

Calculs sur les matrices aléatoires et conjecture des moments en théorie des nombres

Paul-Olivier Dehaye
pdehaye@math.ethz.ch

ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Uni. Neuchâtel
28 Avril 2009

Aperçu

- ▶ Introduction aux connexions matrices aléatoires/théorie des nombres
- ▶ Problème des moments
- ▶ Méthode de Bump et Gamburd
- ▶ Moments de dérivées
- ▶ Conclusion

Riemann (Novembre 1859)

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Riemann définit

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Riemann (Novembre 1859)

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Riemann définit

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

quand $\Re s > 1$

Riemann (Novembre 1859)

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Riemann définit

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

quand $\Re s > 1$, obtient un **prolongement analytique** pour $s \in \mathbb{C}$, et montre une **équation fonctionnelle** entre $\zeta(s) \leftrightarrow \zeta(1 - s)$.

Riemann (Novembre 1859)

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Riemann définit

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

quand $\Re s > 1$, obtient un **prolongement analytique** pour $s \in \mathbb{C}$, et montre une **équation fonctionnelle** entre $\zeta(s) \leftrightarrow \zeta(1 - s)$.

Intérêts:

- ▶ Nombre de nombres premiers
- ▶ Densité des nombres premiers $\sim \frac{1}{\log n}$
- ▶ ...

Riemann (Novembre 1859)

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Riemann définit

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

quand $\Re s > 1$, obtient un **prolongement analytique** pour $s \in \mathbb{C}$, et montre une **équation fonctionnelle** entre $\zeta(s) \leftrightarrow \zeta(1-s)$.

Intérêts:

- ▶ Nombre de nombres premiers
- ▶ Densité des nombres premiers $\sim \frac{1}{\log n}$
- ▶ ...

“Hypothèse“: $\zeta(s) = 0 \Rightarrow \Re s = 1/2$ ou $\Re s \in -2\mathbb{N}_0$.

Idée de Pólya et Hilbert

Trouver un opérateur **self-adjoint** dont les valeurs propres $\{\gamma_i\} \subset \mathbb{C}$ correspondent aux zéros (non-triviaux) de la fonction ζ .

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_i\right) = 0$$

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert**
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Idée de Pólya et Hilbert

Trouver un opérateur **self-adjoint** dont les valeurs propres $\{\gamma_i\} \subset \mathbb{C}$ correspondent aux zéros (non-triviaux) de la fonction ζ .

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_i\right) = 0$$

Le **théorème spectral** correspond alors à l'hypothèse de Riemann.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Idée de Pólya et Hilbert

Trouver un opérateur **self-adjoint** dont les valeurs propres $\{\gamma_i\} \subset \mathbb{C}$ correspondent aux zéros (non-triviaux) de la fonction ζ .

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_i\right) = 0$$

Le **théorème spectral** correspond alors à l'hypothèse de Riemann.

Cette idée s'appliquerait à de larges classes de fonctions L pour retrouver l'**Hypothèse de Riemann généralisée**. Par exemple, pour les courbes elliptiques, variétés algébriques, caractères de Dirichlet, représentations de Galois, etc

On peut donc faire varier l'objet arithmétique considéré. La fonction zéta classique n'en est qu'**un exemple parmi beaucoup d'autres**.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-

Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-

Olshanski

Résultat

Conclusion

Conjecture de Montgomery-Odlyzko

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert

**Montgomery-
Odlyzko**

Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Riemann: La densité des zéros est de $\frac{\log T}{2\pi}$ dans la bande critique.

Conjecture de Montgomery-Odlyzko

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-Olshanski
Résultat

Conclusion

Riemann: La densité des zéros est de $\frac{\log T}{2\pi}$ dans la bande critique.

Conjecture (“Corrélation en paires”):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{\substack{\zeta(1/2+i\gamma)=0 \\ 0 \leq \gamma, \gamma' \leq T \\ \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T} \\ \gamma \neq \gamma'}} 1 = \int_{\alpha}^{\beta} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx$$

Conjecture de Montgomery-Odlyzko

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-Olshanski
Résultat

Conclusion

Riemann: La densité des zéros est de $\frac{\log T}{2\pi}$ dans la bande critique.

Conjecture (“Corrélation en paires”):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{\substack{\zeta(1/2+i\gamma)=0 \\ 0 \leq \gamma, \gamma' \leq T \\ \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T} \\ \gamma \neq \gamma'}} 1 = \int_{\alpha}^{\beta} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx$$

“Densité des paires de zéros dont l'écart est entre α et β fois l'écart moyen entre zéros consécutifs “

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert

Montgomery- Odlyzko

Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

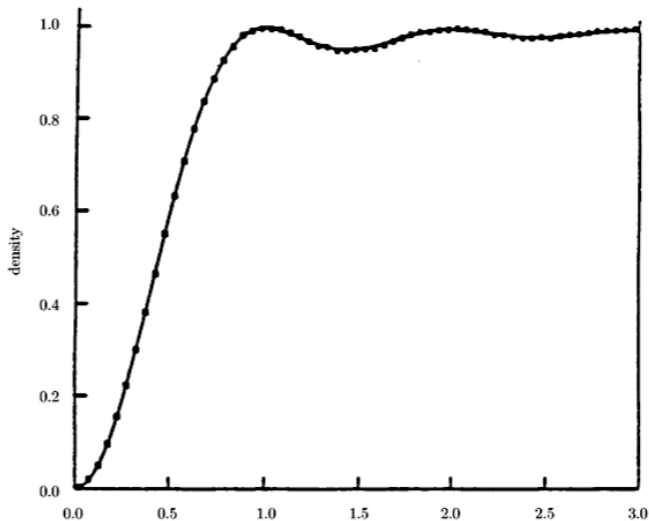


Figure: Corrélacion en paires obtenue à partir de 8×10^6 zeros au voisinage du 10^{20} ème, et la fonction $1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$.

Théorème (Montgomery): En supposant RH, les fonctionnelles

$$f \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T \log T} \sum_{\substack{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma \neq \gamma'}} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

pour $\tilde{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \gamma \log(\gamma)$, et

$$f \rightarrow \int_0^\infty f(x) \left[1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \right] dx$$

sont les mêmes, pour des fonctions dont la transformée de Fourier a support dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

**Montgomery-
Odlyzko**

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Théorème (Montgomery): En supposant RH, les fonctionnelles

$$f \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T \log T} \sum_{\substack{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma \neq \gamma'}} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

pour $\tilde{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \gamma \log(\gamma)$, et

$$f \rightarrow \int_0^\infty f(x) \left[1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \right] dx$$

sont les mêmes, pour des fonctions dont la transformée de Fourier a support dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Appelons ce noyau $W_\zeta(x) := 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

**Montgomery-
Odlyzko**

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Remarque de Dyson

GUE

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\langle \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \in \mathbb{R} \\ \text{eigenvalues}}} f(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}') \right\rangle_{GUE(N)} = \int_0^\infty f(x) W_{GUE}(x) dx$$

CUE/U(N)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{U(N)} \sum_{\substack{e^{i\theta}, e^{i\theta'} \\ \text{e.v. of } U}} f\left(\frac{N}{2\pi}(\theta - \theta')\right) dU = \int_0^\infty f(x) W_U(x) dx$$

$$\text{pour } W_\zeta(x) = W_U(x) = W_{GUE}(x) = 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

Dyson a fait la remarque à Montgomery que **tous ces noyaux sont les mêmes.**

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Principe

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème sur les matrices aléatoires

Principe

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème sur les matrices aléatoires



Conjecture en théorie des nombres

Principe

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème sur les matrices aléatoires



Conjecture en théorie des nombres
(+souvent résultats partiels)

Principe

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe**
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Théorème sur les matrices aléatoires



Conjecture en théorie des nombres
(+souvent résultats partiels)

De nombreuses vérifications numériques ont été faites
(surtout par Odlyzko, puis Farmer, Rubinstein, Watkins,...).

Principe

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème sur les matrices aléatoires



Conjecture en théorie des nombres
(+souvent résultats partiels)

De nombreuses vérifications numériques ont été faites
(surtout par Odlyzko, puis Farmer, Rubinstein, Watkins,...).

Ces conjectures vont un peu plus loin que l'Hypothèse de
Riemann, et concernent la **distribution verticale** des zéros.

Statistiques

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe

Statistiques

Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Statistiques (à normaliser)

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Statistiques (à normaliser)

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

- ▶ $n^{\text{ème}}$ corrélation: Prendre f telle que $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + r, \dots, x_n + r)$,

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Statistiques (à normaliser)

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

- ▶ $n^{\text{ème}}$ corrélation: Prendre f telle que $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + r, \dots, x_n + r)$,

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

- ▶ $k^{\text{ème}}$ voisin: $f \rightarrow \sum_{i < N} f(\tilde{\gamma}_{i+k} - \tilde{\gamma}_i)$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Statistiques (à normaliser)

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

- ▶ $n^{\text{ème}}$ corrélation: Prendre f telle que $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + r, \dots, x_n + r)$,

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

- ▶ $k^{\text{ème}}$ voisin: $f \rightarrow \sum_{i < N} f(\tilde{\gamma}_{i+k} - \tilde{\gamma}_i)$
- ▶ statistiques de niveau n :

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-
Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-
Olshanski

Résultat

Conclusion

Statistiques (à normaliser)

- ▶ corrélation en paires:

$$f \rightarrow \sum_{0 \leq \gamma, \gamma' \leq T} f(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}')$$

- ▶ $n^{\text{ème}}$ corrélation: Prendre f telle que $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + r, \dots, x_n + r)$,

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

- ▶ $k^{\text{ème}}$ voisin: $f \rightarrow \sum_{i < N} f(\tilde{\gamma}_{i+k} - \tilde{\gamma}_i)$
- ▶ statistiques de niveau n :

$$f \rightarrow \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}} f(\tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_n})$$

- ▶ ...

Familles

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles**
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Parfois l'ensemble de zéros considéré ne correspond pas qu'à une seule fonction L , mais à toute une **famille**.

Par exemple, $\{L(E, s)\}$ pour les fonctions L de courbes elliptiques, ordonnées par leur conducteur.

Familles

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Parfois l'ensemble de zéros considéré ne correspond pas qu'à une seule fonction L , mais à toute une **famille**.

Par exemple, $\{L(E, s)\}$ pour les fonctions L de courbes elliptiques, ordonnées par leur conducteur.

On peut dès lors regarder à d'autres statistiques, comme par exemple les zéros de k -ème ordre.

$$f \rightarrow \sum_{\substack{\text{famille} \\ \text{conducteur} \leq T}} f(\tilde{\gamma}_k)$$

Récapitulatif

On peut donc faire varier

- ▶ l'objet arithmétique
- ▶ parfois en grouper plusieurs en une famille
- ▶ la statistique étudiée

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Récapitulatif

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

On peut donc faire varier

- ▶ l'objet arithmétique
- ▶ parfois en grouper plusieurs en une famille
- ▶ la statistique étudiée

Du coup, il faut aussi faire varier l'ensemble de matrices à utiliser. Deux types d'ensembles de matrices existent: les **Gaussian ensembles** ou les **groupes de matrices compacts** ($U(N)$, $O(N)$, $Sp(2N)$, ...).

Récapitulatif

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

On peut donc faire varier

- ▶ l'objet arithmétique
- ▶ parfois en grouper plusieurs en une famille
- ▶ la statistique étudiée

Du coup, il faut aussi faire varier l'ensemble de matrices à utiliser. Deux types d'ensembles de matrices existent: les **Gaussian ensembles** ou les **groupes de matrices compacts** ($U(N)$, $O(N)$, $Sp(2N)$, ...).

On comprend conjecturellement beaucoup de ces combinaisons statistiques/objets arithmétiques, et beaucoup de ces conjectures ont en fait été prouvées par Katz et Sarnak sur les corps finis (situation classique en théorie des nombres).

Valeurs de ζ sur la droite critique $\Re s = 1/2$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

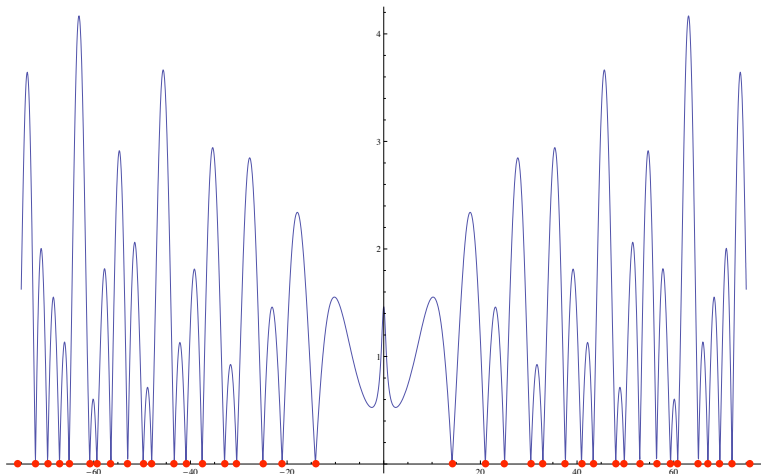


Figure: Graphe de $|\zeta(1/2 + it)|$ pour $t \in [-75, 75]$.

Keating-Snaith

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith**
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okoňukov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Keating-Snaith

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

- ▶ Valeurs propres de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Keating-Snaith

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

- ▶ Valeurs propres de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les zéros de polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Keating-Snaith

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

- ▶ Valeurs propres de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les zéros de polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les fonctions L

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Keating-Snaith

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

- ▶ Valeurs propres de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les zéros de polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les fonctions L

“Il y a de l'information au-delà du spectre des matrices”

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Keating-Snaith

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Keating et Snaith ont suggéré que tout cela pouvait être poussé beaucoup plus loin:

- ▶ Valeurs propres de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les zéros de polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les zéros de fonctions L
- ▶ Les polynômes caractéristiques de matrices aléatoires modèlent les fonctions L

“Il y a de l'information au-delà du spectre des matrices”

Deux manières d'utiliser cette idée:

- ▶ Valeur au point critique
- ▶ Moments

Valeurs de ζ sur la droite critique $\Re s = 1/2$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

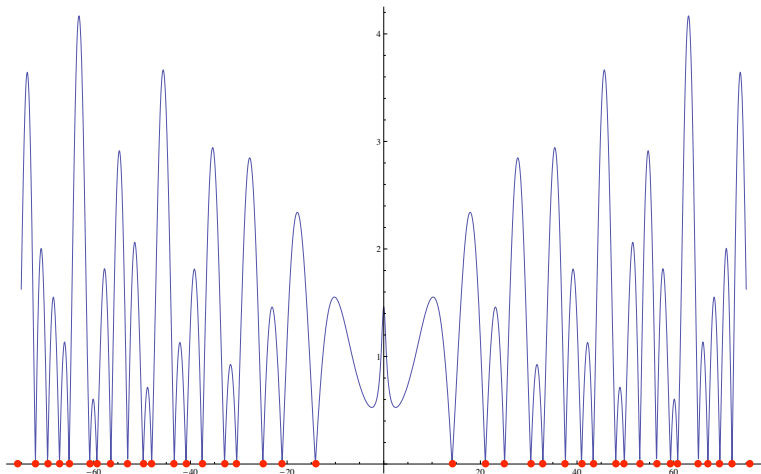


Figure: Graphe de $|\zeta(1/2 + it)|$ pour $t \in [-75, 75]$.

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Peut-on au moins **conjecturer** les autres valeurs de f ?

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Peut-on au moins **conjecturer** les autres valeurs de f ?

Conrey and Gosh: $f(3) = 42/9!$

Conrey and Gonek: $f(4) = 24024/16!$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Peut-on au moins **conjecturer** les autres valeurs de f ?

Conrey and Gosh: $f(3) = 42/9!$

Conrey and Gonek: $f(4) = 24024/16!$

Keating and Snaith: $f(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{U(N)} |\Lambda_U(1)|^{2k} dU$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Peut-on au moins **conjecturer** les autres valeurs de f ?

Conrey and Gosh: $f(3) = 42/9!$

Conrey and Gonek: $f(4) = 24024/16!$

Keating and Snaith: $f(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{U(N)} |\Lambda_U(1)|^{2k} dU$,
avec

$$\int_{U(N)} |\Lambda_U|^s dU = \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+s)}{(\Gamma(j+s/2))^2}.$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments

Théorème ($k = 1$: Hardy-Littlewood, $k = 2$: Ingham):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

où $a(k)$ est un **produit sur les premiers** qui est **connu**, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1/12$.

Peut-on au moins **conjecturer** les autres valeurs de f ?

Conrey and Gosh: $f(3) = 42/9!$

Conrey and Gonek: $f(4) = 24024/16!$

Keating and Snaith: $f(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{U(N)} |\Lambda_U(1)|^{2k} dU$,
avec

$$\int_{U(N)} |\Lambda_U|^s dU = \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+s)}{(\Gamma(j+s/2))^2}.$$

Conjecture: “La fonction ζ est (**en partie**) modélisée par des moyennes sur les **polynômes caractéristiques**”.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Interprétations

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

$$f(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{U(N)} |\Lambda_U(1)|^{2k} dU$$

Interprétations

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(\log T)^{k^2}} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = f(k)a(k),$$

$$f(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \int_{U(N)} |\Lambda_U(1)|^{2k} dU$$

Exemples:

- ▶ **Modèle hybride** (Gonek-Hughes-Keating) Remplace le produit sur tous les premiers par un produit partiel sur les premiers, et un produit partiel sur les zéros
- ▶ **Convergence mod-*** (Kowalski-Nikeghbali) Convergence renormalisée des fonctions caractéristiques de $\log |\zeta(1/2 + it)|$, $\log |\Lambda_U|$, etc

Moments de matrices

On définit

$$\Lambda_U(e^{i\theta}) = Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N \left(1 - e^{i(\theta_j - \theta)}\right)$$

le pol. car. de $U \in U(N)$, dont les valeurs propres sont $\{e^{i\theta_j}\}$.

Remarque: Il s'agit d'un produit sur les valeurs propres.

Le but est de calculer

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \quad \text{ou} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k^2}} \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)}$$

Il existe de nombreuses manières de calculer ces moyennes (intégrales de Selberg, identité de Heine, “approche probabiliste”, etc). Nous nous concentrons sur l’approche de Bump et Gamburd.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Définitions

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

Définitions

- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Une partition λ est une suite non-croissante d'entiers $(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}, 0, 0, \dots)$ finissant à 0. Sa **longueur** est le nombre de termes non-nuls, et son **poids** la somme des entrées.

Définitions

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

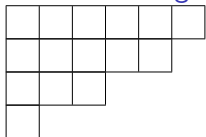
Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Une partition λ est une suite non-croissante d'entiers $(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}, 0, 0, \dots)$ finissant à 0. Sa **longueur** est le nombre de termes non-nuls, et son **poids** la somme des entrées.

On identifie une partition avec son **diagramme de Young**. Par

exemple, le diagramme de $(6, 5, 3, 1)$ est



son poids $|\lambda|$ est de $6 + 5 + 3 + 1 = 15$ et sa longueur $l(\lambda)$ de 4.

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Ils forment des familles de polynômes compatibles, familles indexées par des partitions:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Ils forment des familles de polynômes compatibles, familles indexées par des partitions:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

A l'exclusion de ce cas, ces polynômes sont des caractères irréductibles de $U(N)$, et

$$\left\langle s_{\lambda}(U) \overline{s_{\mu}(U)} \right\rangle_{U(N)} = \begin{cases} \delta_{\lambda\mu} & \text{si } N \geq l(\lambda) \\ 0 & \text{si } l(\lambda) > N \end{cases}$$

avec la convention que $s_{\lambda}(U) := s_{\lambda}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-

Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-

Olshanski

Résultat

Conclusion

Définitions (II)

Les polynômes de Schur sont des polynômes symétriques. Ils forment des familles de polynômes compatibles, familles indexées par des partitions:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N, 0).$$

Il y a une propriété de réduction:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = 0 \text{ si } l(\lambda) > N.$$

A l'exclusion de ce cas, ces polynômes sont des caractères irréductibles de $U(N)$, et

$$\left\langle s_\lambda(U) \overline{s_\mu(U)} \right\rangle_{U(N)} = \begin{cases} \delta_{\lambda\mu} & \text{si } N \geq l(\lambda) \\ 0 & \text{si } l(\lambda) > N \end{cases}$$

avec la convention que $s_\lambda(U) := s_\lambda(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$.

“Pour N large, les s_λ sont orthonormaux sur $U(N)$.”

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

La méthode de Bump et Gamburd

Bump et Gamburd utilisent l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_M) s_{\lambda^t}(y_1, y_2, \dots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

La méthode de Bump et Gamburd

Bump et Gamburd utilisent l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} s_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_M) s_{\lambda^t}(y_1, y_2, \dots, y_N) = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{s_{\lambda^t}(U)} = \det(\text{Id} + \overline{U})^{2k}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

La méthode de Bump et Gamburd

Bump et Gamburd utilisent l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_M) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \dots, y_N)} = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} &= \det(\text{Id} + \overline{U})^{2k} \\ &= \overline{\det(U)^k} |\det(\text{Id} + U)|^{2k} \\ &= \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} |\det(\text{Id} + U)|^{2k} \end{aligned}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

La méthode de Bump et Gamburd

Bump et Gamburd utilisent l'identité de Cauchy duale

$$\sum_{\lambda \text{ partitions}} \mathfrak{s}_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_M) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(y_1, y_2, \dots, y_N)} = \prod_{m,n}^{M,N} (1 + x_m y_n).$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)} &= \det(\text{Id} + \overline{U})^{2k} \\ &= \overline{\det(U)}^k |\det(\text{Id} + U)|^{2k} \\ &= \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} |\det(\text{Id} + U)|^{2k} \end{aligned}$$

ou (en remplaçant U par $-U$)

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}.$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

La méthode de Bump et Gamburd (II)

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs**
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda t}(U)}$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda t}(U)}$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda t}(U)}$$

Donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} = \mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}(\{1\}^{2k})$$

La méthode de Bump et Gamburd (II)

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}$$

Donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} = \mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}(\{1\}^{2k}),$$

qui peut être évalué de manière **combinatoire**, procure beaucoup d'expressions différentes et donne des prolongements analytiques (en k).

La méthode de Bump et Gamburd (II)

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} = (-1)^{kN} \mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U) \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda}(\{1\}^{2k}) \overline{\mathfrak{s}_{\lambda^t}(U)}$$

Donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} = \mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}(\{1\}^{2k}),$$

qui peut être évalué de manière **combinatoire**, procure beaucoup d'expressions différentes et donne des prolongements analytiques (en k).

De plus, ceci donne une interprétation au terme "géométrique" de Keating-Snaith comme une **dimension**.

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)
- ▶ déterminants

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)
- ▶ déterminants (vrai pour toutes valeurs des variables)

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)
- ▶ déterminants (vrai pour toutes valeurs des variables)
 - ▶ identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)
 - ▶ formule de Giambelli

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)
- ▶ déterminants (vrai pour toutes valeurs des variables)
 - ▶ identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)
 - ▶ formule de Giambelli
- ▶ la formule du hook-content

Evaluation

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs

Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Il existe beaucoup de manières différentes d'évaluer ces fonctions de Schur:

- ▶ (quotients de déterminants de Vandermonde)
- ▶ déterminants (vrai pour toutes valeurs des variables)
 - ▶ identité de Jacobi-Trudi (2 expressions)
 - ▶ formule de Giambelli
- ▶ la formule du hook-content
- ▶ $s_{\langle N^k \rangle}(\{1\}^{2k}) = 3\text{D-partitions dans une boîte } N \times k \times k$

Avantages

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

- ▶ Théorie très développée (cf. Macdonald)
- ▶ Fonctions symétriques en les valeurs propres (les nombres premiers, les zéros, etc)
- ▶ Le nombre de ces variables augmente
- ▶ Naturel d'intégrer des caractères par rapport à la mesure de Haar

Avantages

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

- ▶ Théorie très développée (cf. Macdonald)
- ▶ Fonctions symétriques en les valeurs propres (les nombres premiers, les zéros, etc)
- ▶ Le nombre de ces variables augmente
- ▶ Naturel d'intégrer des caractères par rapport à la mesure de Haar
- ▶ Vraie nécessité de reprouver des théorèmes de matrices aléatoires

Théorème de Conrey et Ghosh

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème: En assumant RH,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log T)^2 T} \int_0^T |\mathcal{Z}(t) \mathcal{Z}'(t)| dt = \frac{e^2 - 5}{4\pi},$$

où $\mathcal{Z}(t)$ est la fonction de Hardy, une fonction à valeur réelle sur les réels telle que $|\mathcal{Z}(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$.

Théorème de Conrey et Ghosh

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh**
- Conjecture
- Okoňkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Théorème: En assumant RH,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log T)^2 T} \int_0^T |\mathcal{Z}(t) \mathcal{Z}'(t)| dt = \frac{e^2 - 5}{4\pi},$$

où $\mathcal{Z}(t)$ est la fonction de Hardy, une fonction à valeur réelle sur les réels telle que $|\mathcal{Z}(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$.

Motivation: Déterminer la position des zéros de ζ' .

Théorème de Conrey et Ghosh

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Théorème: En assumant RH,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log T)^2 T} \int_0^T |\mathcal{Z}(t) \mathcal{Z}'(t)| dt = \frac{e^2 - 5}{4\pi},$$

où $\mathcal{Z}(t)$ est la fonction de Hardy, une fonction à valeur réelle sur les réels telle que $|\mathcal{Z}(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$.

Motivation: Déterminer la position des zéros de ζ' .

En poussant l'analogie matrices aléatoires/théorie des nombres, on obtient une **conjecture sur les matrices aléatoires**.

Conjecture sur les matrices aléatoires

On définit le **polynôme caractéristique de Hardy**

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Conjecture sur les matrices aléatoires

On définit le **polynôme caractéristique de Hardy**

$$V_U(\theta) = e^{iN(\theta+\pi)/2} e^{-i\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$$

de telle sorte que $V_U(\theta) \in \mathbb{R}$ et $\pm V_U(\theta) = |Z_U(\theta)|$ quand $\theta \in \mathbb{R}$.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Conjecture sur les matrices aléatoires

On définit le **polynôme caractéristique de Hardy**

$$V_U(\theta) = e^{iN(\theta+\pi)/2} e^{-i\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$$

de telle sorte que $V_U(\theta) \in \mathbb{R}$ et $\pm V_U(\theta) = |Z_U(\theta)|$ quand $\theta \in \mathbb{R}$.

Conjecture (moments joints):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \langle |V_U(0) V'_U(0)| \rangle_{U(N)} \stackrel{?}{=} \frac{e^2 - 5}{4\pi}$$

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-

Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-

Olshanski

Résultat

Conclusion

Conjecture sur les matrices aléatoires

On définit le **polynôme caractéristique de Hardy**

$$V_U(\theta) = e^{iN(\theta+\pi)/2} e^{-i\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$$

de telle sorte que $V_U(\theta) \in \mathbb{R}$ et $\pm V_U(\theta) = |Z_U(\theta)|$ quand $\theta \in \mathbb{R}$.

Conjecture (moments joints):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \langle |V_U(0)V'_U(0)| \rangle_{U(N)} \stackrel{?}{=} \frac{e^2 - 5}{4\pi}$$
$$\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log T)^2} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{Z}(t)\mathcal{Z}'(t)| dt = \frac{e^2 - 5}{4\pi} \right]$$

Remarque: Les expressions en matrices aléatoires ne sont plus multiplicatives en les valeurs propres.

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-

Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-

Olshanski

Résultat

Conclusion

Moments de dérivées

Pour la question générale des moments joints, il est naturel de considérer

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z'_U(0)|^{2h} \right\rangle_{U(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N (1 - e^{i(\theta_j - \theta)})$).

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments de dérivées

Pour la question générale des moments joints, il est naturel de considérer

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z'_U(0)|^{2h} \right\rangle_{U(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N (1 - e^{i(\theta_j - \theta)})$).

Ou encore

$$\left\langle |V_U(0)|^{2k} |V'_U(0)|^{2h} \right\rangle_{U(N)}$$

avec $V_U(\theta) = e^{iN(\theta+\pi)/2} e^{-i\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Moments de dérivées

Pour la question générale des moments joints, il est naturel de considérer

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} |Z'_U(0)|^{2h} \right\rangle_{U(N)}$$

(rappel: $Z_U(\theta) = \prod_{j=1}^N (1 - e^{i(\theta_j - \theta)})$).

Ou encore

$$\left\langle |V_U(0)|^{2k} |V'_U(0)|^{2h} \right\rangle_{U(N)}$$

avec $V_U(\theta) = e^{iN(\theta+\pi)/2} e^{-i\sum_{j=1}^N \theta_j/2} Z_U(\theta)$

Les deux s'obtiennent comme combinaisons linéaires de moments

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)}$$

Introduction

Riemann

Pólya-Hilbert

Montgomery-Odlyzko

Dyson

Principe

Statistiques

Familles

Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith

Interprétations

Approches

Bump-Gamburd

Définitions

Calculs

Evaluation

Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh

Conjecture

Okounkov-Olshanski

Résultat

Conclusion

Un théorème de Okounkov et Olshanski

Théorème binomial généralisé: Si les s_μ^* sont les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{s_\lambda(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)}{s_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu) \leq n}} \frac{s_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n) s_\mu(a_1, \dots, a_n)}{n \uparrow \mu}.$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
**Okounkov-
Olshanski**
Résultat

Conclusion

Un théorème de Okounkov et Olshanski

Théorème binomial généralisé: Si les \mathfrak{s}_μ^* sont les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu) \leq n}} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathfrak{s}_\mu(a_1, \dots, a_n)}{n \uparrow \mu}.$$

(Le cas $n = 1$ est le théorème binomial classique).

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
**Okounkov-
Olshanski**
Résultat

Conclusion

Un théorème de Okounkov et Olshanski

Théorème binomial généralisé: Si les \mathfrak{s}_μ^* sont les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu) \leq n}} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathfrak{s}_\mu(a_1, \dots, a_n)}{n \uparrow \mu}.$$

(Le cas $n = 1$ est le théorème binomial classique).

On peut évaluer

$$\mathfrak{s}_\mu^*(\{N\}^k) = (-1)^{|\mu|} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{H(\mu)}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
**Okounkov-
Olshanski**
Résultat

Conclusion

Un théorème de Okounkov et Olshanski

Théorème binomial généralisé: Si les \mathfrak{s}_μ^* sont les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{\substack{\mu \\ l(\mu) \leq n}} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathfrak{s}_\mu(a_1, \dots, a_n)}{n \uparrow \mu}.$$

(Le cas $n = 1$ est le théorème binomial classique).

On peut évaluer

$$\mathfrak{s}_\mu^*(\{N\}^k) = (-1)^{|\mu|} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{H(\mu)},$$

et donc $\mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)$ peut être exprimé comme

une somme sur des partitions.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
**Okounkov-
Olshanski**
Résultat

Conclusion

Un théorème de Okounkov et Olshanski

Théorème binomial généralisé: Si les \mathfrak{s}_μ^* sont les “shifted Schur functions”, alors

$$\frac{\mathfrak{s}_\lambda(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)}{\mathfrak{s}_\lambda(\{1\}^n)} = \sum_{l(\mu) \leq n} \frac{\mathfrak{s}_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathfrak{s}_\mu(a_1, \dots, a_n)}{n \uparrow \mu}.$$

(Le cas $n = 1$ est le théorème binomial classique).

On peut évaluer

$$\mathfrak{s}_\mu^*(\{N\}^k) = (-1)^{|\mu|} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{H(\mu)},$$

et donc $\mathfrak{s}_{\langle N^k \rangle}(1 + a_1, \dots, 1 + a_n)$ peut être exprimé comme

une somme sur des partitions.

“La série de Taylor d’un polynôme de Schur près de l’identité.”

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} \cdot \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_{\lambda} \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - ia_1, \dots, 1 - ia_r\} \right) \Big|_{a_j=0}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} \cdot \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_{\lambda} \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - ia_1, \dots, 1 - ia_r\} \right) \Big|_{a_j=0}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

$$|Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r = (-1)^{kN} \overline{\mathfrak{s}_{\langle kN \rangle}(U)} \cdot \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|} \mathfrak{s}_{\lambda^t}(U) \times \\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_{\lambda} \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - ia_1, \dots, 1 - ia_r\} \right) \Big|_{a_j=0}$$

et donc

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} = \\ \partial_1 \cdots \partial_r \mathfrak{s}_{\langle Nk \rangle} \left(\{1\}^{2k-r} \cup \{1 - ia_1, \dots, 1 - ia_r\} \right) \Big|_{a_j=0}.$$

Grâce à Okounkov-Olshanski, on a vite

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} = i^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Grâce à Okounkov-Olshanski, on a vite

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} = i^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu}$$

Proposition (Borodin, D.):

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Grâce à Okounkov-Olshanski, on a vite

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} = i^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu}$$

Proposition (Borodin, D.):

$$\sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} = \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Grâce à Okounkov-Olshanski, on a vite

Proposition: Quand $0 \leq r \leq 2k$,

$$\left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} = i^r r! \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu \vdash r} \frac{1}{H(\mu)^2} \frac{(-N \uparrow \mu)(k \uparrow \mu)}{2k \uparrow \mu}$$

Proposition (Borodin, D.):

$$\begin{aligned} \sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} \\ = \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \frac{(N \uparrow \mu) z^{|\mu|}}{H(\mu)} \\ = \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} s_{\mu}(\{z\}^N) \end{aligned}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Proposition (Borodin, D.):

$$\begin{aligned} & \sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \mathfrak{s}_{\mu}(\{z\}^N) \end{aligned}$$

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Proposition (Borodin, D.):

$$\begin{aligned} & \sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \mathfrak{s}_{\mu}(\{z\}^N) \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} {}_1F_1(-k; -2k; z \text{Id}_{N \times N}) \end{aligned}$$

Voir les travaux de Richards, Gross, Yan sur les fonctions hypergéométriques d'argument matriciel.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Proposition (Borodin, D.):

$$\begin{aligned} & \sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \mathfrak{s}_{\mu}(\{z\}^N) \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} {}_1F_1(-k; -2k; z \text{Id}_{N \times N}) \end{aligned}$$

Voir les travaux de Richards, Gross, Yan sur les fonctions hypergéométriques d'argument matriciel.

Ceci permet d'utiliser des représentations intégrales, des relations de récurrence ou même des équations différentielles pour réexprimer les résultats obtenus pour les coefficients de la fonction génératrice.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion

Proposition (Borodin, D.):

$$\begin{aligned} & \sum_r \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \left(\frac{Z'_U(0)}{Z_U(0)} \right)^r \right\rangle_{U(N)} \frac{(iz)^r}{r!} \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} \times \sum_{\mu} \frac{(-k \uparrow \mu)}{(-2k \uparrow \mu)} \frac{1}{H(\mu)} \mathfrak{s}_{\mu}(\{z\}^N) \\ &= \left\langle |Z_U(0)|^{2k} \right\rangle_{U(N)} {}_1F_1(-k; -2k; z \text{Id}_{N \times N}) \end{aligned}$$

Voir les travaux de Richards, Gross, Yan sur les fonctions hypergéométriques d'argument matriciel.

Ceci permet d'utiliser des représentations intégrales, des relations de récurrence ou même des équations différentielles pour réexprimer les résultats obtenus pour les coefficients de la fonction génératrice.

N'obtient pas le prolongement analytique "en r ", qui permettrait d'obtenir le $\frac{e^{2-5}}{4\pi}$.

Conclusion

Ces nouvelles conjectures en théorie des nombres étendent l'Hypothèse de Riemann plusieurs fois: on s'intéresse d'abord à la distribution verticale des zéros, ensuite aux valeurs de ζ entre ses zéros. (On étend aussi ces conjectures à d'autres fonctions L).

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Conclusion

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Ces nouvelles conjectures en théorie des nombres étendent l'Hypothèse de Riemann plusieurs fois: on s'intéresse d'abord à la distribution verticale des zéros, ensuite aux valeurs de ζ entre ses zéros. (On étend aussi ces conjectures à d'autres fonctions L).

Ceci présente de nouveaux problèmes sur les matrices aléatoires, pour lesquels il existe une multitude de méthodes de calculs.

Conclusion

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Ces nouvelles conjectures en théorie des nombres étendent l'Hypothèse de Riemann plusieurs fois: on s'intéresse d'abord à la distribution verticale des zéros, ensuite aux valeurs de ζ entre ses zéros. (On étend aussi ces conjectures à d'autres fonctions L).

Ceci présente de nouveaux problèmes sur les matrices aléatoires, pour lesquels il existe une multitude de méthodes de calculs.

Il manque cependant un ensemble cohérent de techniques qui permette de faire un parallèle direct avec le problème original en théorie des nombres.

Conclusion

Introduction

- Riemann
- Pólya-Hilbert
- Montgomery-Odlyzko
- Dyson
- Principe
- Statistiques
- Familles
- Récapitulatif

Moments

- Keating-Snaith
- Interprétations
- Approches

Bump-Gamburd

- Définitions
- Calculs
- Evaluation
- Avantages

Dérivées

- Conrey-Ghosh
- Conjecture
- Okounkov-Olshanski
- Résultat

Conclusion

Ces nouvelles conjectures en théorie des nombres étendent l'Hypothèse de Riemann plusieurs fois: on s'intéresse d'abord à la distribution verticale des zéros, ensuite aux valeurs de ζ entre ses zéros. (On étend aussi ces conjectures à d'autres fonctions L).

Ceci présente de nouveaux problèmes sur les matrices aléatoires, pour lesquels il existe une multitude de méthodes de calculs.

Il manque cependant un ensemble cohérent de techniques qui permette de faire un parallèle direct avec le problème original en théorie des nombres.

Des techniques pures de fonctions symétriques et théorie des représentations de groupes de Lie compact pourraient permettre de progresser dans cette direction.

Introduction

Riemann
Pólya-Hilbert
Montgomery-
Odlyzko
Dyson
Principe
Statistiques
Familles
Récapitulatif

Moments

Keating-Snaith
Interprétations
Approches

Bump-Gamburd

Définitions
Calculs
Evaluation
Avantages

Dérivées

Conrey-Ghosh
Conjecture
Okounkov-
Olshanski
Résultat

Conclusion