

Intégrales sur des groupes de Lie classiques

**Une introduction à la théorie
des matrices aléatoires**

18 mars 2005
Paul-Olivier Dehaye

$\zeta(\cdot)$ de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

On suppose $\text{Re } s > 1$:

$$\begin{aligned} &= \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \\ &= \prod_{p \text{ premier}} \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots \right) \end{aligned}$$

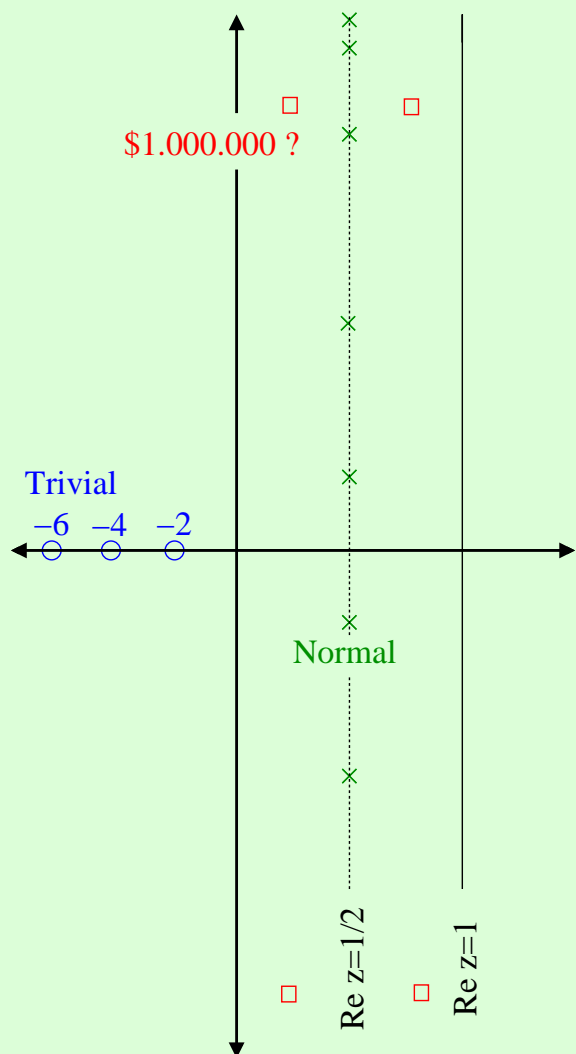
Equation fonctionnelle :

$$\tilde{\zeta}(s) = \tilde{\zeta}(1 - s)$$

avec

$$\tilde{\zeta}(s) = \underbrace{\frac{1}{2} s(s-1) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\pi^{s/2}}}_{C(s)} \zeta(s)$$

1.1 – Où sont les zéros ?



Bernhard Riemann
(1826-1866)

- Les zéros se notent $\rho = \sigma + i\gamma$.
- Zéros triviaux : $\rho = -2, -4, -6, \dots$.
- Hypothèse de Riemann : $\sigma = 1/2$.
- Fréquence des zéros :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

- Ecart moyen $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ diminue : $\frac{2\pi}{\ln n}$
- 10^{13} zéros connus (Xavier Gourdon 2004)

1.2 – Nombres premiers et zéros

Produit d'Hadamard :

$$\tilde{\zeta}(s) = -e^{-As} \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho} \left(= C(s) \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1} \right)$$



Dérivée logarithmique,
intégration autour de
résidus aux zéros

Formule explicite de von Mangoldt (1824-1868) :

$$\psi_0(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(1 - 1/x^2) - \sum_{\rho \text{ non trivial}} \frac{x^{\rho}}{\rho}$$

où

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k, p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\psi_0(x) = \left(\lim_{t \rightarrow x^+} \psi(t) + \lim_{t \rightarrow x^-} \psi(t) \right) / 2$$

1.3 – Que sait-on sur les zéros ?

Renormalisons les zéros :

$$\widehat{\gamma}_k := \gamma_k \ln \frac{\gamma_k}{2\pi} \quad \text{écart moyen des } \widehat{\gamma}_k = 1$$

Théorème (Montgomery 1973) : Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp}(\phi) \in (-1, 1)$ alors

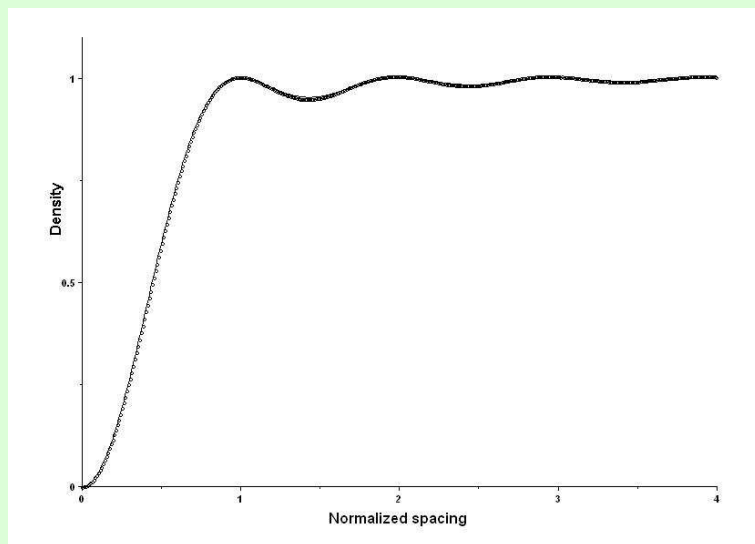
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \phi(\widehat{\gamma}_j - \widehat{\gamma}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_2(x) dx, \quad W_2(x) = 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

Conjecture : C'est vrai pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Odlyzko (197?) calcule des milliards de zéros à des hauteurs vertigineuses...



Andrew Odlyzko



$2 \cdot 10^9$ zéros autour du 10^{13} ème

1.4 – Corrélations entre intervalles

X_θ est le nombre de zéros sur l'intervalle $(\theta, \theta + \pi/4)$.

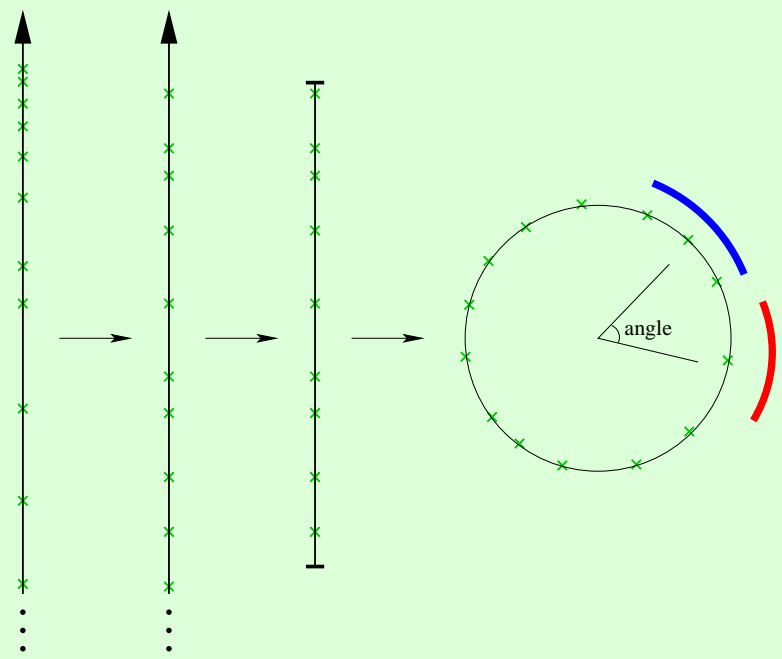
$$\text{Cov}(X_0, X_\theta) = \mathbb{E}(X_0 X_\theta) - \mathbb{E}(X_0)\mathbb{E}(X_\theta)$$

$$\text{Cor}(X_0, X_\theta) = \frac{\text{Cov}(X_0, X_\theta)}{\sigma_0 \sigma_\theta}$$

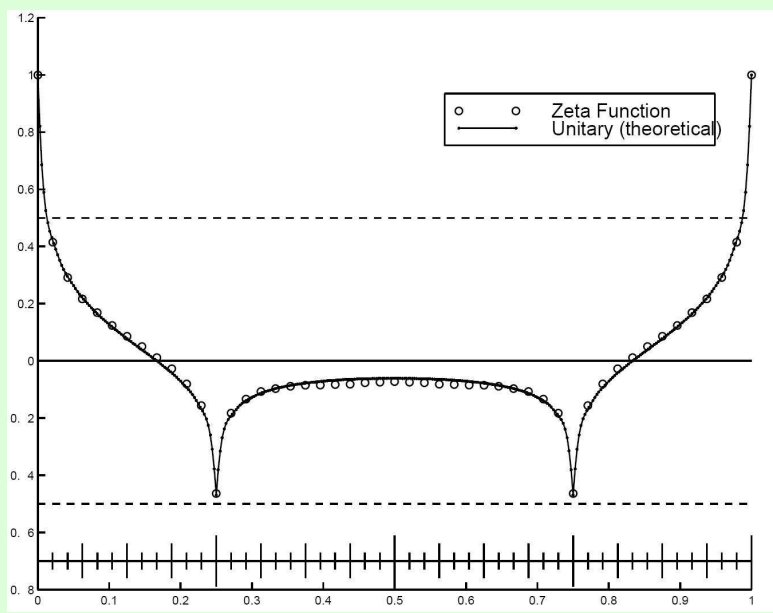


Persi Diaconis

0.25pt=0.694440.25pt



Dérouler l'axe critique. Erreur sur les arcs!!!???



Corrélation entre les intervalles $(0, \pi/4)$ et $(\theta, \theta + \pi/4)$ comme fonction de l'angle θ

Comment se l'expliquer ?

Pólya-Hilbert : Hypothèse de Riemann pourrait découler du théorème spectral pour un certain opérateur hermitien :

$$\widehat{\text{spec } \zeta} = 1/2 + i \text{spec } H$$

Ici, le spectre est soit l'ensemble des valeurs propres, soit l'ensemble des zéros !



George Pólya
(1887-1985)

2.1 – Matrices aléatoires

Théorie des matrices aléatoires : On ne connaît pas cet opérateur, mais il peut être pris au hasard dans un certain ensemble de matrices !

Idée :

$$\mathbb{E}_M \mathbf{f}(\text{spec } M) = \mathbf{f}(\text{spec } \zeta)$$

GUE(n) : Ensemble des matrices Hermitiennes $n \times n$ avec comme densité de probabilité :

$$\begin{pmatrix} * & * + i* & \cdots & * + i* \\ \overline{* + i*} & * & \cdots & * + i* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{* + i*} & \overline{* + i*} & \cdots & * \end{pmatrix} \quad (\text{les } * \text{ représentent des variables gaussiennes iid})$$

$$\text{Conjecture (GUE)} : \mathbb{E}_{\text{GUE}(n)} (\mathbf{f}(\text{spec } M)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n \leq T\}} f(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$$

f : fonction des différences.

Théorème (Zeév Rudnick - Peter Sarnak) : Vrai quand \hat{f} a son support dans un intervalle précis.

Généralisations :

Nick Katz-Peter Sarnak (2000)

- Définissent des familles de fonctions L et un type de symmétrie associé à chaque famille.
- Pour chaque type de symmétrie, il faut alors considérer des matrices aléatoires sur des groupes différents :

$$G = U(n), Sp(n), SO(n) \text{ avec mesure de Haar.}$$

- Prouvent la conjecture GUE dans le cas des corps finis, sans condition sur le support.

John Keating-Nina Snaith (2000) et autres :

- valeurs propres d'une matrice \leftrightarrow zéros de son polynôme caractéristique
- Pourquoi ne pas utiliser les valeurs des polynômes comme estimateurs de la valeur de ζ ?
- Permet de conjecturer les *moments asymptotiques* :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2\lambda} dt \sim C(\lambda)(\log T)^{\lambda^2}$$

obtenu à partir de

$$\int_0^T \zeta\left(\frac{1}{2} + it + \alpha_1\right) \cdots \zeta\left(\frac{1}{2} + it + \alpha_k\right) dt \leftrightarrow \int_{U(n)} \Lambda_g(e^{-\alpha_1}) \cdots \Lambda_g(e^{-\alpha_k}) dg$$

✓ ●	$\zeta(\cdot)$ de Riemann	2
✓ ●	Matrices aléatoires	8
✓ ●	Généralisations aux autres familles	10
⇒ ●	Intégrales sur G	12
●	Fonctions de Schur	13

Intégrales sur G

Soit $G(n) = U(n), SO(n), Sp(n)$ (n pair pour Sp). Le problème central est donc de calculer

$$\int_{G(n)} \mathbf{f}(g) dg = \int_{G(n)} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) dg$$

où f est symétrique en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres de g .

Exemple :

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$. Définissons $\mathbf{P}_r(g) = \text{tr}(g^r)$ et $\mathbf{P}_\mu(g) = \prod \mathbf{P}_{\mu_i}(g)$.

Théorème Soit $\mu \vdash k \leq n(2)$. Soit $\epsilon = 1$ quand $G(n) = Sp(n)$, 0 sinon. Alors

$$\int_{G(n)} \mathbf{P}_\mu(g) dg = \text{sgn}(\mu)^\epsilon \cdot N(\mu),$$

où $N(\mu)$ est le nombre de 2-partitions de k points préservées par une permutation dans \mathcal{S}_k de type μ .

Note : Ne dépend pas de n quand n est grand.

Fonctions de Schur

Plus généralement, donc, nous voudrions pouvoir calculer $\int_{G(n)} \mathbf{f}(g) dg$ pour n'importe quelle fonction de classe \mathbf{f} (=fonction des valeurs propres ici).



Issai Schur
(1875-1941)

Le théorème du caractère de Weyl nous fournit une base de l'espace des fonctions de classes, et même mieux, les restrictions des caractères irréductibles sur le tore maximal de $G(n)$:

$$\{s_{\mu}^{G(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \mu \in \text{racines du groupe de Lie } G(n) \text{ dans la chambre positive}\}$$

Note : Dans le cas du groupe $U(n)$, ces s_{μ} sont les polynômes de Schur classiques, liés aux représentations irréductibles du groupe symétrique (dualité de Schur-Weyl).

Théorème Soit $f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i t^i$, avec $f(t) = f(t^{-1})$. Prenons $\Phi_f(g) = \prod_{\lambda_i} e^{f(\lambda_i)}$. Sous condition que $n \geq |\mu|$,

$$\int_{G(n)} \mathbf{s}_{\mu}^{G(n)}(g) \Phi_f(g) dg = R(\mu, f) \int_{G(n)} \Phi_f(g) dg,$$

où

$$R(\mu, f) = \sum_{\nu \vdash |\mu|} \left(\prod_k \frac{c_k^{\nu(k)}}{\nu(k)!} \right) \chi_{\mu}(\nu) \quad \chi_{\mu}(\cdot) \text{ caractère irréductible de } \mathcal{S}_{|\mu|}$$

Notes :

- La constante $R(\gamma, f)$ ne dépend pas de n .
- Le théorème de Szegö, généralement formulé en termes de matrices de Toeplitz, nous dit

$$\int_{U(n)} \Phi_f(g) dg \sim \exp \left(nc_0 + \sum_j c_j c_{-j} \right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Basé sur des travaux de Daniel Bump et Persi Diaconis, des formules similaires existent pour les autres groupes.

- La convergence est superexponentielle dans le cas de $U(n)$, exponentielle sinon (Kurt Johansson 1997).

Merci !