Definition des Grades nicht verwendet werden. Wir lassen uns von den Beispielen 2.12 bis 2.14 leiten, um die Definition folgendermassen zu erweitern: $D(\mathbf{1}) = 1$, $D(\alpha) = -1$ und die beiden anderen Abbildungen haben den Grad Null.

Homotopieinvarianz des Grades

Wir kommen jetzt zu der zentralen Eigenschaft des Grades von stetigen Abbildungen.

Theorem 2.16. *Seien $n \geq 0$ und $f_0 \simeq f_1 : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ zwei homotope Abbildungen. Dann ist $D(f_0) = D(f_1)$.*

Beweis. Für den Fall $n = 0$ ist die Aussage klar, da jede Homotopie konstant ist. Betrachte $n \geq 1$. Sei $F : \mathbf{S}^n \times [0,1] \to \mathbf{S}^n$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 und wir schreiben $F(x,t) = f_t(x)$. Weil $\mathbf{S}^n \times [0,1]$ kompakt ist und F stetig, können wir ein Triangulierung T so wählen, dass $f_t \mid_{E(T)} = \varphi_{f,t}$ für alle $t \in [0,1]$ eine Eckenabbildung ist, und wir können $\xi \in \mathbf{S}^n$ so wählen, dass ξ nicht auf einer $(n-1)$-dimensionalen Seite eines $s_{\varphi_{f,t}}$ liegt für alle $s \in T$ und alle $t \in [0,1]$. Ausserdem ist $\xi \in s_{\varphi_{f,t}} \Leftrightarrow \xi \in s_{\varphi_{f,t'}}$ für alle $t, t' \in [0,1]$, und damit $\operatorname{sign} s_{\varphi_{f,t}} = \operatorname{sign} s_{\varphi_{f,t'}}$ für alle $t, t' \in [0,1]$. Somit ist $D(f_t)$ konstant auf $[0,1]$. $\square$

Korollar 2.17. *Eine stetige Abbildung $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ ohne Fixpunkt hat den Grad $D(f) = (-1)^{n+1}$.*

Beweis. Wenn f keinen Fixpunkt hat, dann geht der Geradenabschnitt von $f(x)$ nach $-x$ definiert durch $t \mapsto (1-t)f(x) - tx$ für $0 \leq t \leq 1$ nicht durch den Nullpunkt. Damit ist $F : \mathbf{S}^n \times [0,1] \to \mathbf{S}^n$,

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$$

wohldefiniert und eine Homotopie von f zur Antipodenabbildung α aus Beispiel 2.14. Wegen Theorem 2.16 ist $D(f) = D(\alpha) = (-1)^{n+1}$. □

Bemerkung 2.18. Die Umkehrung von Korrollar 2.17 ist nicht gültig. Betrachte die Identität auf $\mathbf{S}^n$ für n gerade und $n \geq 0$. Sie hat den Grad 1, aber besitzt offensichtlich mindestens einen Fixpunkt.

2.2 Beweis des Fixpunktsatzes

Nach Korollar 2.17 besitzt jede stetige Abbildung $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, die nicht den Grad ± 1 hat, einen Fixpunkt. Insbesondere besitzt jede stetige Abbildung $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ mit Grad Null einen Fixpunkt. Dies ist der Kern von Brouwers ursprünglichem Beweis.

Beweis. [Brouwerscher Fixpunktsatz] Bezeichne mit

$$\mathbf{S}^n_\pm = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{S}^n \mid \pm x_n \geq 0\}$$

die obere respektive die untere Halbsphäre von $\mathbf{S}^n$ und bemerke, dass die Projektionen $p : \mathbf{S}^n_\pm \to \mathbf{D}^n$, welche die letzte Koordinate weglassen, Homöomorphismen sind.

Sei $f : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$ stetig. Dann ist die Komposition

$$g = p^{-1} \circ f \circ p : \mathbf{S}^n_+ \to \mathbf{S}^n_+$$

ebenfalls stetig. Erweitere g stetig zu $\tilde{g} : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n_+ \subset \mathbf{S}^n$ durch

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_0, \ldots, x_n) & x \in \mathbf{S}^n_+ \\ g(x_0, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & x \in \mathbf{S}^n_- \end{cases} .$$

Wie im Beispiel 2.14 ist $D(\tilde{g}) = 0$, weil $\tilde{g}(\mathbf{S}^n) \subset \mathbf{S}^n_+$ nicht dicht ist in $\mathbf{S}^n$. Nach Korollar 2.17 besitzt $\tilde{g}$ einen Fixpunkt x_0. Da $x_0 \in \mathbf{S}^n_+$ und $\tilde{g} = g$ auf $\mathbf{S}^n_+$, ist x_0 auch ein Fixpunkt von g und $p(x_0)$ ein Fixpunkt von f. □

3 Beweis mit Homologietheorie

Knapp hundert Jahre nach Brouwer stehen uns heute neue mathematische Werkzeuge zur Verfügung, die einen sehr eleganten Beweis ermöglichen. Dieser ist aber abstrakt und kaum geometrisch anschaulich, wie der ursprüngliche Beweis. Zuerst bedarf es einen gewissen Aufwand, die nötigen Definitionen und Eigenschaften dieser neuen Werkzeuge zu erarbeiten.

3.1 Kategorien und Funktoren

Ich beginne mit einigen Grundbegriffen aus der Kategorientheorie. Sie ermöglichen, den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes kurz und präzis zu fomulieren.

Definition 3.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{K}$ ist eine Klasse von *Objekten* $A, B, C, \ldots$ zusammen mit:

1. einer Familie von Mengen $\mathcal{K}(A, B)$, definiert für jedes Paar (A, B) von Objekten. Die Elemente der Menge $\mathcal{K}(A, B)$ heissen *Morphismen von* A *nach* B und für $f \in \mathcal{K}(A, B)$ schreibt man $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$.
2. einer Funktion $C : \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) \to \mathcal{K}(A, C)$, definiert für jedes geordnete Tripel (A, B, C) von Objekten. Die Funktion C heisst *Kompositionsgesetz*, für $C(f, g)$ schreibt man $g \circ f$ oder auch gf, und sie muss folgende zwei Bedingungen erfüllen:
   (a) Das Kompositionsgesetz ist *assoziativ*, für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt also $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
   (b) Für jedes Objekt B gibt es einen Morphismus $\mathbf{1}_B \in \mathcal{K}(B, B)$, so dass gilt $f \circ \mathbf{1}_B = f$ für $f : B \to C$ und $\mathbf{1}_B \circ g = g$ für $g : A \to B$.

Beispiel 3.2. Die Kategorie $\mathcal{M}$ hat als Objekte beliebige Mengen und als Morphismen Abbildungen mit dem üblichen Kompositionsgesetz.

Beispiel 3.3. Die Kategorie $\mathcal{TOP}$ der topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen.

Beispiel 3.4. Die Kategorie $\mathcal{TOP}^2$ der Paare (X, A) von topologischen Räumen mit $A \subset X$. Die Morphismen sind die stetigen Abbildungen $f : (X, A) \to (Y, B)$ definiert durch $f : X \to Y$, so dass $f(A) \subset B$. Einen topologischen Raum X identifizieren wir kanonisch mit $(X, \emptyset)$.

Beispiel 3.5. Eine Spezialisierung von $\mathcal{TOP}^2$ ist die Kategorie $\mathcal{TOP}_\bullet$ der topologischen Räume mit Basispunkt mit den basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.

Beispiel 3.6. Beispiele für algebraische Kategorien sind $\mathcal{GR}$ oder $\mathcal{AB}$ die Kategorien der Gruppen beziehungsweise der abelschen Gruppen mit den Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Seien $u : A \to B$ und $v : B \to A$ zwei Morphismen einer Kategorie $\mathcal{K}$, so dass $v \circ u = \mathbf{1}_A$. Dann heisst v ein *Linksinverses* von u und u ein *Rechtsinverses* von v. Wenn u sowohl ein Linksinverses v_l wie auch ein Rechtsinverses v_r besitzt, dann nennt man u einen *Isomorphismus*. In diesem Fall gilt $v_l = v_l(uv_r) = (v_l u)v_r = v_r$ und der Morphismus $v_l = v_r$, geschrieben u^{-1}, heisst *Inverses* von u. Zwei Objekte A, B einer Kategorie sind *isomorph* oder *äquivalent*, geschrieben $A \cong B$, wenn es einen Isomorphismus $u : A \to B$ gibt.

Beispiel 3.7. Die Isomorphismen in den Beispielen 3.2 bis 3.6 sind die bijektiven Abbildungen in $\mathcal{M}$, die Homöomorphismen in $\mathcal{TOP}$, die Homöomorphismen mit $A \to B$ bijektiv in $\mathcal{TOP}^2$ und die Gruppenisomorphismen in $\mathcal{GR}$ oder $\mathcal{AB}$.

Betrachtet man gleichzeitig mehrere Morphismen zwischen mehreren Objekten einer Kategorie $\mathcal{K}$, ist es hilfreich diese mit Pfeilen in einem *Diagramm* darzustellen.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Das Diagramm heisst *kommutativ*, wenn $uf = vg$. Allgemeiner heisst ein Diagramm kommutativ, wenn für jedes geordnete Paar (A, B) im Diagramm, jeder Pfad von aufeinanderfolgenden Pfeilen beginnend in A und endend in B denselben Morphismus ergeben.

Definition 3.8. Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ zwei Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $T : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathcal{K}$ ein Objekt $T(A) \in \mathcal{L}$ und jedem Morphismus $u \in \mathcal{K}(A, B)$ einen Morphismus $T(u) \in \mathcal{L}(T(A), T(B))$ zu, so dass

1. $T(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{T(A)}$ für jedes Objekt $A \in \mathcal{K}$
2. $T(u \circ v) = T(u) \circ T(v)$ für alle Morphismen u und v für die $u \circ v$ definiert ist

Beispiel 3.9. Der *Vergissfunktor* $\mathcal{TOP}_\bullet \to \mathcal{TOP}$, $(X, x) \mapsto X$, $u \mapsto u$ lässt die Information über den Basispunkt fallen, basispunkterhaltende Abbildungen werden zu Abbildungen.

Beispiel 3.10. Die Zuordnung der Fundamentalgruppe[4] liefert uns einen Funktor $\mathcal{TOP}_\bullet \to \mathcal{GR}$, $(A, a) \mapsto \pi_1(A, a)$. Jede basispunkterhaltende Abbildung $f : (A, a) \to (B, b)$ induziert einen Homomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(A, a) \to \pi_1(B, b)$, so dass $\pi_1(\mathbf{1}_{(A,a)}) = \mathbf{1}_{\pi_1(A,a)}$ und $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.

Bemerkung 3.11. Ein kovarianter Funktor $T : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ordnet kommutativen Diagrammen in $\mathcal{K}$ kommutative Diagramme in $\mathcal{L}$ zu. Betrachte Diagramm (3.1). Es gilt $T(u) \circ T(f) = T(uf) = T(vg) = T(v) \circ T(g)$. Insbesondere werden Isomorphismen in $\mathcal{K}$ zu Isomorphismen in $\mathcal{L}$.

Definition 3.12. Seien $S, T : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ zwei kovariante Funktoren. Eine *natürliche Transformation* ψ von S nach T ordnet jedem Objekt $X \in \mathcal{K}$ einen Morphismus $\psi_X \in \mathcal{L}(S(X), T(X))$ zu, so dass für alle $A, B \in \mathcal{K}$ und $u : A \to B$ das

[4] Die Fundamentalgruppe wird oft im Rahmen einer Einführungsvorlesung in Topologie behandelt und ist beispielsweise in [5] zu finden.

Diagramm

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "S(u)"] \arrow[d, "\psi_A"'] & S(B) \arrow[d, "\psi_B"] \\ T(A) \arrow[r, "T(u)"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

3.2 Beweisidee

Anstatt den Brouwerschen Fixpunktsatz direkt zu beweisen, zeige ich, dass er äquivalent ist zum Retraktionssatz, den ich anschliessend beweise.

Äquivalenz von Retraktionssatz und Fixpunktsatz

Sei $A \subset X$ ein Unterraum von X. Dann heisst eine stetige Abbildung $r : X \to A$ eine *Retraktion* von X auf A, wenn $r\mid_A = \mathbf{1}_A$. Gibt es eine solche Retraktion, heisst A ein *Retrakt* von X.

Theorem 3.13. *Es gibt keine Retraktion $r : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^{n-1}$.*

Proposition 3.14. *Der Brouwersche Fixpunktsatz und der Retraktionssatz sind äquivalente Aussagen.*

Beweis. Nehmen wir an, die stetige Abbildung $f : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$ habe keinen Fixpunkt. Da $x \neq f(x)$ für alle $x \in \mathbf{D}^n$, ist der Halbstrahl beginnend in x in Richtung $f(x)$ für alle $x \in \mathbf{D}^n$ eindeutig bestimmt. Wir definieren die Abbildung $r : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^{n-1}$, indem wir jedem x den Schnittpunkt dieses Halbstrahl mit $\mathbf{S}^{n-1}$ zuweisen. Damit ist r stetig und $f\mid_{\mathbf{S}^n} = r$, also ist r eine Retraktion. Umgekehrt sei $r : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^{n-1}$ eine Retraktion, dann ist $f(x) = -r(x)$ eine fixpunktfreie stetige Abbildung $\mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$. □

Beweis des Retraktionssatzes

Angenommen es gäbe eine Retraktion $r : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^{n-1}$, dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}^{n-1} \arrow[rr, "\mathbf{1}"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbf{S}^{n-1} \\ & \mathbf{D}^n \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei $i : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{D}^n$ die Inklusion ist. Angenommen wir hätten einen kovarianten Funktor $H : \mathcal{TOP} \to \mathcal{AB}$ und wenden H auf obiges Diagramm an. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H(\mathbf{S}^{n-1}) \arrow[rr, "H(\mathbf{1})=\mathbf{1}"] \arrow[dr, "H(i)"'] & & H(\mathbf{S}^{n-1}) \\ & H(\mathbf{D}^n) \arrow[ur, "H(r)"'] & \end{tikzcd},$$

welches wiederum kommutativ ist. Die Homologietheorie wird uns Funktoren H liefern mit $H(\mathbf{D}^n) = \{0\}$ und $H(\mathbf{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Folglich kann obiges Diagramm nicht kommutativ sein, was uns einen Widerspruch zur Existenz der Retraktion r liefert.

Beispiel 3.15. Im Fall von $n = 2$ können wir den Fundamentalgruppenfunktor aus Beispiel 3.10 verwenden. Die Kreisscheibe ist kontrahierbar und folglich $\pi_1(\mathbf{D}^2) \cong \{0\}$; für die Kreislinie berechnet man $\pi_1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Unter der Annahme, dass es eine Retraktion $r : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ gibt, erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, "\mathbf{1}"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z} \\ & \{0\} \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

welches nicht kommutativ sein kann und somit zu einem Widerspruch führt. Folglich gibt es keine Retraktion $r : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$.

Bemerkung 3.16. Im Fall von $n \geq 3$ ist sowohl $\pi_1(\mathbf{D}^n)$ wie auch $\pi_1(\mathbf{S}^{n-1})$ trivial und das resultierende Diagramm führt nicht zum gewünschten Widerspruch. Wir benötigen andere Funktoren, die unser topologisches Problem algebraisieren, aber den Unterschied zwischen $\mathbf{D}^n$ und $\mathbf{S}^{n-1}$ auch in höheren Dimensionen in die Algebra übersetzen.

3.3 Homologietheorie

Der Begriff der Homologie wurde 1895 von Poincaré[5] eingeführt und in der Folge entwickelten sich darunter mehrere ähnliche Methoden, um Eigenschaften von Räumen in algebraische Strukturen zu übersetzen. Diese Methoden wurden 1945 von Eilenberg[6] und Steenrod[7] unter dem Begriff der Homologietheorie axiomatisiert. Damit war ein neues mathematisches Werkzeug geschaffen, das heute aus der Algebraischen Topologie nicht mehr wegzudenken ist.

In diesem Abschnitt definiere ich Homologietheorie axiomatisch nach Eilenberg-Steenrod und ziehe einige Folgerungen aus den Axiomen, insbesondere berechne ich die Homologie von $\mathbf{D}^n$ und $\mathbf{S}^{n-1}$ für $n \geq 1$. Das wird den Beweis des Retraktionssatzes analog zum Beispiel 3.15 ermöglichen.

[5] Henri Poincaré, 1854-1912, französischer Mathematiker
[6] Samuel Eilenberg, 1913-1998, polnischer Mathematiker
[7] Norman Steenrod, 1910-1971, amerikanischer Mathematiker

Die Axiome einer Homologietheorie

Sei $I : \mathcal{TOP}^2 \to \mathcal{TOP}^2$ der Funktor $(X, A) \mapsto (A, \emptyset)$, der jeder stetigen Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ die stetige Abbildung $I(f) = f\,|_A : (A, \emptyset) \to (B, \emptyset)$ zuordnet. In der Folge schreibe ich für das Paar $(A, \emptyset)$ kurz A.

Definition 3.17. Eine *Homologietheorie* für die Kategorie $\mathcal{TOP}^2$ ist eine Familie $\{H_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von kovarianten Funktoren

$$H_n : \mathcal{TOP}^2 \to \mathcal{AB}$$

zusammen mit einer Familie $\{\partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von natürlichen Transformationen

$$\partial_n : H_n \to H_{n-1} \circ I,$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind.

- *Homotopieinvarianz*
  Seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotope Abbildungen in $\mathcal{TOP}^2$, das heisst es gibt eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$, so dass $H\,|_{A \times [0,1]} \subset B$, $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = g$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

  $$H_n(f) = H_n(g) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B).$$

- *Lange exakte Sequenz von Raumpaaren*
  Für jedes Raumpaar (X, A) ist die folgende lange Sequenz exakt

  $$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \dots,$$

  wobei $i : A \to X$ und $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ die Inklusionen sind. Das heisst, das Bild jedes Homomorphismus ist genau der Kern seines Nachfolgers.

- *Ausschneidung*
  Seien A, B Unterräume von X, so dass der Abschluss von A im Innern von B enthalten ist. Dann induziert die Inklusion $i : (X \setminus A, B \setminus A) \to (X, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

  $$H_n(i) : H_n(X \setminus A, B \setminus A) \xrightarrow{\cong} H_n(X, B).$$

- *Disjunkte Vereinigung*
  Sei $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von topologischen Räumen für eine beliebige Indexmenge I und $j_i : X_i \to \coprod_{i \in I} X_i$ die Inklusion. Dann ist der Abbildung

  $$\bigoplus_{i \in I} H_n(j_i) : \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \xrightarrow{\cong} H_n\left(\coprod_{i \in I} X_i\right)$$

  für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Gilt zusätzlich das folgende Axiom, heisst die Homologietheorie eine *gewöhnliche Homologietheorie.*

- *Dimensionsaxiom*
  Sei $\{\bullet\}$ der Raum bestehend aus einem Punkt. Dann ist $H_n(\{\bullet\}) \cong \{0\}$ für alle $n \neq 0$.

Im folgenden sei $\{H_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ zusammen mit $\{\partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine gewöhnliche Homologietheorie.

Wir nennen $H_n(X, A)$ die *n-te Homologiegruppe* von (X, A). Die Abbildungen ∂_n heissen *Randoperatoren.* Die Gruppe $H_0(\{\bullet\})$ ist die *Koeffizientengruppe* der Homologietheorie.

Proposition 3.18. *Für jeden topologischen Raum X ist $H_n(X, X) \cong \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Betrachte die lange exakte Sequenz des Paares (X, A). Ist $H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$, dann ist $\operatorname{Bild} \partial_n(X, A) = \operatorname{Kern} H_{n-1}(i) \cong \{0\}$ und daher $\operatorname{Kern} \partial_n(X, A) = H_n(X, A) = \operatorname{Bild} H_n(j) \cong \{0\}$, da $\operatorname{Kern} H_n(j) = \operatorname{Bild} H_n(i) = H_n(X)$. Insbesondere ist $H_n(X, X) \cong \{0\}$. $\square$

Proposition 3.19. *Seien (X, A) und (Y, B) homotopieäquivalente Raumpaare, dann ist $H_n(X, A) \cong H_n(Y, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieninversem g. Dann ist $g \circ f \simeq \mathbf{1}_{(X,A)}$ und wegen den Funktoreigenschaften und der Homotopieinvarianz $H_n(f) \circ H_n(g) = \mathbf{1}_{H_n(X,A)}$ und genauso $H_n(g) \circ H_n(f) = \mathbf{1}_{H_n(Y,B)}$. Also ist $H_n(f)$ ein Isomorphismus mit Inversem $H_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Korollar 3.20. *Ist X zusammenziehbar, dann ist $H_n(X) \cong H_n(\{\bullet\})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, insbesondere ist $H_n(\mathbf{D}^d) \cong H_n(\{\bullet\})$ für alle $d, n \in \mathbb{Z}$, $d \geq 1$.*

Beweis. X ist genau dann zusammenziehbar, wenn X homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. $\square$

Die Mayer-Vietoris Sequenz

Drei topologische Räume A, B, X heissen ein *Tripel* (X, B, A), falls $A \subset B \subset X$.

Lemma 3.21. *Sei (X, B, A) ein Tripel, dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,B,A)} H_n(B, A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, B) \xrightarrow{\partial_n(X,B,A)} \ldots,$$

wobei $i : (B, A) \to (X, A)$ und $j : (X, A) \to (X, B)$ die Inklusionen sind.

Beweis. Definiere den Randoperator $\partial_n(X, B, A)$ als Komposition

$$\partial_n(X, B, A) : H_n(X, B) \xrightarrow{\partial_n(X,B)} H_{n-1}(B) \xrightarrow{H_{n-1}(k)} H_{n-1}(B, A),$$

wobei $k : B \to (B, A)$ die Inklusion ist. Die Komposition $H_n(B, A) \to H_n(X, A) \to H_n(X, B)$ ist die Nullabbildung, da sie sich als $H_n(B, A) \to H_n(B, B) \cong \{0\} \to H_n(X, B)$ schreiben lässt. Die Exaktheit folgt aus den langen exakten Sequenzen der Paare (X, B), (X, A) und (B, A) und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X,B) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_n(B,A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n-1}(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n-1}(X) \\
& H_n(B) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_n(X,A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_{n-1}(B) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
H_n(A) \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_n(X) \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_n(X,B) \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_{n-1}(B,A).
\end{tikzcd}$$

Die Natürlichkeit von $\partial_n(X, B, A)$ folgt aus der Natürlichkeit von $\partial_n(X, B)$. $\square$

Definition 3.22. Sei X ein topologischer Raum mit Unterräumen X_1, X_2 und $X_0 = X_1 \cap X_2$, so dass die Inklusion $l : (X_1, X_0) \to (X, X_2)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus $H_n(l) : H_n(X_1, X_0) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X_2)$ induziert. Dann heisst $(X; X_1, X_2)$ eine *excisive Triade.*

Satz 3.23 (Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei $(X; X_1, X_2)$ eine excisive Triade und $A \subset X_0 = X_1 \cap X_2$. Dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz, die sogenannte* Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{aligned} \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X;X_1,X_2)} H_n(X_0, A) &\xrightarrow{H_n(i_1)\oplus H_n(i_2)} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \\ &\xrightarrow{H_n(j_1)-H_n(j_2)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X;X_1,X_2)} \ldots, \end{aligned}$$

wobei $i_{1,2} : (X_0, A) \to (X_{1,2}, A)$ und $j_{1,2} : (X_{1,2}, A) \to (X, A)$ die Inklusionenen sind.

Beweis. Definiere den Randoperator $\partial_n(X; X_1, X_2)$ als die Komposition

$$\begin{aligned} \partial_n(X; X_1, X_2) : H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(k)} H_n(X, X_2) &\xrightarrow{H_n(l)^{-1}} H_n(X_1, X_0) \\ &\xrightarrow{\partial_n(X_1,X_0,A)} H_{n-1}(X_0, A), \end{aligned}$$

wobei $k : (X, A) \to (X, X_2)$ die Inklusion und $\partial_n(X_1, X_0, A)$ der Randoperator zum Tripel (X_1, X_0, A) ist. Die Exaktheit folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_n(X_0, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_1, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_1, X_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(X_0, A) \arrow[d] \\
H_n(X_2, A) \arrow[r] & H_n(X, A) \arrow[r] & H_n(X, X_2) \arrow[r] & H_{n-1}(X_2, A),
\end{tikzcd}$$

dessen Zeilen exakte Sequenzen von Tripeln sind. $\square$

Bemerkung 3.24 (Mayer-Vietoris-Sequenz für Pushouts)**.** Seien X, X_1, X_2 topologische Räume und $f : X \to X_1$, $g : X \to X_2$ stetige Abbildungen, dann heisst $X_1 \cup_X X_2$ der *Pushout* von f und g und ist definiert durch $X_1 \cup X_2 / \sim$ mit $j_1 \circ f(x) \sim j_2 \circ g(x)$ für alle $x \in X$, wobei $j_{1,2} : X_{1,2} \to X_1 \cup_X X_2$ die Inklusionen sind. Ist zudem $X \subset X_1$ ein Deformationsretrakt von X_1 und abgeschlossen in X_1, dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz, die sogenannte *Mayer-Vietoris-Sequenz für Pushouts*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X;X_1,X_2)} H_n(X,\{x\}) \xrightarrow{H_n(f)\oplus H_n(g)} H_n(X_1,\{x\}) \oplus H_n(X_2,\{x\}) \xrightarrow{H_n(j_1)-H_n(j_2)} H_n(X_1 \cup_X X_2,\{x\}) \xrightarrow{\partial_n(X;X_1,X_2)} \ldots.$$

Für den (sehr technischen) Beweis verweise ich auf das Buch [9] von Lück.

Der Einhängungsisomorphismus

Der *Kegel* CX über einem topologischen Raum X ist der Quotient

$$(X \times [0,1])/(X \times \{1\}).$$

Die *Einhängung* ΣX ist Quotient von $(X \times [-1,1])/\sim$ unter der Äquivalenzrelation $(x,1) \sim (y,1)$ und $(x,-1) \sim (y,-1)$ für $x, y \in X$. Wir bezeichnen das Bild von $X \times [0,1]$ in ΣX mit C_+X und dasjenige von $X \times [-1,0]$ mit C_-X.

Satz 3.25. *Sei (X,x) ein topologischer Raum mit Basispunkt. Dann gibt es einen Isomorphismus, genannt* Einhängungsisomorphismus*,*

$$\sigma_n : H_{n-1}(X,\{x\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\Sigma X,\{x\})$$

Beweis. Identifiziere X mit $X \times \{0\}$ in ΣX. Dann können wir ΣX als Pushout $C_+X \cup_X C_-X$ schreiben, das heisst

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & C_+X \arrow[d, "j_2"] \\ C_-X \arrow[r, "j_1"'] & \Sigma X \end{tikzcd}.$$

Die Bemerkung 3.24 liefert uns folgende Mayer-Vietoris Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X,\{x\}) \xrightarrow{H_n(i_1)\oplus H_n(i_2)} H_n(C_-X,\{x\}) \oplus H_n(C_+X,\{x\}) \xrightarrow{H_n(j_1)-H_n(j_2)} H_n(\Sigma X,\{x\}) \xrightarrow{\partial_n} \ldots.$$

Die Inklusionen $\{x\} \to C_+X$ und $\{x\} \to C_-X$ sind Homotopieäquivalenzen. Daher ist $H_n(C_+X, \{x\}) \cong H_n(C_-X, \{x\}) \cong H_n(\{x\}, \{x\}) \cong \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und der Randoperator

$$\partial_n : H_n(\Sigma X, \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(X, \{x\})$$

ist ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$. □

Homologie der Sphäre

Für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum X und jeden Basispunkt $x \in X$ induzieren die Inklusion $X = (X, \emptyset) \to (X, \{x\})$ und die Projektion $X \to \{\bullet\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(\{\bullet\}) \oplus H_n(X, \{x\}).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus der langen exakten Sequenz von $(X, \{x\})$ und der Tatsache, dass die Komposition $H_n(\{x\}) \to H_n(X) \to H_n(\{\bullet\})$ ein Isomorphismus ist.

Für $d \geq 1$ ist $\mathbf{S}^d$ wegzusammenhängend und $\Sigma\mathbf{S}^{d-1} \cong \mathbf{S}^d$. Damit ist

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{S}^d) &\cong H_n(\Sigma\mathbf{S}^{d-1}) \cong H_n(\{\bullet\}) \oplus H_n(\Sigma\mathbf{S}^{d-1}, \{x\}) \\ &\cong H_n(\{\bullet\}) \oplus H_{n-1}(\mathbf{S}^{d-1}, \{x\}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Isomorphie wegen dem Einhängungsisomorphismus aus Satz 3.25 folgt. Nach wiederholter Anwendung dieses Satzes erhalten wir

$$H_n(\mathbf{S}^d) \cong H_n(\{\bullet\}) \oplus H_{n-d}(\mathbf{S}^0, \{x\}).$$

Mit dem Auschneidungsaxiom ist $H_{n-d}(\mathbf{S}^0, \{x\}) \cong H_{n-d}(\{\bullet\})$. Für eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizientengruppe $\mathbb{Z}$ erhalten wir für $n, d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$

$$H_n(\mathbf{S}^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = d = 0 \\ \mathbb{Z} & n = 0, d \neq 0 \text{ oder } n \neq 0, n = d \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zurück zum Beweis des Retraktionssatzes

Wir wenden nun die Homologiefunktoren H_{n-1} einer gewöhnlichen Homologietheorie mit Koeffizientengruppe $\mathbb{Z}$ auf unser Retraktionsdiagramm an, und erhalten

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \arrow[rr, "H_{n-1}(\mathbf{1})"] \arrow[dr, "H_{n-1}(i)"'] & & H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \\ & H_{n-1}(\mathbf{D}^n). \arrow[ur, "H_{n-1}(r)"'] & \end{tikzcd}$$

Für $n = 1$ respektive $n > 1$ ergibt das die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathbf{1}"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{respektive} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathbf{1}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}. \\ \{0\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

In beiden Fällen ist klar, dass das Diagramm nicht kommutativ sein kann. Damit haben wir den Retraktionssatz bewiesen, falls es eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizientengruppe $\mathbb{Z}$ gibt. Ein Beispiel für eine solche Homologietheorie ist die *singuläre Homologie*. Ihre Konstruktion und die Verifizierung der Axiome wird beispielsweise in [9] beschrieben.

Schlussbemerkungen

Definition des Abbildungsgrades mit Homologietheorie

In der neueren Literatur (zum Beispiel in [7]) wird der Grad von Abbildungen $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ oft mit Hilfe der Homologie definiert. Betrachte dazu eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizientengruppe $\mathbb{Z}$, dann ist $H_n(\mathbf{S}^n) = \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$. Damit entspricht jeder Homomorphismus $H_n(\mathbf{S}^n) \to H_n(\mathbf{S}^n)$ der Multiplikation mit einer ganzen Zahl.

Definition 3.26. Der *Grad* einer Abbildung $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ ist die ganze Zahl d, so dass $H_n(f)(x) = dx$, wobei $H_n(f) : H_n(\mathbf{S}^n) \to H_n(\mathbf{S}^n)$ der von f induzierte Homomorphismus ist.

Es stellt sich heraus, dass diese Definition äquivalent ist zur ursprünglichen Definition von Brouwer. Einige Eigenschaften, welche wir für den ursprünglichen Beweis des Fixpunktsatzes benötigten, lassen sich aus dieser neuen Sichtweise einfach herleiten.

- Die Homotopieinvarianz des Grades folgt direkt aus dem Axiom der Homotopieinvarianz der Homologietheorie. Die Umkehrung dieser Aussage – zwei Abbildungen $f, g : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ sind homotop, falls $D(f) = D(g)$ – ist ein fundamentales Theorem von Hopf[8].
- Die Identität $\mathbf{1} : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ hat den Grad 1, weil H_n ein Funktor ist und deshalb $H_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{H_n(\mathbf{S}^n)}$.
- Eine stetige Abbildung $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$, mit $f(\mathbf{S}^n)$ nicht dicht in $\mathbf{S}^n$ hat den

[8] Heinz Hopf, 1894-1971, schweizer Mathematiker deutscher Herkunft, 1931-1965 an der ETHZ tätig

Grad Null. Wähle einen Punkt $x \in \mathbf{S}^n \setminus f(\mathbf{S}^n)$, dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{S}^n \\ \mathbf{S}^n \setminus \{x\} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei $i : \mathbf{S}^n \setminus \{x\} \to \mathbf{S}^n$ die Inklusion ist.
Aber $H_n(\mathbf{S}^n \setminus \{x\}) = \{0\}$, da $\mathbf{S}^n \setminus \{x\}$ zusammenziehbar ist. Daraus folgt $H_n(f) = 0$.

Im konkreten Fall der singulären Homologie lässt sich auch das Korollar 2.17 recht anschaulich beweisen und der ursprüngliche Beweis von Brouwer kann geführt werden.

Andere Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Im Gegensatz zum geometrisch anschaulichen Beweis von Brouwer ist der Beweis mit Homologietheorie äusserst abstrakt. Nachdem die nötigen Konzepte erarbeitet sind, folgt er aber sehr elegant via dem Retraktionssatz. Neben diesen beiden, gibt es noch mindestens zwei grundsätzlich unterscheidbare Beweismethoden. Zum einen ist dies ein kombinatorischer Beweis von Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz[9] aus dem Jahr 1929, andererseits die analytischen Beweise wie der von Milnor[10] von 1978 und derjenige von Lax[11] von 1999. Siehe [8] für diese Beweismethoden und [4] für weitere Varianten analytischer Beweise.

Literatur

[1] L.E.J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, Vol 71, p 97–15, 1911

[2] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Boston, 1966

[3] H. Freudenthal, *The cradle of modern topology, according Brouwer's inedita*, Historia Mathematicae, Vol 2, p 495–502, 1975

[4] Vasile Istratescu, *Fixed point theory*, D. Reidel Publishing Company Dordrecht, 1981

[5] Ralph Stöcker und Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994

[9] Bronislav Knaster, 1893-1990; Kazimierz Kuratowski, 1896-1980; Stefan Mazurkiewicz, 1888-1945; drei polnische Mathematiker

[10] John Willard Milnor, 1931, amerikanischer Mathematiker

[11] Peter David Lax, 1926, ungarischer Mathematiker

[6] Tammo tom Dieck, *Topologie*, Walter de Gruyter GmbH Berlin, 2000

[7] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html

[8] Andrej Granas und James Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag New York, 2003

[9] Wolfgang Lück, *Algebraische Topologie*, Vieweg & Sohn Verlag Wiesbaden, 2005