Partielles Skript zu den Vorlesungen

Differentialgeometrie I/II

Urs Lang

ETH Zürich

Herbstsemester 2009/Frühjahrssemester 2010

Version vom 31. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

I Elementare Differentialgeometrie **1**

1 Kurven 1
2 Untermannigfaltigkeiten 6
3 Begriffe der inneren Geometrie 10
4 Krümmungsbegriffe für Hyperflächen 15
5 Spezielle Klassen von Flächen 20
6 Globale Flächentheorie 24
7 Der hyperbolische Raum 26

II Differentialtopologie **29**

8 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 29
9 Transversalität 34
10 Vektorbündel, Vektorfelder und Flüsse 39
11 Differentialformen 46
12 Lie-Gruppen 54

III Riemannsche Geometrie **61**

13 Riemannsche Mannigfaltigkeiten 61
14 Krümmung 66
15 Zweite Variation der Bogenlänge und Jacobifelder 67
16 Riemannsche Submersionen und Überlagerungen 68

Anhang **73**

A Mehrdimensionale Analysis 73
B Grundbegriffe der Topologie 74
C Multilineare Algebra 77

Literaturverzeichnis **81**

Kapitel I

Elementare Differentialgeometrie

1 Kurven

Im Folgenden bezeichnet I stets ein Intervall, d.h. eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir setzen meistens stillschweigend voraus, dass das Innere von I nicht leer sei. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine stetige Abbildung $c\colon I \to \mathbb{R}^n$, $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, heisst eine (*parametrisierte*) *Kurve* in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$), falls c wenigstens k-mal stetig differenzierbar ist. Ist I nicht offen, so bedeutet dies, dass sich c zu einer k-mal stetig differenzierbaren Abbildung auf einer offenen Menge $J \supset I$ fortsetzen lässt. Entsprechendes gilt für glatte, d.h. beliebig oft differenzierbare, Kurven $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Die *Länge* $L(c) \in [0, \infty]$ einer Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$L(c) := \int_I |\dot{c}(t)|\, dt.$$

Die Kurve c heisst *proportional zur Bogenlänge parametrisiert* bzw. *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $|\dot{c}|$ konstant ungleich null bzw. $|\dot{c}| \equiv 1$ ist; insbesondere ist c dann *regulär*, d.h. $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

1.1 Lemma (Parametrisierung nach Bogenlänge)
Die Kurve $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ sei regulär, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann existieren ein Intervall $\tilde{I}$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{I} \to I$, so dass $\tilde{c} := c \circ \varphi \in C^k(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

1.2 Definition (Frenet-Kurve, begleitendes Frenet-n-Bein)
Die Kurve $c \in C^n(I, \mathbb{R}^n)$ heisst eine *Frenet-Kurve*[1], falls für alle $t \in I$ die Vektoren $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind. Das begleitende

[1] Jean Frédéric Frenet (1816–1900)

Frenet-n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$, $e_i \colon I \to \mathbb{R}^n$, ist dann eindeutig bestimmt durch die folgenden Bedingungen:

(1) $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ für $t \in I$,

(2) $\operatorname{lin}\{e_1(t), \dots, e_i(t)\} = \operatorname{lin}\{\dot{c}(t), \dots, c^{(i)}(t)\}$ und $\langle e_i(t), c^{(i)}(t)\rangle > 0$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $t \in I$.

Hier bezeichnet lin die lineare Hülle, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Man erhält $e_1, \dots, e_{n-1}$ aus $\dot{c}, \dots, c^{(n-1)}$ mittels des Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, und e_n ist dann durch Bedingung (1) bestimmt. Es gilt $e_i \in C^{n-i}(I, \mathbb{R}^n)$ für $i = 1, \dots, n-1$, und $e_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

1.3 Definition (Frenet-Krümmungen)
Es sei $c \in C^n(I, \mathbb{R}^n)$ eine Frenet-Kurve mit begleitendem Frenet-n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$. Die Funktion $\kappa_i \colon I \to \mathbb{R}$,

$$\kappa_i(t) = \frac{1}{|\dot{c}(t)|}\langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t)\rangle,$$

heisst *i-te Frenet-Krümmung* von c für $i = 1, \dots, n-1$.

Es gilt $\kappa_i \in C^{n-i-1}(I, \mathbb{R})$; κ_{n-1} ist noch stetig. Sämtliche Frenet-Krümmungen sind invariant unter orientierungstreuen Umparametrisierungen: Für $\tilde{c} = c \circ \varphi$ mit $\varphi' > 0$ folgt

$$\tilde{\kappa}_i = \frac{1}{|\tilde{c}'|}\langle \tilde{e}_i', \tilde{e}_{i+1}\rangle = \frac{1}{|\dot{c} \circ \varphi||\varphi'|}\langle (\dot{e}_i \circ \varphi)\varphi', e_{i+1} \circ \varphi\rangle = \kappa_i \circ \varphi.$$

1.4 Satz (Frenet-Gleichungen)
Es sei $c \in C^n(I, \mathbb{R}^n)$ eine Frenet-Kurve mit Frenet-n-Bein $(e_1, \dots, e_n)$ und Frenet-Krümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$. Dann sind $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$, und

$$\frac{\dot{e}_i}{|\dot{c}|} = \begin{cases} \kappa_1 e_2 & \text{falls } i = 1, \\ -\kappa_{i-1}e_{i-1} + \kappa_i e_{i+1} & \text{falls } 2 \le i \le n-1, \\ -\kappa_{n-1}e_{n-1} & \text{falls } i = n. \end{cases}$$

Im Fall $n = 2$ ist $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ genau dann eine Frenet-Kurve, wenn c regulär ist. Dann heisst die Frenet-Krümmung

$$\kappa_{\text{or}} := \kappa_1 = \frac{1}{|\dot{c}|}\langle \dot{e}_1, e_2\rangle$$

auch die *ebene* oder *orientierte Krümmung* von c. Es gilt $e_1 = \dot{c}/|\dot{c}|$ und $\langle \dot{c}, e_2\rangle = 0$, somit

$$\kappa_{\text{or}} = \frac{\langle \ddot{c}, e_2\rangle}{|\dot{c}|^2} = \frac{\det(e_1, \ddot{c})}{|\dot{c}|^2} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{|\dot{c}|^3}.$$

Die Frenet-Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\frac{\dot{e}_1}{|\dot{c}|} = \kappa_{\mathrm{or}} e_2, \quad \frac{\dot{e}_2}{|\dot{c}|} = -\kappa_{\mathrm{or}} e_1.$$

Ist $\kappa_{\mathrm{or}}(t) \neq 0$, so berührt der *Schmiegkreis* mit Zentrum $c(t)+(1/\kappa_{\mathrm{or}}(t))e_2(t)$ und Radius $1/|\kappa_{\mathrm{or}}(t)|$ die Kurve c im Punkt $c(t)$ von zweiter Ordnung.

Im Fall $n = 3$ ist $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ genau dann eine Frenet-Kurve, wenn $\dot{c}$ und $\ddot{c}$ überall linear unabhängig sind. Die Vektoren e_2 bzw. $e_3 = e_1 \times e_2$ (Vektorprodukt) heissen (*Haupt-*)*Normale* bzw. *Binormale* von c. Die Frenet-Krümmungen

$$\kappa := \kappa_1 = \frac{1}{|\dot{c}|}\langle \dot{e}_1, e_2 \rangle > 0, \quad \tau := \kappa_2 = \frac{1}{|\dot{c}|}\langle \dot{e}_2, e_3 \rangle$$

heissen *Krümmung* und *Torsion* von c; letztere misst die Drehung der *Schmiegebene* $\mathrm{lin}\{\dot{c}, \ddot{c}\} = \mathrm{lin}\{e_1, e_2\}$ um e_1. Sowohl κ wie τ sind auch unter orientierungsumkehrenden Parametertransformationen invariant, τ ändert aber das Vorzeichen unter orientierungsumkehrenden Isometrien des $\mathbb{R}^3$. Die Frenet-Gleichungen für Kurven in $\mathbb{R}^3$ lauten

$$\frac{\dot{e}_1}{|\dot{c}|} = \kappa e_2, \quad \frac{\dot{e}_2}{|\dot{c}|} = -\kappa e_1 + \tau e_3, \quad \frac{\dot{e}_3}{|\dot{c}|} = -\tau e_2.$$

Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so folgt $2\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{\cdot} = 0$ und damit $e_2 = \ddot{c}/|\ddot{c}|$, also $\kappa = \langle \dot{e}_1, e_2 \rangle = |\ddot{c}|$.

1.5 Satz (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie)
Seien $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2} > 0$, $s_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) *$c(s_0) = x_0$,*

(2) *$(b_1, \ldots, b_n)$ ist das Frenet-n-Bein von c an der Stelle s_0,*

(3) *$\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ sind die Frenet-Krümmungen von c.*

Eine Frenet-Kurve $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ ist also im Fall $n = 2$ bzw. $n = 3$ durch κ_{or} bzw. κ und τ bis auf eine orientierungserhaltende Isometrie bestimmt. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden.

Wir beweisen noch zwei Sätze aus der globalen Kurventheorie.

Eine Kurve $c \in C^k([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) heisst *geschlossen*, falls c eine Fortsetzung $\bar{c} \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $\bar{c}(t + b - a) = \bar{c}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ besitzt. Ist zusätzlich $c|[a, b)$ injektiv, so heisst c *einfach geschlossen*.

Wir betrachten jetzt eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte und geschlossene Kurve $c \in C^2([0,L],\mathbb{R}^2)$ mit Frenet-2-Bein (e_1, e_2). Wir schreiben

$$e_1(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

für eine stetige (und somit C^1) Polarwinkelfunktion $\theta\colon [0,L] \to \mathbb{R}$; θ ist eindeutig bestimmt bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π. Dann ist

$$e_1'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s)e_2(s),$$

und mit der ersten Frenet-Gleichung folgt $\theta'(s) = \kappa_{\mathrm{or}}(s)$. Die *Totalkrümmung* von c erfüllt somit

$$\int_0^L \kappa_{\mathrm{or}}(s)\,ds = \int_0^L \theta'(s)\,ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi\varrho_c$$

für eine (von der Wahl von θ unabhängige) ganze Zahl ϱ_c, die *Umlaufzahl* von c (engl. *rotation index*).

1.6 Satz (Umlaufsatz)
Ist $c \in C^2([0,L],\mathbb{R}^2)$ nach Bogenlänge parametrisiert und einfach geschlossen, so gilt $\varrho_c = \pm 1$, also

$$\int_0^L \kappa_{or}(s)\,ds = \pm 2\pi.$$

Dieser Satz geht wohl auf Riemann zurück. Der in der Vorlesung gegebene Beweis stammt von H. Hopf[2].

Eine Folgerung ist, dass für die *totale Absolutkrümmung* von c

$$\int_0^L |\kappa_{\mathrm{or}}(s)|\,ds \geq 2\pi$$

gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c *konvex* ist, d.h. wenn das Bild $c([0,L])$ Rand einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ ist. Die Konvexität von c ist äquivalent dazu, dass κ_{or} das Vorzeichen nicht wechselt (Übung).

Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c \in C^3(I,\mathbb{R}^3)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt $\kappa = \kappa_1 = |\ddot{c}|$. Wir können somit die *Krümmung* einer beliebigen nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c \in C^2(I,\mathbb{R}^n)$ im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ durch

$$\kappa := |\ddot{c}|$$

erklären.

[2] Heinz Hopf (1894–1971), Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, Compositio Math. 2 (1935), 50–62.

1.7 Satz (Fenchel 1929)
Für die Totalkrümmmung einer geschlossenen, nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurve $c \in C^2([0, L], \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds \geq 2\pi,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn c eben und konvex ist.

Der Satz gilt genauso in $\mathbb{R}^n$ (Borsuk 1947).

2 Untermannigfaltigkeiten

2.1 Definition (Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$)
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst eine *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $p \in V$ und

$$\varphi(M \cap V) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \varphi(V).$$

Die Zahl $k := n - m$ heisst *Kodimension* von M in $\mathbb{R}^n$, die Abbildung φ eine *Schnittkarte* von M um p.

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$, $n \geq k$. Ein Punkt $p \in W$ heisst *regulärer* bzw. *singulärer Punkt* von F, falls das Differential dF_p surjektiv bzw. nicht surjektiv ist. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ heisst *regulärer Wert* von F, falls alle $p \in F^{-1}\{x\}$ reguläre Punkte von F sind; x heisst *singulärer Wert* von F, falls $F^{-1}\{x\}$ einen singulären Punkt von F enthält. Man beachte, dass insbesondere alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus F(W)$ reguläre Werte von F sind.

2.2 Satz (implizit definierte Untermannigfaltigkeiten)
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$, $n \geq k$, und sei $x \in F(W)$ ein regulärer Wert von F. Dann ist $M := F^{-1}\{x\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $m := n - k$.

In Analogie zu den regulären Kurven führen wir noch einen anderen Flächenbegriff ein.

2.3 Definition (reguläre m-Fläche/Immersion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $n \geq m$. Eine Abbildung $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ heisst eine *reguläre m-Fläche* (im Fall $m = 2$ eine *reguläre Fläche*) oder eine *Immersion*, falls df_x injektiv ist (also Rang m besitzt) für alle $x \in U$.

2.4 Satz (Immersionssatz)
Es sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Dann existiert für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subset U$ von x, so dass $f(U_x)$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Selbst wenn eine Immersion injektiv ist, so ist ihr Bild nicht unbedingt eine Untermannigfaltigkeit. Aber es gilt:

2.5 Satz (lokale Parametrisierungen)
Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jeden Punkt $p \in M$ offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $p \in f(U) = M \cap V$ gilt und $f\colon U \to M \cap V$ ein Homöomorphismus ist.

Dann heisst f eine *lokale Parametrisierung*, $f^{-1}\colon M\cap W \to U$ eine *Karte* von M um p.

2.6 Lemma (Parametertransformation/Kartenwechsel)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und seien $f\colon U \to f(U) \subset M$, $\tilde{f}\colon \tilde{U} \to \tilde{f}(\tilde{U}) \subset M$ zwei lokale Parametrisierungen mit $V := f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Dann ist $\varphi := f^{-1} \circ \tilde{f}\colon \tilde{f}^{-1}(V) \to f^{-1}(V)$ ein C^∞-Diffeomorphismus.

2.7 Definition (Tangentialraum)
Der *Tangentialraum* TM_p einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$ ist definiert durch $TM_p := df_x(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$ für eine (und somit jede) lokale Parametrisierung $f\colon U \to f(U) \subset M$ mit $f(x) = p$.

Der Tangentialraum TM_p ist ein m-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Das *Tangentialbündel* TM einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als die disjunkte Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times TM_p$$

und bildet eine $2m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (Übung). Das orthogonale Komplement $TM_p^\perp$ von TM_p in $\mathbb{R}^n$ heisst der *Normalenraum* von M in p,

$$TM^\perp := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times TM_p^\perp$$

das *Normalenbündel* von M. Unter der *Fusspunktprojektion* von TM bzw. $TM^\perp$ versteht man die Abbildung $\pi\colon TM \to M$, $\pi(p, X) = p$, bzw. $\pi\colon TM^\perp \to M$, $\pi(p, N) = p$.

Eine Abbildung $F\colon M \to \bar{M}$ zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten $M^m \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{M}^{\bar{m}} \subset \mathbb{R}^{\bar{n}}$ heisst *differenzierbar* im Punkt $p \in M$, falls $\bar{f}^{-1} \circ F \circ f$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar ist für lokale Parametrisierungen $f\colon U \to f(U) \subset M$ und $\bar{f}\colon \bar{U} \to \bar{f}(\bar{U}) \subset \bar{M}$ mit $f(x) = p$, $\bar{x} \in \bar{U}$ und $\bar{f}(\bar{x}) = F(p)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $F \circ f$ aufgefasst als Abbildung in den $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar ist. Das *Differential* von $F\colon M \to \bar{M}$ im Punkt p ist dann als die lineare Abbildung $dF_p\colon TM_p \to T\bar{M}_{F(p)}$ erklärt, für die

$$dF_p \circ df_x = d\bar{f}_{\bar{x}} \circ d(\bar{f}^{-1} \circ F \circ f)_x$$

gilt. Entsprechend sind auch glatte (d.h. überall beliebig oft differenzierbare) Abbildungen $F\colon M \to \bar{M}$ definiert, insb. glatte Abbildungen $F\colon M \to \mathbb{R}^{\bar{n}}$. Wir schreiben dann $F \in C^\infty(M, \bar{M})$ bzw. $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{\bar{n}})$.

Im Folgenden bezeichne $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und f eine Immersion einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$. Ein (glattes) *Vektorfeld X auf M* ist eine C^∞-Abbildung $X\colon M \to T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit $X(p) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$, d.h. $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ für die Fusspunktprojektion $\pi\colon T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld X heisst *tangential* bzw. *normal*, falls $X(p) \in \{p\} \times TM_p$, d.h. $X\colon M \to TM$, bzw. $X(p) \in \{p\} \times TM_p^\perp$, d.h. $X\colon M \to TM^\perp$. Ein *Vektorfeld X längs f* ist eine C^∞-Abbildung $X\colon U \to T\mathbb{R}^n$ mit $X(x) \in \{f(x)\} \times \mathbb{R}^n$ für alle $x \in U$; X heisst *tangential* bzw. *normal*, falls $X(x) \in \{f(x)\} \times df_x(\mathbb{R}^m)$ bzw. $X(x) \in \{f(x)\} \times df_x(\mathbb{R}^m)^\perp$. Im $\mathbb{R}^n$ nützt man oft die Möglichkeit, den Fusspunkt wegzulassen und z.B. ein normales Vektorfeld X auf M einfach als eine Abbildung $X\colon M \to \mathbb{R}^n$ mit $X(p) \in TM_p^\perp$ aufzufassen.

2.8 Definition (orientierbar)
Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst *orientierbar*, falls sie so durch die Bilder von lokalen Parametrisierungen überdeckt werden kann, dass alle möglichen Parametertransformationen eine positive Funktionaldeterminante haben. Ein maximales System $\{f_\alpha\colon U_\alpha \to M\}_{\alpha\in A}$ solcher Parametrisierungen (mit $\det d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta) > 0$ für $\alpha, \beta \in A$, $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$) heisst eine *Orientierung* von M. Die f_α heissen dann *positiv orientiert*.

2.9 Lemma (orientierbare Hyperflächen)
Eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld $N\colon M \to S^m$ gibt, d.h. $N(p) \in TM_p^\perp$ für alle $p \in M$.

2.10 Satz (Zerlegungssatz, Jordan–Brouwer)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale kompakte, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Dann besitzt $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ genau zwei Zusammenhangskomponenten A, B, es gilt $\partial A = \partial B = M$, und M ist orientierbar.

Für $m = 1$ ist dies der Jordansche Kurvensatz für einfach geschlossene C^∞-Kurven.

Beweisskizze: Wir zeigen zuerst, dass jeder Punkt $p \in M$ Randpunkt von genau zwei verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist. Wir nehmen an, dies sei falsch für ein $p \in M$. Mittels einer Schnittkarte von M um p finden wir dann eine einfach geschlossene Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ *transversal* zu M, d.h. mit $\dot c(t) \notin TM_{c(t)}$ falls $c(t) \in M$, so dass $c(I) \cap M = \{p\}$. Da M beschränkt ist, ist c homotop zu einer geschlossenen Kurve $\bar c\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar c(I) \cap M = \emptyset$. Dies steht im Widerspruch zur "Homotopieinvarianz der Schnittzahl modulo 2", die in Kapitel 9 (Transversalität) bewiesen werden wird.

Sei jetzt $p \in M$ fest und $q \in M$ ein weiterer Punkt. Dann gilt $p \in \partial A, \partial B$ und $q \in \partial A', \partial B'$ für Zusammenhangskomponenten $A \neq B$ und $A' \neq B'$ von $\mathbb{R}^n \setminus M$. Da M zusammenhängend ist, existiert eine Kurve $c_q \colon I \to M$ von p nach q. Sei $N_q \colon I \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Einheitsvektorfeld längs c_q normal zu M. Für $\epsilon > 0$ klein genug verlaufen die beiden Kurven $c_q^{\pm} \colon t \mapsto c_q(t) \pm \epsilon N_q(t)$ in $\mathbb{R}^n \setminus M$. Damit folgt entweder $A' = A$ und $B' = B$, oder $A' = B$ und $B' = A$. $\square$

3 Begriffe der inneren Geometrie

3.1 Definition (erste Fundamentalform)
Die *erste Fundamentalform g einer Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^n$ ordnet jedem Punkt $p \in M$ das durch

$$g_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle \quad \text{für } X, Y \in TM_p$$

definierte Skalarprodukt auf TM_p zu, d.h. g_p ist einfach die Einschränkung des Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^n$ auf TM_p. Die *erste Fundamentalform g einer Immersion* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ offen) ordnet jedem Punkt $x \in U$ das durch

$$g_x(\xi, \eta) := \langle df_x(\xi), df_x(\eta) \rangle \quad \text{für } \xi, \eta \in \mathbb{R}^m$$

definierte Skalarprodukt g_x auf $TU_x = \mathbb{R}^m$ zu.

Die erste Fundamentalform g heisst auch (*riemannsche*) *Metrik* oder *metrischer Tensor* von M bzw. f. Die Matrix $(g_{ij}(x))$ von g_x ist bezüglich der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_m)$ gegeben durch

$$g_{ij}(x) = g_x(e_i, e_j) = \langle df_x(e_i), df_x(e_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \right\rangle,$$

wobei $g_{ij} \in C^\infty(U)$.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $f\colon U \to f(U) \subset M$ eine lokale Parametrisierung (insb. eine Immersion). Die beiden ersten Fundamentalformen von f und M entsprechen sich wie folgt: Ist $x \in U$ und $f(x) = p$, so ist df_x eine Isometrie der euklidischen Vektorräume $(\mathbb{R}^m, g_x)$ und (TM_p, g_p). Die Menge $U \subset \mathbb{R}^m$, versehen mit der ersten Fundamentalform von f, bildet ein "Modell" für $f(U) \subset M$, in dem sich alle Grössen der inneren Geometrie von $f(U) \subset M$ berechnen lassen.

Beispiele:

1. *Beträge* und *Winkel*: Für $X, Y \in TM_p$, $x := f^{-1}(p)$, $\xi := (df_x)^{-1}(X)$ und $\eta := (df_x)^{-1}(Y)$ ist

$$|X| = \sqrt{g_p(X, X)} = \sqrt{g_x(\xi, \xi)} =: |\xi|_{g_x},$$
$$\cos \angle(X, Y) = \frac{g_p(X, Y)}{|X||Y|} = \frac{g_x(\xi, \eta)}{|\xi|_{g_x} |\eta|_{g_x}}.$$

2. *Länge* von Kurven $c\colon I \to f(U) \subset M$: Für $\gamma := f^{-1} \circ c\colon I \to U$ gilt $\dot{c}(t) = df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ und somit

$$L(c) = \int_I |\dot{c}(t)|\, dt = \int_I |\dot{\gamma}(t)|_{g_{\gamma(t)}}\, dt.$$

3. *m-dimensionaler Flächeninhalt* von Borelmengen $B \subset f(U) \subset M$:

$$A(B) = \int_{f^{-1}(B)} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx;$$

die *Gramsche Determinante* $\det(g_{ij}(x)) = \det(\langle f_i(x), f_j(x)\rangle)$ ist gleich dem Quadrat des Volumens des von den Vektoren $f_i(x) = (\partial f/\partial x^i)(x)$, $i = 1, \ldots, m$, aufgespannten m-dimensionalen Parallelotops. $A(B)$ ist unabhängig von der Wahl von f und wird auch mit $\int_B dA$ bezeichnet. Um den m-dimensionalen Flächeninhalt von ganz M zu berechnen, wählt man (endlich oder abzählbar viele) lokale Parametrisierungen $f_\alpha \colon U_\alpha \to f_\alpha(U_\alpha) \subset M$ und Borelmengen $B_\alpha \subset f_\alpha(U_\alpha)$ mit $A(B_\alpha) < \infty$, so dass $M = \bigcup_\alpha B_\alpha$ eine disjunkte Zerlegung ist. Der Flächeninhalt

$$A(M) = \sum_\alpha A(B_\alpha) = \sum_\alpha \int_{f_\alpha^{-1}(B_\alpha)} \sqrt{\det(g^\alpha_{ij}(x))}\, dx$$

erweist sich als unabhängig von den getroffenen Wahlen. Hier bezeichnet g^α die erste Fundamentalform von f_α. Für eine stetige Funktion $b \colon M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger definiert

$$\int_M b\, dA = \sum_\alpha \int_{f_\alpha^{-1}(B_\alpha)} b \circ f_\alpha(x) \sqrt{\det(g^\alpha_{ij}(x))}\, dx$$

das *Oberflächenintegral* von b.

3.2 Definition (isometrisch)
Zwei Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{\bar{n}}$ mit ersten Fundamentalformen g bzw. $\bar{g}$ heissen *isometrisch*, falls es einen Diffeomorphismus $F \colon M \to \bar{M}$ gibt mit $g_p(X, Y) = \bar{g}_{F(p)}(dF_p(X), dF_p(Y))$ für alle $p \in M$ und $X, Y \in TM_p$. Zwei Immersionen $f \colon U \to \mathbb{R}^n$, $\bar{f} \colon \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ ($U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^m$ offen) mit ersten Fundamentalformen g bzw. $\bar{g}$ heissen *isometrisch*, falls es einen Diffeomorphismus $\psi \colon U \to \bar{U}$ gibt mit $g_x(\xi, \eta) = \bar{g}_{\psi(x)}(d\psi_x(\xi), d\psi_x(\eta))$ für alle $x \in U$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$.

Wir verwenden die Schreibweise $g = F^*\bar{g}$ bzw. $g = \psi^*\bar{g}$ (zurückgeholte Metrik). Insbesondere sind $f, \bar{f}$ isometrisch, wenn $f = \bar{f} \circ \psi$ eine Umparametrisierung von $\bar{f}$ ist:

$$g(\xi, \eta) = \langle df(\xi), df(\eta)\rangle = \langle d\bar{f} \circ d\psi(\xi), d\bar{f} \circ d\psi(\eta)\rangle = \bar{g}(d\psi(\xi), d\psi(\eta)).$$

Es sei $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Wir betrachten jetzt zweite Ableitungen von f. Für das tangentiale Vektorfeld $\partial f/\partial x^i$ längs f ist $\partial^2 f/(\partial x^j \partial x^i)$ im Allgemeinen nicht tangential; wir bezeichnen mit

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x)\right)^{\mathrm{T}} \in df_x(\mathbb{R}^m)$$

den tangentialen Anteil.

3.3 Lemma (Christoffelsymbole)
Es sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)^{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$
$$\text{für} \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

wobei (g^{kl}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix bezeichnet.

Die Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ heissen *Christoffelsymbole* von f.

3.4 Definition (kovariante Ableitung, paralleles Vektorfeld)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $c\colon I \to M$ eine glatte Kurve in M und $X\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld längs c tangential an M, d.h. mit $X(t) \in TM_{c(t)}$ für alle $t \in I$. Die *kovariante Ableitung* $D_{d/dt} X$ von X nach t ist das durch

$$D_{d/dt} X(t) := \dot{X}(t)^{\mathrm{T}} \in TM_{c(t)} \quad \text{für } t \in I$$

definierte Vektorfeld längs c tangential an M. Das Vektorfeld X heisst *parallel* längs c, falls $D_{d/dt} X(t) = 0$ für alle $t \in I$, d.h. $\dot{X}(t) \in TM_{c(t)}^{\perp}$.

3.5 Satz (kovariante Ableitung)
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit erster Fundamentalform g, $c\colon I \to M$ eine glatte Kurve in M und $X, Y\colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei Vektorfelder längs c tangential an M. Es gelten die folgenden Eigenschaften.

(1)
$$D_{d/dt}(X + Y) = D_{d/dt} X + D_{d/dt} Y.$$

(2)
$$D_{d/dt}(h \cdot X) = \frac{d}{dt} h \cdot X + h \cdot D_{d/dt} X \quad (h \in C^\infty(I)).$$

(3)
$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g\big(D_{d/dt} X, Y\big) + g\big(X, D_{d/dt} Y\big).$$

(4) *Ist $c(I) \subset f(U)$ für eine lokale Parametrisierung $f\colon U \to f(U) \subset M$, und schreiben wir X in der Form*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(t) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t))$$

für $\gamma := f^{-1} \circ c$ *und* $\xi^1, \dots, \xi^m \in C^\infty(I)$*, so ist*

$$D_{d/dt}\, X(t) = \sum_{k=1}^{m} \left(\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \xi^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial f}{\partial x^k}(\gamma(t))$$

für alle $t \in I$*.*

Sind X, Y parallel längs c, so ist $g_{c(t)}(X(t), Y(t))$ konstant, da

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g\big(D_{d/dt}\, X, Y\big) + g\big(X, D_{d/dt}\, Y\big) = 0.$$

Insbesondere ist $|X| = \sqrt{g(X, X)}$ konstant.

3.6 Satz (Existenz und Eindeutigkeit paralleler Vektorfelder)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine Untermannigfaltigkeit,* $c\colon I \to M$ *eine glatte Kurve,* $0 \in I$*, und* $X_0 \in TM_{c(0)}$*. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes paralleles Vektorfeld* X *längs* c *mit* $X(0) = X_0$*.*

3.7 Definition (Geodätische)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine glatte Kurve $c\colon I \to M$ heisst eine *Geodätische*, falls $\dot{c}$ parallel ist längs c, d.h. $D_{d/dt}\, \dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Da $D_{d/dt}\, \dot{c}(t) = \ddot{c}(t)^{\mathrm{T}}$, ist c genau dann eine Geodätische, wenn $\ddot{c}(t) \in TM_{c(t)}^{\perp}$ für alle $t \in I$. Jede nicht-konstante Geodätische $c\colon I \to M$ ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert, da

$$\frac{d}{dt} g(\dot{c}, \dot{c}) = 2g\big(D_{d/dt}\, \dot{c}, \dot{c}\big) = 0.$$

Ist $f\colon U \to f(U) \subset M$ eine lokale Parametrisierung und $\gamma\colon I \to U$ eine glatte Kurve, so ist $c := f \circ \gamma\colon U \to M$ genau dann eine Geodätische, wenn

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{m} \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

für alle $t \in I$ und $k = 1, \dots, m$, kurz: $\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0$.

3.8 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine Untermannigfaltigkeit,* $p \in M$ *und* $X \in TM_p$*. Dann existiert genau eine auf einem maximalen offenen Intervall definierte Geodätische* $c\colon I \to M$ *mit* $c(0) = p$ *und* $\dot{c}(0) = X$*.*

3.9 Satz (Clairaut)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche und $c\colon I \to M$ eine nicht-konstante Geodätische. Für $t \in I$ bezeichne $r(t) > 0$ den Abstand von $c(t)$ zur Rotationsachse und $\theta(t) \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen $\dot{c}(t)$ und den orientierten Breitenkreisen. Dann ist $r(t)\cos\theta(t)$ konstant.

3.10 Satz (erste Variation der Bogenlänge)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $c_0\colon [a,b] \to M$ eine glatte Kurve mit $|\dot{c}_0| \equiv k \neq 0$. Ist $c\colon (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation von c_0, $c_s(t) := c(s,t)$, mit Variationsvektorfeld $V_s(t) := (\partial c/\partial s)(s,t)$, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c_s) = \frac{1}{k}\left(g\big(V_0(t), \dot{c}_0(t)\big)\Big|_a^b - \int_a^b g\big(V_0(t), D_{d/dt}\,\dot{c}_0(t)\big)\,dt \right).$$

Die Variation c von c_0 heisst *eigentlich*, falls $c_s(a) = c_0(a)$ und $c_s(b) = c_0(b)$ für alle $s \in (-\epsilon,\epsilon)$. Nach Satz 3.10 ist eine nicht-konstante glatte Kurve $c_0\colon [a,b] \to M$ genau dann eine Geodätische, wenn gilt: c_0 ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert und $(d/ds)|_{s=0} L(c_s) = 0$ für jede eigentliche Variation c von c_0. Insbesondere gilt: Ist c_0 proportional zur Bogenlänge parametrisiert und kürzeste Verbindung zwischen $p = c_0(a)$ und $q = c_0(b)$, d.h.

$$L(c_0) = d(p,q) := \inf\{L(\tilde{c}) :\ \tilde{c} \text{ ist Kurve von } p \text{ nach } q\},$$

so ist c_0 eine Geodätische. Existiert zu jedem Paar von Punkten $p, q \in M$ eine kürzeste Kurve von p nach q? Nach dem *Satz von Hopf–Rinow* (s. Kapitel III) lautet die Antwort auf diese Frage ja, falls M zusammenhängend und (M,d) vollständig ist als metrischer Raum.

4 Krümmungsbegriffe für Hyperflächen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit und $N\colon M \to S^m$ ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld, d.h. $N(p) \in TM_p^\perp$ für alle $p \in M$, vgl. Lemma 2.9. Jedes solche Vektorfeld heisst eine *Gauss-Abbildung* von M. Ist M orientiert, dann wählen wir N so, dass

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x), N(f(x))\right) > 0$$

für jede positive orientierte lokale Parametrisierung $f\colon U \to f(U) \subset M$ und für alle $x \in U$. Ist allgemein $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine Immersion einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$, so nennen wir $\nu\colon U \to S^m$ die *Gauss-Abbildung* von f, falls $\nu(x) \in df_x(\mathbb{R}^m)^\perp$ und

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x), \nu(x)\right) > 0$$

für alle $x \in U$. Wir betrachten das Differential

$$dN_p\colon TM_p \to TS^m_{N(p)} = TM_p \quad \text{bzw.} \quad d\nu_x\colon \mathbb{R}^m \to TS^m_{\nu(x)} = df_x(\mathbb{R}^m)$$

für $p \in M$ bzw. $x \in U$.

4.1 Definition (Weingarten-Abbildung/Formoperator)
Die lineare Abbildung $L_p\colon TM_p \to TM_p$, $L_p := -dN_p$, heisst *Weingarten-Abbildung* (oder *Form-Operator*) von M im Punkt p. Die lineare Abbildung $L_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $L_x := -(df_x)^{-1} \circ d\nu_x$, heisst *Weingarten-Abbildung* der Immersion f im Punkt $x \in U$.

Ist speziell f eine lokale Parametrisierung von M mit $f(x) = p$ und $\nu = N \circ f$, so gilt $L_x = (df_x)^{-1} \circ L_p \circ df_x$.

4.2 Lemma (L selbstadjungiert bzgl. g)
Die Weingarten-Abbildung L_p von M im Punkt p ist selbstadjungiert bezüglich g_p, d.h.

$$g_p(X, L_p(Y)) = g_p(L_p(X), Y) \quad \textit{für } X, Y \in TM_p.$$

Die Weingarten-Abbildung L_x einer Immersion f im Punkt x ist selbstadjungiert bezüglich g_x, d.h.

$$g_x(\xi, L_x(\eta)) = g_x(L_x(\xi), \eta) \quad \textit{für } \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

4.3 Definition (zweite Fundamentalform)
Die *zweite Fundamentalform h einer Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ordnet jedem Punkt $p \in M$ die durch

$$h_p(X,Y) := g_p(X, L_p(Y)) = -\langle X, dN_p(Y)\rangle \quad \text{für } X, Y \in TM_p$$

definierte symmetrische Bilinearform h_p auf TM_p zu. Die *zweite Fundamentalform h einer Immersion* $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ offen) ordnet jedem Punkt $x \in U$ die durch

$$h_x(\xi,\eta) := g_x(\xi, L_x(\eta)) = -\langle df_x(\xi), d\nu_x(\eta)\rangle \quad \text{für } \xi, \eta \in \mathbb{R}^m$$

definierte symmetrische Bilinearform h_x auf $\mathbb{R}^m$ zu.

Die Matrix $(h_{ij}(x))$ von h_x ist bezüglich der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_m)$ gegeben durch

$$h_{ij}(x) = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \frac{\partial \nu}{\partial x^j}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x), \nu(x) \right\rangle.$$

Die Matrix von L_x bezüglich $(e_1, \ldots, e_m)$ bezeichnen wir mit $(h^i{}_k(x))$; es gilt $(g_{ij})(h^j{}_k) = (h_{ik})$ und somit $(h^i{}_k) = (g^{ij})(h_{jk})$, d.h.

$$h^i{}_k = \sum_{j=1}^{m} g^{ij} h_{jk}.$$

4.4 Lemma (geometrische Bedeutung von h)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $X_0 \in TM_p$ mit $|X_0| = 1$. Dann gilt

$$h_p(X_0, X_0) = \langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle$$

für jede glatte Kurve $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X_0$.

Man kann die Kurve c so wählen, dass sie in einer Umgebung von p den Schnitt $M \cap (p + \operatorname{lin}\{X_0, N(p)\})$ parametrisiert. Dann ist $h_p(X_0, X_0) = \langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle$ gerade die orientierte Krümmung $\kappa_{\mathrm{or}}(0)$ von c in der Normalebene $p + \operatorname{lin}\{X_0, N(p)\}$ mit positiv orientierter Basis $(X_0, N(p))$; $h_p(X_0, X_0)$ heisst *Normalkrümmung* von M in Richtung X_0.

Da die Weingartenabbildung L_p selbstadjungiert ist bezüglich g_p, besitzt sie m relle Eigenwerte $\kappa_1 \leq \ldots \leq \kappa_m$, und es existiert eine Orthonormalbasis $(X_1, \ldots, X_m)$ von TM_p mit $L_p(X_j) = \kappa_j X_j$, also

$$h_p(X_i, X_j) = g_p(X_i, L_p(X_j)) = \kappa_j \delta_{ij}.$$

Insbesondere ist κ_j die Normalkrümmung von M in Richtung X_j.

4.5 Definition (Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen)
Die m reellen Eigenwerte $\kappa_1 \leq \ldots \leq \kappa_m$ von L_p heissen *Hauptkrümmungen* von M in p. Jeder Eigenvektor X von L_p mit $|X| = 1$ heisst eine *Hauptkrümmungsrichtung.*

Für Immersionen $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ gilt analog: L_x ($x \in U \subset \mathbb{R}^m$) hat m reelle Eigenwerte $\kappa_1 \leq \ldots \leq \kappa_m$, die *Hauptkrümmungen* von f, und es existiert eine Orthonormalbasis $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ von $\mathbb{R}^m$ *bezüglich* g_x mit $L_x(\xi_j) = \kappa_j \xi_j$, $h_x(\xi_i, \xi_j) = \kappa_j \delta_{ij}$.

Ein Punkt $x \in U$ heisst ein *Nabelpunkt* von f, falls $\kappa_1 = \ldots = \kappa_m$ in x.

4.6 Satz (Nabelpunktsatz)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine Immersion, $U \subset \mathbb{R}^m$ zusammenhängend, $m \geq 2$. Ist jeder Punkt $x \in U$ ein Nabelpunkt von f, so liegt $f(U)$ in einer m-Ebene oder m-Sphäre.

4.7 Definition (Gauss-Krümmung, mittlere Krümmung)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

$$K(p) := \det(L_p)$$

heisst *Gauss-Kronecker-Krümmung* (im Fall $m = 2$ *Gauss-Krümmung*) von M in p,

$$H(p) := \frac{1}{m} \operatorname{spur}(L_p)$$

mittlere Krümmung von M in p.

Analog sind $K(x) := \det(L_x)$ und $H(x) := \frac{1}{m} \operatorname{spur}(L_x)$ für eine Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ und $x \in U$ definiert. Es gilt

$$K = \kappa_1 \cdot \ldots \cdot \kappa_m = \det(h^i{}_k) = \det((g^{ij})(h_{jk})) = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})},$$
$$mH = \kappa_1 + \ldots + \kappa_m = \operatorname{spur}(h^i{}_k) = \sum_i h^i{}_i = \sum_{i,j} g^{ij} h_{ji}.$$

Im Folgenden schreiben wir f_i für $\partial f/\partial x^i$ und f_{ij} für $\partial^2 f/(\partial x^j \partial x^i)$, usw.

4.8 Lemma (Ableitungsgleichungen für Hyperflächen)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ mit Gauss-Abbildung $\nu\colon U \to S^m$. Dann gilt:
(1) *(Gauss'sche Ableitungsgleichung)*

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} f_k + h_{ij}\nu \quad (i, j = 1, \ldots, m),$$

(2) *(Weingarten'sche Ableitungsgleichung)*

$$\nu_k = -\sum_{i=1}^{m} h^i{}_k f_i = -\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} h_{jk} f_i \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Diese Gleichungen entsprechen den Frenet-Gleichungen der Kurventheorie.

4.9 Satz (Integrabilitätsbedingungen)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt für alle i, j, k:
(1) *(Gauss-Gleichungen)*

$$R^s{}_{kij} = h^s{}_i h_{kj} - h^s{}_j h_{ki} = \sum_{l=1}^{m} g^{sl}\big(h_{li} h_{kj} - h_{lj} h_{ki}\big)$$

für $s = 1, \ldots, m$, wobei

$$R^s{}_{kij} := \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^s_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^s_{ki} + \sum_{r=1}^{m}\big(\Gamma^r_{kj}\Gamma^s_{ri} - \Gamma^r_{ki}\Gamma^s_{rj}\big),$$

(2) *(Codazzi-Mainardi-Gleichung)*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} h_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^j} h_{ki} + \sum_{r=1}^{m}\big(\Gamma^r_{kj} h_{ri} - \Gamma^r_{ki} h_{rj}\big) = 0.$$

Für feste i, j, k ist (1) äquivalent zu

$$R_{lkij} := \sum_{s=1}^{m} g_{ls} R^s{}_{kij} = h_{li} h_{kj} - h_{lj} h_{ki} = \det \begin{pmatrix} h_{li} & h_{lj} \\ h_{ki} & h_{kj} \end{pmatrix}$$

für $l = 1, \ldots, m$.

4.10 Satz (Theorema Egregium von Gauss)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Dann gilt für die Gauss-Krümmung von f

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}.$$

Insbesondere ist K intrinsisch (d.h. aus den g_{ij} berechenbar).

4.11 Satz (g und h bestimmen f)
Es seien $f, \tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$ zwei Immersionen einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$. Gilt $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ auf U, so stimmen f und $\tilde{f}$ bis auf eine euklidische Bewegung $B\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ überein, d.h. $\tilde{f} = B \circ f$.

Existiert zu gegebenen $g_{ij}, h_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ eine Immersion mit diesen Fundamentalformen? Der *Hauptsatz der lokalen Flächentheorie* von O. Bonnet besagt Folgendes: *Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $(g_{ij}), (h_{ij}) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{m\times m})$ symmetrische Matrizenfunktionen, $(g_{ij}(x))$ positiv definit für alle $x \in U$, so dass die g_{ij} und h_{ij} die in Satz 4.9 genannten Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Dann gibt es zu vorgegebenen Punkten $x_0 \in U$, $p_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ und linear unabhängigen Vektoren $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle b_i, b_j\rangle = g_{ij}(x_0)$ eine offene und zusammenhängende Umgebung U' von x_0 in U und genau eine Immersion $f\colon U' \to \mathbb{R}^{m+1}$ mit $f(x_0) = p_0$, $f_i(x_0) = b_i$ für $i = 1, \dots, m$ und $(g_{ij}), (h_{ij})$ als erste bzw. zweite Fundamentalform, wobei h bezüglich der Gauss-Abbildung $\nu\colon U' \to S^m$ gebildet wird, für die $(b_1, \dots, b_m, \nu(x_0))$ positiv orientiert ist.* Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 4.11.

5 Spezielle Klassen von Flächen

Flächen mit konstanter Gauss-Krümmung

Wir betrachten Immersionen $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir Punkte in U mit (x, y) statt (x^1, x^2).

5.1 Satz (geodätische Parallelkoordinaten, Fermi-Koordinaten)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$.

(1) *Die erste Fundamentalform g von f erfüllt genau dann $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = 1$, wenn die Kurven $y \mapsto f(x_0, y)$ (x_0 fest) nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische sind, die jede der Kurven $x \mapsto f(x, y_0)$ (y_0 fest) orthogonal schneiden.*

(2) *Falls $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = 1$, so ist die Gauss-Krümmung von f gegeben durch*
$$K = -\frac{(\sqrt{g_{11}})_{22}}{\sqrt{g_{11}}}.$$

(3) *Ist zusätzlich $s \mapsto f(s, 0)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, so gilt $g_{11}(s, 0) = 1$, $g_{11,1}(s, 0) = g_{11,2}(s, 0) = 0$ und $\Gamma^k_{ij}(s, 0) = 0$ für alle i, j, k und für alle s.*

Koordinaten wie in (1) und (2) bzw. (3) heissen *geodätische Parallelkoordinaten* bzw. *Fermi-Koordinaten.*

5.2 Satz (Existenz geodätischer Parallelkoordinaten)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und
$$f\colon \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\epsilon, \epsilon)\} \to M$$
eine reguläre Kurve. Dann lässt sich f um $(0, 0)$ zu einer lokalen Parametrisierung von M mit $g_{12} = g_{21} = 0$ und $g_{22} = 1$ fortsetzen.

5.3 Satz (Flächen konstanter Krümmung in Fermi-Koordinaten)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion in Fermi-Koordinaten, wie in Satz 5.1(3), mit konstanter Gauss-Krümmung $K \equiv \kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist $g_{11}(x, y) = \mathrm{cs}_\kappa(y)^2$, wobei
$$\mathrm{cs}_\kappa(y) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}y) & \text{falls } \kappa > 0, \\ 1 & \text{falls } \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}y) & \text{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

5.4 Satz (konstante Gausskrümmung)
Es seien $M, \bar{M} \subset \mathbb{R}^3$ zwei Flächen mit derselben konstanten Gauss-Krümmung, d.h. $K_M \equiv \kappa \equiv K_{\bar{M}}$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann existieren zu jedem

Paar von Punkten $p \in M$, $\bar{p} \in \bar{M}$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von 0 und lokale Parametrisierungen $f\colon U \to f(U) \subset M$, $\bar{f}\colon U \to \bar{f}(U) \subset \bar{M}$ mit $f(0) = p$, $\bar{f}(0) = \bar{p}$ und $g = \bar{g}$. Insbesondere sind M und $\bar{M}$ lokal isometrisch.

Regelflächen

Eine Immersion einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ heisst eine *Regelfläche*, falls sie lokal um jeden Punkt eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$f\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad f(s,t) = c(s) + tX(s)$$

besitzt für eine Kurve c und ein Vektorfeld X längs c. Die Kurve c heisst eine *Leitkurve* von f. Die Geraden $f \circ \beta$, $\beta(t) := (s_0, t)$ (s_0 fest) heissen *Erzeugende*; sie sind *Asymptotenlinien* von f, d.h. es gilt $h(\dot{\beta}, \dot{\beta}) = 0$, da $h_{22} = \langle f_{22}, \nu \rangle = 0$. Anschaulich wird f durch die Bewegung einer Geraden im Raum erzeugt. Für Regelflächen gilt

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{-h_{12}^2}{\det g_{ij}} \leq 0,$$

mit $K \equiv 0$ genau dann, wenn ν längs den Erzeugenden konstant ist: $h_{12} = -\langle f_1, \nu_2 \rangle = 0$ ist äquivalent zu $\nu_2 = 0$, da $\langle \nu, \nu_2 \rangle = 0$ und $\langle f_2, \nu_2 \rangle = -h_{22} = 0$. Eine solche Regelfläche (mit $K \equiv 0$) heisst eine *Torse*.

Als Vorbereitung für Satz 5.6 beweisen wir ein Lemma, das oft zur Konstruktion spezieller Koordinaten verwendet wird.

5.5 Lemma
Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X_1, X_2\colon U \to \mathbb{R}^2$ zwei Vektorfelder, $x_0 \in U$, und seien $X_1(x_0), X_2(x_0)$ linear unabhängig. Dann existieren eine offene Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ und ein Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{U} \to \varphi(\tilde{U}) \subset U$ mit $x_0 \in \varphi(\tilde{U})$ und

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \lambda_i \cdot (X_i \circ \varphi),$$

$i = 1, 2$, für Funktionen $\lambda_i\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}$.

5.6 Satz (Torsen)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion mit $K \equiv 0$ ohne Flachpunkte ($x \in U$ heisst Flachpunkt, falls $\kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 0$). Dann ist f eine Torse.

Minimalflächen

Eine Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, heisst *minimal*, falls $H \equiv 0$.

5.7 Satz
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, eine Immersion mit m-dimensionalem Flächeninhalt $A(f) < \infty$. Ist $\varphi \in C_c^\infty(U)$, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A(f + s\varphi\nu) = -m \int_U \varphi H dA.$$

Insbesondere ist f genau dann minimal, wenn $(d/ds)|_{s=0} A(f^s) = 0$ für alle solchen Variationen $f^s := f + s\varphi\nu$ von f mit $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Eine parametrisierte Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ heisst *isotherm* oder *konform*, falls $(g_{ij}) = \lambda^2(\delta_{ij})$ für eine Funktion $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $z\colon U \to \mathbb{R}$ heisst *harmonisch*, wenn $\Delta z = z_{11} + z_{22} = 0$ auf U.

5.8 Lemma
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ isotherm, $(g_{ij}) = \lambda^2(\delta_{ij})$. Dann gilt $\Delta f = 2\lambda^2 H\nu$. Somit ist f genau dann minimal, wenn die Koordinatenfunktionen f^1, f^2, f^3 harmonisch sind.

Für den nächsten Satz verwenden wir die folgenden Bezeichnungen. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$, $f(x,y) = (f^1(x,y), f^2(x,y), f^3(x,y))$. Wir fassen dann U als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf und definieren $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\colon U \to \mathbb{C}^3$ durch

$$\varphi^j(x+iy) := \frac{\partial f^j}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial f^j}{\partial y}(x,y),$$

$j = 1, 2, 3$. Hier setzen wir nicht voraus, dass f eine Immersion sei. Trotzdem können wir sagen, f sei konform oder minimal ($H = 0$ in den Punkten, wo f immersiv ist).

5.9 Satz (Komplexifizierung)
Es gilt:

(1) *f ist genau dann konform, wenn $\sum_{j=1}^3 (\varphi^j)^2 = 0$ auf U.*

(2) *Ist f konform, so gilt: f ist genau dann eine Immersion, wenn $\sum_{j=1}^3 |\varphi^j|^2 > 0$ auf U, und f ist genau dann minimal, wenn $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ holomorph sind.*

(3) *Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Menge, und sind holomorphe Funktionen $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\colon U \to \mathbb{C}$ gegeben mit $\sum_{j=1}^3 (\varphi^j)^2 = 0$ und $\sum_{j=1}^3 |\varphi^j|^2 > 0$ auf U, so definiert $f = (f^1, f^2, f^3)\colon U \to \mathbb{R}^3$,*

$$f^j(x,y) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^{x+iy} \varphi^j(z)\, dz,$$

für $z_0 \in U$ eine konforme, minimale Immersion.

Wie findet man solche $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$? Seien $F\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $G\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph, FG^2 holomorph. Setze

$$\varphi^1 := \frac{1}{2}F(1-G^2), \quad \varphi^2 := \frac{i}{2}F(1+G^2), \quad \varphi^3 := FG;$$

dann folgt $\sum_{j=1}^{3}(\varphi^j)^2 = 0$, und $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ sind holomorph. Durch Einsetzen dieser φ^j in Satz 5.9(3) erhält man die sogenannnte *Weierstrass-Darstellung*. Jede konforme Minimalfläche f, die keine Ebene ist, lässt sich lokal so darstellen.

Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung

5.10 Satz (Alexandrov-Hopf)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine zusammenhängende, kompakte m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit konstanter mittlerer Krümmung H. Dann ist M eine Sphäre mit Radius $1/|H|$.

Der Satz ist falsch für *immersierte* Flächen im $\mathbb{R}^3$. Es existiert eine immersierte Fläche konstanter mittlerer Krümmung vom Typ des Torus[3].

[3]Henry C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pacific J. Math. 121 (1986), 193–243.

6 Globale Flächentheorie

6.1 Definition (geodätische Krümmung)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, $\gamma\colon I \to U$ eine Kurve, und $c = f \circ \gamma$ sei nach Bogenlänge parametrisiert. Setze $\bar{e}_1(s) := c'(s)$ und wähle $\bar{e}_2(s)$ so, dass $(\bar{e}_1(s), \bar{e}_2(s))$ eine *positiv* orientierte Orthonormalbasis von $df_{\gamma(s)}(\mathbb{R}^2)$ ist (d.h. äquivalent zu $(f_1(\gamma(s)), f_2(\gamma(s)))$). Dann heisst

$$\kappa_g(s) := \langle \bar{e}_1'(s), \bar{e}_2(s) \rangle = \left\langle D_{d/ds}\, c'(s), \bar{e}_2(s) \right\rangle$$

die *geodätische Krümmung* von c an der Stelle s.

6.2 Lemma
Seien f und $c = f \circ \gamma$ wie oben, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, f in geodätischen Parallelkoordinaten, d.h. $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$. Schreibe

$$\gamma'(s) = \cos\varphi(s) \frac{e_1}{\sqrt{g_{11}(\gamma(s))}} + \sin\varphi(s) e_2$$

für eine stetige Polarwinkelfunktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ (eindeutig bestimmt bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π). Dann gilt:

$$\kappa_g(s) = \varphi'(s) - \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial y}(\gamma(s)) \cdot x'(s).$$

6.3 Satz (Gauss-Bonnet, lokale Fassung)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\bar{D} \subset M$ eine kompakte Menge homöomorph zur Kreisscheibe, berandet von einer stückweise glatten und nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c\colon [0, L] \to M$ mit Aussenwinkeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in [-\pi, \pi]$. Die geodätische Krümmung κ_g von c werde bzgl. des zum Innern von $\bar{D}$ gerichteten Normalenvektors $\bar{e}_2$ gemessen. Dann gilt:

$$\int_{\bar{D}} K\, dA + \int_0^L \kappa_g\, ds + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 2\pi.$$

6.4 Korollar (Gauss, Theorema elegantissimum)
In einem geodätischen Dreieck $\bar{D} \subset M$ mit Innenwinkeln $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gilt

$$\int_{\bar{D}} K\, dA = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$$

Es sei jetzt $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte (und somit orientierbare) Fläche. Wähle eine Zerlegung $M = \bigcup_{j=1}^{f} \bar{D}_j$, $\bar{D}_j \subset M$ kompakt und homöomorph zur Kreisscheibe, mit stückweise glattem Rand $\partial \bar{D}_j$ (wie $\bar{D}$ in 6.3), so dass $\bar{D}_j \cap \bar{D}_{j'}$ für $j \neq j'$ entweder leer ist oder aus genau einer Ecke oder genau

einer Kante dieser Zerlegung besteht (*Polygonzerlegung* von M). Die *Euler-Charkteristik* von M ist die Zahl

$$\chi(M) = e - k + f,$$

wobei e bzw. k die Zahl der Ecken bzw. Kanten der Zerlegung bezeichnet.

6.5 Satz (Gauss-Bonnet, globale Fassung)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche. Dann gilt:

$$\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M).$$

Wir geben noch eine weitere Interpretation von $\chi(M)$ an mittels Indizes von Nullstellen von Vektorfeldern. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $X\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein (tangentiales, glattes) Vektorfeld. Alle *Singularitäten* (Nullstellen) von X seien isoliert. Definiere den *Index* $I(p) \in \mathbb{Z}$ von X im Punkt $p \in M$ wie folgt: Wähle $\bar{D} \subset M$ und $c\colon [0, L] \to M$ wie in Satz 6.3, so dass p im Innern von $\bar{D}$ liegt und $\bar{D} \setminus \{p\}$ keine Singularität von X enthält, und wähle ein Vektorfeld Y mit $Y(p) \neq 0$ für alle $p \in \bar{D}$ (z.B. $Y = f_1$ für eine lokale Parametrisierung $f\colon U \to f(U)$ von M mit $\bar{D} \subset f(U)$). Es sei $\varphi\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(s) = \angle(X(c(s)), Y(c(s)))$ für alle $s \in [0, L]$; das Vorzeichen von φ sei so gewählt, dass $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \pi/2$. Dann ist $I(p)$ erklärt durch

$$\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi I(p);$$

$I(p)$ erweist sich als unabhängig von den getroffenen Wahlen.

6.6 Satz (Poincaré-Hopf)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche, X ein Vektorfeld auf M mit endlich vielen Singularitäten $p_1, \ldots, p_s$. Dann gilt

$$\sum_{r=1}^{s} I(p_r) = \chi(M).$$

7 Der hyperbolische Raum

Wir betrachten den $\mathbb{R}^{m+1}$ zusammen mit der symmetrischen Bilinearform (*Lorentz-Skalarprodukt*)

$$\langle x, y\rangle_L := \left(\sum_{i=1}^{m} x^i y^i\right) - x^{m+1}y^{m+1}$$

(nicht degeneriert vom Typ $(m, 1)$).

$$\mathbb{R}^{m,1} := (\mathbb{R}^{m+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$$

heisst *Minkowski-* oder *Lorentz-Raum*. Ein Vektor v heisst *raumartig* bzw. *zeitartig* falls $\langle v, v\rangle > 0$ bzw. $\langle v, v\rangle < 0$, und v heisst *lichtartig* oder *isotrop* oder *Nullvektor* falls $\langle v, v\rangle_L = 0$, d.h. $(v^{m+1})^2 = \sum_{i=1}^{m}(v^i)^2$. Die Menge aller Nullvektoren heisst *Nullkegel*. Wir sind interessiert an *raumartigen* Hyperflächen $M^m \subset \mathbb{R}^{m,1}$, d.h. $\langle v, v\rangle_L > 0$ für alle $(p, v) \in TM$, $v \neq 0$. Die *erste Fundamentalform* $I_p = g_p$ in einem Punkt $p \in M$ ist die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ auf TM_p.

7.1 Definition (Hyperbolischer Raum)
Die raumartige Hyperfläche $H^m := \{x \in \mathbb{R}^{m,1} : \langle p, p\rangle_L = -1,\, p^{m+1} > 0\}$, zusammen mit ihrer ersten Fundamentalform g, heisst *hyperbolischer Raum*.

Sei jetzt $M \subset \mathbb{R}^{m,1}$ eine beliebige raumartige Hyperfläche. Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to f(U) \subset M$ eine lokale (oder globale) Parametrisierung von M, so ist die erste Fundamentalform von f gegeben durch $g_{ij} = \langle f_i, f_j\rangle_L$. Alle Definitionen und Formeln der *inneren* Geometrie von M bzw. f aus Abschnitt 3 übertragen sich unverändert auf die jetzt betrachtete Situation (Christoffelsymbole, kovariante Ableitung, Parallelität, Geodätische). Es existiert eine wohldefinierte *Gauss-Abbildung* $N\colon M \to H^m$, so dass $\langle v, N(p)\rangle_L = 0$ für alle $(p, v) \in TM$. Für f wie oben setzen wir wieder $\nu := N \circ f$. Die *Weingarten-Abbildung* und *zweite Fundamentalform* h von M bzw. f sind wie in Abschnitt 4 erklärt. Die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätbedingungen erhält man ebenfalls wie in Lemma 4.8 und Satz 4.9, wobei jetzt zwei Vorzeichen wechseln: Die *Gauss'sche Ableitungsgleichung* 4.8(1) lautet neu

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k f_k - h_{ij}\nu \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, m,$$

die *Gauss-Gleichungen* 4.9(1)

$$R^s{}_{kij} = -(h^s{}_i h_{kj} - h^s{}_j h_{ki}) = -\sum_{l=1}^{m} g^{sl}\big(h_{li}h_{kj} - h_{lj}h_{ki}\big)$$

für $s = 1, \ldots, m$, wobei ${R^s}_{kij}$ unverändert bleibt. Für feste i, j, k sind diese dann äquivalent zu

$$R_{lkij} := \sum_{s=1}^{m} g_{ls} {R^s}_{kij} = -(h_{li}h_{kj} - h_{lj}h_{ki}) = -\det \begin{pmatrix} h_{li} & h_{lj} \\ h_{ki} & h_{kj} \end{pmatrix}$$

für $l = 1, \ldots, m$. Ist $M = H^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$, so gilt $N(p) = p$ wie für die äussere Normale von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, also $L_p = -dN_p = -\operatorname{id}_{TH^2_p}$, $\det(L_p) = 1$. Für die Gauss-Krümmung von H^2 folgt somit

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})} = -\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = -1.$$

Die *Lorentz-Gruppe* ist definiert durch

$$\mathrm{O}(m,1) := \{A \in \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R}) : \langle Ax, Ay\rangle_L = \langle x, y\rangle_L\}.$$

Für $A \in \mathrm{O}(m,1)$ und $p \in H^m$ ist $Ap \in \pm H^m$. Man setzt

$$\mathrm{O}(m,1)_+ := \{A \in \mathrm{O}(m,1) : A(H^m) = H^m\}.$$

Für $A \in \mathrm{O}(m,1)_+$ ist dann die Einschränkung $A|_{H^m} \colon H^m \to H^m$ eine Isometrie.

7.2 Satz (freie Beweglichkeit)
Seien $p, q \in H^m$, $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Orthonormalbasis von TH^m_p und $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Orthonormalbasis von TH^m_q. Dann existiert ein $A \in \mathrm{O}(m,1)_+$ mit $Ap = q$ und $Av_i = w_i$, $i = 1, \ldots, m$.

D.h. H^m ist (wie $\mathbb{R}^m$ und S^m) ein „Raum freier Beweglichkeit“.

Sei $p \in H^m$, $v \in TH^m_p$, $\langle v, v\rangle_L = 1$. Die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c \colon \mathbb{R} \to H^m$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ verläuft in der von p und v aufgespannten Ebene und ist gegeben durch

$$c(s) = \cosh(s)p + \sinh(s)v.$$

Für den Abstand zweier Punkte $p, q \in H^m$ gilt

$$\cosh d(p,q) = -\langle p, q\rangle_L.$$

In der Vorlesung diskutierte Modelle des hyperbolischen Raumes: *Poincaré-(Kreisscheiben-)Modell*, *Beltrami-Klein-Modell*, *(Poincaré-)Halbraum-Modell*.

7.3 Satz (Hilbert ca. 1900)
Es existiert keine isometrische (C^3-)Immersion der hyperbolischen Ebene in den $\mathbb{R}^3$.

Kapitel II

Differentialtopologie

8 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

8.1 Definition (topologische Mannigfaltigkeit)
Eine *m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie und folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es einen Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ einer offenen Umgebung U von p auf eine offene Menge $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dann heisst $\varphi = (\varphi, U)$ eine *Karte* von M mit *Kartengebiet* U.

Ein System von Karten $\Phi = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ bildet einen *Atlas* der topologischen Mannigfaltigkeit M, falls $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$. Für $\alpha, \beta \in A$ heisst der Homöomorphismus

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Kartenwechsel zwischen φ_α und φ_β. Der Atlas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ heisst ein *C^r-Atlas* von M, $1 \le r \le \infty$, falls jeder Kartenwechsel $\varphi_{\beta\alpha}$ eine C^r-Abbildung ist. Wegen $(\varphi_{\beta\alpha})^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}$ ist dann jeder Kartenwechsel ein C^r-Diffeomorphismus. Allgemein nennen wir zwei Karten $(\varphi, U), (\psi, V)$ einer topologischen Mannigfaltigkeit *C^r-verträglich*, wenn $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ein C^r-Diffeomorphismus ist.

8.2 Definition (differenzierbare Mannigfaltigkeit)
Eine *C^r-Struktur* auf einer topologischen Mannigfaltigkeit ist ein C^r-Atlas, der *maximal* ist, d.h. nicht in einem grösseren C^r-Atlas enthalten. Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^r*, kurz *C^r-Mannigfaltigkeit*, ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer C^r-Struktur.

Jeder C^r-Atlas Φ einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist in einer eindeutig bestimmten C^r-Struktur $\bar{\Phi}$ enthalten. $\bar{\Phi}$ entsteht aus Φ durch Hinzu-

nahme aller Karten von M, die C^r-verträglich sind mit sämtlichen Karten aus Φ.

Für $1 \leq r < s \leq \infty$ ist jede C^s-Struktur ein C^r-Atlas und damit in einer eindeutig bestimmten C^r-Struktur enthalten; in diesem Sinn ist jede C^s-Mannigfaltigkeit auch eine C^r-Mannigfaltigkeit. Umgekehrt enthält für $1 \leq r < s \leq \infty$ jede C^r-Struktur eine C^s-Struktur (s. [Hi]). Insofern besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen C^r und C^s für $1 \leq r < s \leq \infty$.

Es gibt kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die überhaupt keine differenzierbare Struktur besitzen[1].

Sprechen wir von einer Karte einer *differenzierbaren* Mannigfaltigkeit M, so ist stets eine Karte aus der differenzierbaren Struktur von M gemeint.

8.3 Definition (C^r-Abbildung, C^r-Diffeomorphismus)
Seien M, N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heisst *r-mal stetig differenzierbar*, kurz C^r, falls für jeden Punkt $p \in M$ Karten (φ, U) von M und (ψ, V) von N mit $p \in U$ und $F(U) \subset V$ existieren, so dass die Verkettung

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

C^r ist. Jede solche Zusammensetzung heisst eine *Kartendarstellung* oder *lokale Darstellung* von F um p. Die Abbildung $F\colon M \to N$ heisst ein *C^r-Diffeomorphismus*, falls F bijektiv ist und F, F^{-1} beide C^r sind.

Ist F C^r, so ist *jede* Kartendarstellung von C^r, da alle Kartenwechsel von M und N C^r sind.

Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die verschiedene Diffeomorphismenklassen von differenzierbaren Strukturen besitzen. Auf der 7-dimensionalen Sphäre S^7 existieren z.B. genau 28 verschiedene solche Klassen[2].

8.4 Definition (Tangentialraum)
Sei M eine m-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, und sei $p \in M$. Auf der Menge aller Paare (φ, ξ), wobei φ eine Karte von M um p und $\xi \in \mathbb{R}^m$ ist, erklären wir eine Äquivalenzrelation so, dass $(\varphi, \xi) \sim (\psi, \eta)$ genau dann, wenn

$$d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\xi) = \eta.$$

Der *Tangentialraum* TM_p von M im Punkt p ist die Menge der Äquivalenzklassen.

[1] Michel A. Kervaire (1927–2007), A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 257–270.

[2] John W. Milnor, Ann. Math. 64 (1956), 399–405 und Amer. J. Math. 81 (1959), 962–972.

Wir bezeichnen mit $[\varphi, \xi] \in TM_p$ (oder genauer $[\varphi, \xi]_p$) die Äquivalenzklasse von (φ, ξ). Für eine feste Karte φ um p definiert $d\varphi_p([\varphi, \xi]) := \xi$ eine bijektive Abbildung $d\varphi_p \colon TM_p \to \mathbb{R}^m$. Dadurch wird auf TM_p eine m-dimensionale Vektorraumstruktur induziert, so dass $d\varphi_p$ zu einem Vektorraum-Isomorphismus wird. Ist ψ eine weitere Karte um p und $(\varphi, \xi) \sim (\psi, \eta)$, so gilt

$$d\psi_p \circ (d\varphi_p)^{-1}(\xi) = d\psi_p([\varphi, \xi]) = d\psi_p([\psi, \eta]) = \eta = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\xi).$$

Da ausserdem $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^m$ ist, ist die Vektorraumstruktur auf TM_p unabhängig von der Wahl von φ.

Die (disjunkte) Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} TM_p$$

heisst *Tangentialbündel* von M, die Abbildung $\pi \colon TM \to M$, $\pi(X) = p$ für $X \in TM_p$, *Fusspunktprojektion*.

Sei $F \colon M \to N$ eine C^r-Abbildung, und sei $p \in M$. Das *Differential*

$$df_p \colon TM_p \to TN_{F(p)}$$

von F im Punkt p ist definiert durch

$$df_p([\varphi, \xi]) = [\psi, d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\xi)]$$

für eine Kartendarstellung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ von F um p.

Sei jetzt M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Familie von C^∞-Funktionen $\{\lambda_\alpha \colon M \to [0,1]\}_{\alpha \in A}$ heisst eine *C^∞-Zerlegung* (oder *C^∞-Partition*) *der Eins*, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung besitzt, in der alle bis auf endlich viele λ_α konstant null sind und falls

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(p) = 1$$

für alle $p \in M$. Die Zerlegung der Eins $\{\lambda_\alpha\}$ heisst einer offenenen Überdeckung von M *untergeordnet*, falls für jedes $\alpha \in A$ der Träger $\mathrm{spt}(\lambda_\alpha)$ von λ_α ganz in einer der Überdeckungsmengen enthalten ist.

8.5 Satz
Zu jeder offenen Überdeckung $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ einer C^∞-Mannigfaltigkeit M existiert eine untergeordnete C^∞-Zerlegung der Eins.

8.6 Definition (Untermannigfaltigkeit)
Sei N eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heisst m-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* von N, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\psi \colon V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ von N gibt mit $p \in V$ und $\psi(M \cap V) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Dann heisst ψ eine *Schnittkarte* für M um p, und $k := n - m$ ist die *Kodimension* von M in N. Die Einschränkungen $\psi|_{M\cap V}$ aller Schnittkarten (ψ, V) für M bilden einen C^∞-Atlas von M, insbesondere ist M selbst eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

Sei $F\colon M^m \to N^n$ C^r. Ein Punkt $p \in M$ heisst *regulärer* bzw. *singulärer Punkt* von F, falls das Differential df_p surjektiv bzw. nicht surjektiv ist. Ein Punkt $q \in N$ heisst *regulärer Wert* von F, falls alle $p \in F^{-1}\{q\}$ reguläre Punkte von F sind, sonst *singulärer Wert* von F.

8.7 Satz
Sei $F\colon N^n \to Q^k$ eine C^∞-Abbildung. Ist $q \in Q$ ein regulärer Wert von F, so ist $M := F^{-1}\{q\}$ eine Untermannigfaltigkeit von N der Dimension $m = n - k \geq 0$.

Eine C^r-Abbildung $F\colon M \to N$ heisst eine (C^r-)*Immersion* bzw. *Submersion*, falls df_p injektiv bzw. surjektiv ist für alle $p \in M$. Eine *Einbettung* $F\colon M \to N$ ist eine Immersion mit der Eigenschaft, dass $F\colon M \to F(M)$ ein Homöomorphismus ist.

8.8 Satz
Das Bild $F(M)$ einer Einbettung $F\colon M \to N$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

8.9 Satz
Sei M^m eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und eine (C^∞-)Einbettung $F\colon M \to \mathbb{R}^n$.

Der Satz gilt auch für $n = 2m + 1$, s. [Hi], und sogar für $n = 2m$ und M nicht notwendig kompakt[3].

Wir diskutieren noch Tangentialvektoren als Derivationen. Sei M C^∞, $p \in M$. Eine lineare Abbildung $X\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ heisst eine *Derivation* im Punkt p, falls für alle $f, g \in C^\infty(M)$ die Produkteregel (Leibniz-Regel)

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$$

gilt. Ist (φ, U) eine Karte um p, so hat man kanonische Derivationen $(\partial/\partial\varphi^j)|_p$ in p, $j = 1, \ldots, m$, definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Big|_p(f) := \frac{\partial f}{\partial\varphi^j}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

[3]Hassler Whitney (1907–1989), The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. Math. 45 (1944), 220–246.

8.10 Satz
Die Menge aller Derivationen in $p \in M$ bildet einen m-dimensionalen Vektorraum. Ist φ eine Karte um p, so ist $((\partial/\partial\varphi^1)|_p, \ldots, (\partial/\partial\varphi^m)|_p)$ eine Basis, und jede Derivation X in p ist von der Gestalt

$$X = \sum_{j=1}^{m} X(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p .$$

Für eine C^∞-Mannigfaltigkeit M identifizieren wir den Tangentialraum TM_p (Definition 8.4) mit dem Vektorraum aller Derivationen in $p \in M$ so, dass

$$[\varphi, \xi] = X = \sum_{j=1}^{m} \xi^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p$$

für alle $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$ und alle Karten φ von M um p.

9 Transversalität

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ hat *Mass null*, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $C_i \subset \mathbb{R}^m$ exisiert mit $A \subset \bigcup_i C_i$ und $\sum_i |C_i| < \epsilon$, wobei $|C| := \lambda^m$ für $C = [x^1, x^1 + \lambda] \times \cdots \times [x^m, x^m + \lambda]$. Vereinigungen von abzählbar vielen Mengen vom Mass 0 haben Mass 0. Ist $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F\colon V \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung, und hat $A \subset V$ Mass 0, so hat auch $F(A)$ Mass 0. (V ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Kugeln $\bar{B}_j$. Betrachte Überdeckungen $A \cap \bar{B}_j \subset \bigcup_i C_i \subset \bar{B}'_j \subset V$ mit $\bar{B}'_j$ kompakt; $F|_{\bar{B}'_j}$ ist Lipschitz da F C^1, somit hat $F(A \cap \bar{B}_j)$ Mass 0.)

9.1 Definition (Mass null)
Eine Teilmenge A einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^m hat *Mass null*, wenn für jede Karte (φ, U) von M die Menge $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ Mass null hat.

Es folgt, dass A genau dann Mass 0 hat, wenn ein (o.B.d.A. abzählbarer) Atlas von M existiert, so dass $\varphi(A \cap U)$ Mass 0 hat für jede Karte (φ, U) aus diesem Atlas.

9.2 Satz (A. P. Morse 1939, A. Sard 1942)
Ist $F\colon M^m \to N^n$ eine C^r-Abbildung mit $r > \max\{0, m - n\}$, dann hat die Menge der singulären Werte von F Mass null in N.

Um eine Anwendung dieses Satzes zu zeigen, führen wir den Begriff einer Mannigfaltigkeit mit Rand ein. Ein *Halbraum* von $\mathbb{R}^m$ ist eine Menge der Gestalt

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : \ \lambda(x) \geq 0\}$$

für eine lineare Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Gemäss dieser Definition ist auch $H = \mathbb{R}^m$ ein Halbraum ($\lambda \equiv 0$). Eine m-dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit M mit Rand* ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie und folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es einen Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset H$ einer offenen Umgebung U von p auf eine in einem Halbraum $H \subset \mathbb{R}^m$ offene Menge $\varphi(U)$ (induzierte Topologie!). Dann heisst $\varphi = (\varphi, U)$ eine *Karte* von M mit Kartengebiet U. Die Begriffe *C^r-Atlas*, *C^r-Struktur* und *C^r-Mannigfaltigkeit mit Rand* sind dann analog zum unberandeten Fall erklärt. Der *Rand* von M ist die Menge

$$\partial M := \{p \in M : \ \varphi(p) \in \partial H \text{ für eine Karte } \varphi\colon U \to \varphi(U) \subset H \text{ um } p\}.$$

Ist $p \in \partial M$, so ist $\varphi(p) \in \partial H$ für *jede* Karte $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset H$ um p. (Für topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand folgt dies aus dem *Satz über die Invarianz des Gebiets*: *Ist $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\psi\colon V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ ein*

Homöomorphismus, so ist $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ offen. Im C^r-Fall, $r \geq 1$, verwendet man einfacher den Satz über die lokale Umkehrbarkeit.) Der Rand ∂M einer C^r-Mannigfaltigkeit M^m mit Rand, $r \geq 0$, ist in natürlicher Weise eine $(m-1)$-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit (ohne Rand), und $M \setminus \partial M$ ist ebenfalls eine (gewöhnliche) Mannigfaltigkeit. Jede Mannigfaltigkeit M ist gemäss der obigen Definition auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei $\partial M = \emptyset$.

Sei M^m eine C^r-Mannigfaltigkeit mit Rand, $r \geq 1$. Für $p \in M$ ist der *Tangentialraum* TM_p von M in p wieder wie in Definition 8.4 erklärt ($d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ ist auch im Fall $p \in \partial M$ auf ganz $\mathbb{R}^m$ definiert). Für $p \in M$ ist $T(\partial M)_p$ in kanonischer Weise ein $(m-1)$-dimensionaler Unterraum von TM_p. Differenzierbare Abbildungen $F\colon M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand sowie das Differential $df_p\colon TM_p \to TN_{F(p)}$ sind ebenfalls wie im unberandeten Fall erklärt.

Die folgende Aussage verallgemeinert Satz 8.7.

9.3 Satz
Seien N^n eine Mannigfaltigkeit mit Rand, Q^k eine Mannigfaltigkeit und $F\colon N \to Q$ eine C^∞-Abbildung. Ist $q \in Q$ regulärer Wert sowohl von $F|_{N \setminus \partial N}$ als auch von $F|_{\partial N}$, so ist $M := F^{-1}\{q\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $\dim M = n - k \geq 0$, *und* $\partial M = M \cap \partial N$.

Man beachte, dass die Voraussetzung an q im Fall $q \in F(\partial N)$ stärker ist als die Bedingung „$q \in F(N)$ ist regulärer Wert von F“, da ∂N nur $(n-1)$-dimensional ist.

Sei M ein topologischer Raum und $A \subset M$. Eine stetige Abbildung $F\colon M \to A$ mit $F(p) = p$ für alle $p \in A$ heisst eine *Retraktion* von M auf A.

9.4 Satz
Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert keine glatte Retraktion von M auf ∂M.

9.5 Korollar (Brouwerscher Fixpunktsatz)
Jede stetige Abbildung $G\colon \bar{B}^m \to \bar{B}^m$ hat einen Fixpunkt.

Sei $F\colon M \to N$ eine C^∞-Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, und sei M kompakt. Nach Satz 9.2 (Sard) existiert wenigstens ein regulärer Wert $q \in N$ von F. Dann ist $F^{-1}\{q\}$ entweder leer oder eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, also eine endliche Menge wegen der Kompaktheit von M. Wir werden zeigen: Ist N zusammenhängend, so hängt die Zahl

$$\deg_2(F) := (\#F^{-1}\{q\} \bmod 2) \in \{0, 1\}$$

nicht von der Wahl des regulären Punktes q ab; $\deg_2(F)$ heisst der *Abbildungsgrad modulo* 2 von F.

Seien $F, G\colon M \to N$ zwei C^∞-Abbildungen. Eine C^∞-Abbildung $H\colon M \times [0,1] \to N$ mit $H(\cdot,0) = F$ und $H(\cdot,1) = G$ heisst eine *glatte Homotopie* zwischen F und G. Wir schreiben $F \sim G$ und nennen F und G *glatt homotop*, falls ein solches H existiert; dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $C^\infty(M,N)$. Ist $H\colon M \times [0,1] \to N$ eine glatte Homotopie von F nach G und ist zusätzlich $H(\cdot\,,t)\colon M \to N$ ein C^∞-Diffeomorphismus für alle $t \in [0,1]$, so heisst H eine *glatte Isotopie* zwischen (den Diffeomorphismen) F und G.

9.6 Satz (Homotopieinvarianz von $\deg_2$)
Seien $F, G\colon M \to N$ glatt homotop, M kompakt und $\dim M = \dim N$. Ist $q \in N$ regulärer Wert sowohl von F als auch von G, so ist

$$\#F^{-1}\{q\} \equiv \#G^{-1}\{q\} \pmod 2.$$

9.7 Lemma
Sei N zusammenhängend, und seien $q, q' \in N$. Dann existiert eine glatte Isotopie $H\colon N \times [0,1] \to N$ mit $H(\cdot,0) = \mathrm{id}_N$ und $H(q,1) = q'$.

9.8 Satz
Sei $F\colon M \to N$ eine C^∞-Abbildung, $\dim M = \dim N$, M kompakt und N zusammenhängend. Sind q, q' zwei reguläre Werte von F, so gilt $\#F^{-1}\{q\} \equiv \#F^{-1}\{q'\} \pmod 2$.

Der Abbildungsgrad modulo 2 von F, $\deg_2(F) = \#F^{-1}\{q\} \bmod 2$, ist also wohldefiniert, und nach 9.6 gilt $\deg_2(F) = \deg_2(G)$ falls $F \sim G$.

Sind M und N orientiert, $\dim M = \dim N$, M kompakt und N zusammenhängend, so ist der *Abbildungsgrad* $\deg(F) \in \mathbb{Z}$ einer glatten Abbildung $F\colon M \to N$ erklärt durch

$$\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}\{q\}} \operatorname{sgn}(df_p),$$

wobei q regulärer Wert von F ($F^{-1}\{q\}$ ist eine endliche Menge) und

$$\operatorname{sgn}(df_p) = \begin{cases} +1 & \text{falls } df_p \text{ orientierungserhaltend,} \\ -1 & \text{falls } df_p \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases}$$

(da $\dim M = \dim N$, ist $df_p\colon TM_p \to TN_{F(p)}$ ein Isomorphismus für jeden regulären Punkt p). Ähnlich wie im mod 2-Fall zeigt man, dass $\deg(F)$ nicht von der Wahl von q abhängt und dass $\deg(F) = \deg(G)$ für zwei glatt homotope Abbildungen F und G.

9.9 Satz („Igelsatz“)
S^m besitzt ein nirgends verschwindendes glattes Tangentialvektorfeld genau dann, wenn m ungerade ist.

Der *Satz von Hopf*[4] besagt Folgendes: *Sei M^m kompakt, zusammenhängend und orientiert. Zwei Abbildungen $F, G\colon M \to S^m$ sind genau dann homotop, wenn* $\deg(F) = \deg(G)$. Ein analoges Resultat gilt für nichtorientierbares M mit $\deg_2$ statt deg.

Seien L^l und N^n zwei Mannigfaltigkeiten, $M^m \subset N^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine C^∞-Abbildung $F\colon L \to N$ heisst *transversal* zu M, falls für alle $p \in L$ mit $F(p) =: q \in M$ gilt:

$$TM_p + df_p(TL_p) = TN_q.$$

Ist $M = \{q\}$, so ist F transversal zu M genau dann, wenn q regulärer Wert von F ist.

Der folgende Satz verallgemeinert Satz 9.3.

9.10 Satz
Sei $M^m \subset N^n$, L^l eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $F\colon L \to N$ C^∞, und seien $F|_{L\setminus\partial L}$ und $F|_{\partial L}$ beide transversal zu M. Dann ist $F^{-1}(M)$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $F^{-1}(M) \cap \partial L$, und $\dim F^{-1}(M) = l - (n - m)$. *(Im Fall $\partial L = \emptyset$ ist $F^{-1}(M)$ Untermannigfaltigkeit von L.)*

$F^{-1}(M)$ hat also dieselbe Kodimension $k := n - m$ in L wie M in N.

9.11 Satz (Parametrischer Transversalitätssatz)
Sei $H\colon L \times V \to N$ C^∞ (L, V, N Mannigfaltigkeiten) und $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit. Ist H transversal zu M, so ist für fast alle $v \in V$ die Abbildung

$$H_v := H(\cdot\,, v)\colon L \to N$$

transversal zu M (d.h. $\{v \in V : H_v$ nicht transversal zu $M\}$ hat Mass 0 in V).

9.12 Satz
Ist $F\colon L \to N$ C^∞, $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit, so existert eine glatte Homotopie $H\colon L \times [0,1] \to N$ zwischen $F = H(\cdot\,, 0)$ und einer zu M transversalen Abbildung $\tilde{F} = H(\cdot\,, 1)$.

Sei $F\colon L \to N$ C^∞, $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit, L kompakt und M abgeschlossen, $\dim L + \dim M = \dim N$. Wähle $\tilde{F}\colon L \to N$ glatt homotop

[4] H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 96 (1926), 209–224.

zu F und transversal zu M. Dann ist $\tilde{F}^{-1}$ eine (möglicherweise leere) kompakte 0-Mannigfaltigkeit, also eine endliche Menge. Definiere die *Schnittzahl modulo* 2 von F mit M als

$$\#_2(F, M) := (\#\tilde{F}^{-1} \bmod 2) \in \{0, 1\}.$$

9.13 Satz
Sind $F, G\colon L \to N$ glatt homotop und beide transversal zu $M \subset N$ (L, M, N wie oben), so gilt $\#F^{-1}(M) \equiv \#G^{-1}(M) \pmod 2$.

Daraus folgt die Homotopieinvarianz der Schnittzahl modulo 2: Sind $F, G\colon L \to N$ glatt homotop (nicht notwendigerweise transversal zu M), so ist

$$\#_2(F, M) = \#\tilde{F}^{-1}(M) \equiv \#\tilde{G}^{-1}(M) = \#_2(G, M) \pmod 2,$$

da $\tilde{F} \sim F \sim G \sim \tilde{G}$, also $\tilde{F} \sim \tilde{G}$. Insbesondere ist $\#_2(F, M)$ wohldefiniert ($F = G$, $\tilde{F} \neq \tilde{G}$).

10 Vektorbündel, Vektorfelder und Flüsse

Vektorbündel

10.1 Definition (Vektorbündel)
Ein reelles k-*Vektorbündel* (oder k-Ebenen-Bündel oder $\mathbb{R}^k$-Bündel) der Klasse C^∞ ist ein Tripel (π, E, M), bestehend aus zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten E und M sowie einer C^∞-Abbildung $\pi\colon E \to M$, so dass gilt:

(1) Für alle $p \in M$ trägt $E_p := \pi^{-1}\{p\}$ die Struktur eines k-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, und

(2) für alle $q \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von q und einen C^∞-Diffeomorphismus $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, so dass $\psi|_{E_p}$ ein Vektorraum-Isomorphismus von E_p auf $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ ist für alle $p \in U$.

Man nennt E den *Totalraum*, M die *Basis*, π die *Projektion* und $E_p = \pi^{-1}\{p\}$ die *Faser* über p. Bedingung (2) heisst *Axiom der lokalen Trivialität*, ein Paar (ψ, U) wie in (2) eine *Bündelkarte* oder *lokale Trivialiserung* um q. Analog definiert man C^r-Vektorbündel bzw. topologische Vektorbündel; im letzteren Fall sind E und M topologische Räume, $\pi\colon E \to M$ ist stetig und $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ ein Homöomorphismus.

Ein k-Vektorbündel (π, E, M) heisst *trivial*, falls es eine globale Bündelkarte $\psi\colon E \to M \times \mathbb{R}^k$ gibt. Ist das Tangentialbündel TM trivial, so nennt man die Mannigfaltigkeit M *parallelisierbar*.

Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel (der Klasse C^∞). Eine C^∞-Abbildung $s\colon M \to E$ heisst ein *Schnitt* von E, falls $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, d.h. $s(p) \in E_p = \pi^{-1}\{p\}$ für alle $p \in M$. Die Menge aller Schnitte wird mit $\Gamma^\infty(E)$ oder einfach $\Gamma(E)$ bezeichnet. Jedes Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ besitzt den *Nullschnitt* mit $s(p) = 0 \in E_p$ für alle $p \in M$.

10.2 Definition (Bündelabbildung)
Seien $\pi\colon E \to M$, $\pi'\colon E' \to M'$ zwei Vektorbündel. Eine C^∞-Abbildung $\tilde{F}\colon E \to E'$ heisst eine *Bündelabbildung*, falls $\tilde{F}$ die Fasern von E isomorph auf Fasern von E' abbildet; $\tilde{F}$ induziert dann eine Abbildung $F\colon M \to M'$ mit $F \circ \pi = \pi' \circ \tilde{F}$, und $\tilde{F}|_{E_p}\colon E_p \to E'_{F(p)}$ ist ein Isomorphismus für alle $p \in M$. Ist F ein Diffeomorphismus, so heisst $\tilde{F}$ eine *Äquivalenz*. Im Fall $M = M'$ und $F = \mathrm{id}_M$ heisst F ein *Isomorphismus*.

Die durch eine Bündelabbildung $\tilde{F}\colon E \to E'$ induzierte Abbildung $F\colon M \to M'$ ist ebenfalls C^∞, da z.B. $F = \pi' \circ \tilde{F} \circ s$ für den Nullschnitt s von E.

10.3 Lemma
Ein k-Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ ist genau dann trivial, wenn es k überall linear unabhängige Schnitte $s_1, \ldots, s_k$ besitzt.

Sei $\pi\colon E \to M$ ein k-Vektorbündel und

$$\{\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k\}_{\alpha \in A}$$

ein *Bündelatlas*, d.h. jedes ψ_α ist eine Bündelkarte und $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$. Jedes ψ_α ist von der Gestalt $\psi_\alpha = (\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}, g_\alpha)$ für eine C^∞-Abbildung $g_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^k$, wobei

$$g_\alpha|_{E_p}\colon E_p \to \mathbb{R}^k$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist für alle $p \in U_\alpha$. Für jedes Paar von Indizes $\alpha, \beta \in A$ erhält man dann eine C^∞-Abbildung

$$g_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}), \quad g_{\beta\alpha}(p) = g_\beta|_{E_p} \circ (g_\alpha|_{E_p})^{-1}.$$

Die Familie $\{g_{\beta\alpha}\}$ erfüllt die sogenannte *Kozykelbedingung*

$$g_{\alpha\alpha}(p) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}, \quad g_{\gamma\beta}(p) \circ g_{\beta\alpha}(p) = g_{\gamma\alpha}(p) \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma).$$

Ist G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ und besitzt E einen Bündelatlas mit Übergangsfunktionen $g_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, so sagt man E sei ein Vektorbündel mit *Strukturgruppe* G. Ist umgekehrt $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von M, und ist eine Familie $\{g_{\beta\alpha}\}$ von C^∞-Abbildungen $g_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ gegeben, die die Kozykelbedingung erfüllt, so lässt sich daraus ein zugehöriges k-Vektorbündel über M konstruieren.

Konstruktionen mit Vektorbündeln

10.4 Definition (induziertes (zurückgeholtes) Bündel)
Sei $F\colon M \to M'$ eine C^∞-Abbildung und $\pi'\colon E' \to M'$ ein k-Vektorbündel. Das k-Vektorbündel $\pi\colon F^*E' \to M$ mit

$$F^*E' = \{(p, v) \in M \times E' : F(p) = \pi'(v), \text{ d.h. } v \in E'_{F(p)}\},$$
$$\pi(p, v) = p$$

heisst durch F und π' *induziertes Bündel*.

Die Abbildung $\tilde{F}\colon F^*E' \to E'$, $\tilde{F}(p, v) = v$ ist eine Bündelabbildung über F. Ist (ψ', U') eine Bündelkarte für E', $\psi' = (\pi', g')$, so ist

$$\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k, \quad (p, v) \mapsto (p, g'(v)),$$

eine Bündelkarte für E über $U := F^{-1}(U')$. Ist $\{(\psi'_\alpha, U'_\alpha)\}$ ein Bündelatlas von E' mit Übergangsfunktionen $g'_{\beta\alpha}\colon U'_\alpha \cap U'_\beta \to \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$, so liefert dies einen Bündelatlas $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}$ von E mit Übergangsfunktionen

$$g_{\beta\alpha} = g'_{\beta\alpha} \circ F\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}).$$

Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset M'$ mit Inklusion $i\colon M \to M'$ heisst $E'|_M := i^*E'$ die *Restriktion* von E' auf M.

10.5 Definition (Whitney-Summe)
Seien $\pi\colon E \to M$, $\pi'\colon E' \to M$ Vektorbündel vom Rang k bzw. k' über derselben Basis. Die *Whitney-Summe* oder *direkte Summe* von π und π' ist das $(k+k')$-Vektorbündel $\bar\pi\colon E \oplus E' \to M$ mit

$$\begin{aligned} E \oplus E' &= \{(v,v') \in E \times E' : \pi(v) = \pi'(v')\},\\ \bar\pi(v,v') &= \pi(v) = \pi'(v'), \end{aligned}$$

d.h. $(E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p$.

Sind $\psi = (\pi, g)$, $\psi' = (\pi', g')$ Bündelkarten für E bzw. E' über derselben offenen Menge $U \subset M$, so ist

$$\begin{aligned} \bar\psi\colon \bar\pi^{-1}U &\to U \times \mathbb{R}^{k+k'}\\ (v,v') &\mapsto (\bar\pi(v,v'), g(v), g'(v')) \end{aligned}$$

eine Bündelkarte für $E \oplus E'$. Übergangsfunktionen sind von der Gestalt $\bar g_{\beta\alpha}(p)(\xi,\xi') \mapsto (g_{\beta\alpha}(p)\xi, g'_{\beta\alpha}(p)\xi')$ für $(\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{k+k'}$.

Es gilt: $E \oplus E'$ ist isomorph zu $E' \oplus E$, und

$$(E \oplus E') \oplus E'' = E \oplus (E' \oplus E'').$$

Andererseits folgt aus $E \oplus E'' \cong E' \oplus E''$ im Allgemeinen nicht $E \cong E'$.

Als Nächstes betrachten wir das *Kotangentialbündel* TM^* einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Der Totalraum

$$TM^* = \bigcup_{p\in M} TM_p^*$$

ist die (disjunkte) Vereinigung der Dualräume $TM_p^* = \{\lambda\colon TM_p \to \mathbb{R} : \lambda \text{ ist linear}\}$, und $\pi\colon TM^* \to M$ ist gegeben durch $\pi(\lambda) = p$ für $\lambda \in TM_p^*$. Ist (φ, U) eine Karte von M, so definiert

$$\psi(\lambda) = \left(\pi(\lambda), \lambda\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi^1}\Big|_{\pi(\lambda)}\Big), \ldots, \lambda\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi^m}\Big|_{\pi(\lambda)}\Big)\right)$$

eine entsprechende Bündelkarte $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ von TM^*. Die Differentiale

$$d\varphi_p^1, \ldots, d\varphi_p^m \colon TM_p \to \mathbb{R}$$

bilden gerade die zu $(\partial/\partial\varphi^1)|_p, \ldots, (\partial/\partial\varphi^m)|_p$ duale Basis von TM_p^*, da

$$\partial\varphi_p^i\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial\varphi^i}{\partial\varphi^j}(p) = \delta_j^i.$$

Jeder Schnitt $\omega \in \Gamma(TM^*)$ besitzt bezüglich einer Karte (φ, U) von M eine eindeutige Darstellung

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^m \omega_i \, d\varphi^i$$

für C^∞-Funktionen $\omega_i\colon U \to \mathbb{R}$, $\omega_i = \omega(\partial/\partial\varphi^i)$. Speziell gilt für $\omega = df$

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial\varphi^i} d\varphi^i.$$

Seien $\pi\colon E \to M$, $\pi'\colon E' \to M$ Vektorbündel vom Rang k bzw. k' über derselben Basis. Das *Tensorprodukt* von π und π' ist das kk'-Vektorbündel $\bar{\pi}\colon E \otimes E' \to M$ mit

$$(E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$$

und folgender Eigenschaft: Sind $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}$, $\{(\psi'_\alpha, U_\alpha)\}$ Bündelatlanten für E bzw. E' mit Übergangsfunktionen $g_{\beta\alpha}(p) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ bzw. $g'_{\beta\alpha} \in \mathrm{GL}(k', \mathbb{R})$, $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, so ist

$$\bar{g}_{\beta\alpha}(p) := g_{\beta\alpha}(p) \otimes g'_{\beta\alpha}(p) \in \mathrm{GL}(kk', \mathbb{R})$$

die Übergangsfunktion für einen Bündelatlas $\{(\bar{\psi}_\alpha, U_\alpha)\}$ von $E \otimes E'$ (vgl. Anhang C).

10.6 Definition (Tensorbündel und Tensorfeld)
Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit.

$$T_{r,s}(TM) := \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{r} \otimes \underbrace{TM^* \otimes \cdots \otimes TM^*}_{s}$$

heisst (r,s)-*Tensorbündel* über M (vom Rang m^{r+s}). Ein (r,s)-*Tensorfeld* T auf M ist ein Schnitt $T \in \Gamma(T_{r,s}(TM))$.

Es gilt $T_{1,0}(TM) = TM$, $T_{0,1}(TM) = TM^*$. In lokalen Koordinaten (φ, U) besitzt ein (r,s)-Tensorfeld $T \in \Gamma(T_{r,s}(TM))$ eine eindeutige Darstellung

$$T|_U = \sum T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial\varphi^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial\varphi^{i_r}} \otimes d\varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{j_s}$$

für C^∞-Funktionen $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\colon U \to \mathbb{R}$.

Sei $T\colon (\Gamma(TM))^s \to \Gamma(TM)$ eine s-lineare Abbildung. Wir sagen „T definiert ein $(1,s)$-Tensorfeld“, wenn Folgendes gilt: Für alle $p \in M$ hängt $T(X_1,\dots,X_s)|_p$ nur von $X_1(p),\dots,X_s(p)$ ab, d.h. man erhält eine s-lineare Abbildung $T_p\colon (TM_p)^s \to TM_p$, oder äquivalent eine $(1+s)$-lineare Abbildung $T'_p\colon TM_p^* \times (TM_p)^s \to \mathbb{R}$, $T'_p(\mu, v_1,\dots,v_s) = \mu(T_p(v_1,\dots,v_s))$, also ein $T'_p \in T_{1,s}(TM_p)$.

10.7 Satz
Eine s-lineare Abbildung $T\colon (\Gamma(TM))^s \to \Gamma(TM)$ definiert genau dann ein $(1,s)$-Tensorfeld, wenn T in jedem Argument C^∞-homogen ist (d.h. für $f \in C^\infty(M)$ gilt $T(X_1,\dots,X_{i-1},fX_i,X_{i+1},\dots,X_s) = fT(X_1,\dots,X_s)$.

Der Satz gilt auch in der folgenden Form für (r,s)-Tensorfelder: *Eine $(r+s)$-lineare Abbildung $T\colon (\Gamma(TM^*))^r \times (\Gamma(TM))^s \to \mathbb{R}$ definiert genau dann ein (r,s)-Tensorfeld, wenn T in jedem Argument C^∞-homogen ist.*

Vektorfelder und Flüsse

Sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M. Eine Kurve $c\colon (a,b) \to M$ heisst *Integralkurve* von X, falls

$$\dot c(t) = X_{c(t)}$$

für alle $t \in (a,b)$. In einer Karte (φ, U) ist $\dot c(t) = X_{c(t)}$ äquivalent zu $\dot\gamma(t) = \xi_{\gamma(t)}$ für $\gamma = \varphi \circ c$ und $\xi_{\gamma(t)} = \varphi_*(X_{c(t)})$.

10.8 Lemma (lokaler Fluss)
Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p und ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ eine eindeutig bestimmte Integralkurve $c_q\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$ von X mit $c_q(0) = q$ existiert. Die Abbildung $\Phi\colon (-\epsilon,\epsilon) \times U \to M$, $\Phi(t,q) = \Phi^t(q) := c_q(t)$, ist C^∞.

Man nennt Φ einen *lokalen Fluss* von X um p. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 10.8 gilt

$$\Phi^u(\Phi^t(q)) = \Phi^{t+u}(q)$$

falls $t, u, t+u \in (-\epsilon,\epsilon)$ und $q, \Phi^t(q) \in U$. Für eine offene Umgebung $V \subset U$ von q mit $\Phi^t(V) \subset U$ ist dann $\Phi^t|_V$ ein C^∞-Diffeomorphismus von V auf $\Phi^t(V)$, da $\Phi^{-t} \circ \Phi^t|_V = \Phi^0|_V = \mathrm{id}_V$.

Ein Vektorfeld X auf M heisst *vollständig integrierbar*, falls für jeden Punkt $q \in M$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Integralkurve c_q von X mit $c_q(0) = q$ existiert. Man erhält dann den *Fluss* $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ von X sowie die entsprechende *1-Parametergruppe von Diffeomorphismen* $\{\Phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

10.9 Satz
Jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit kompaktem Träger ist vollständig integrierbar.

10.10 Lemma („Flow-Box“)
Ist $X \in \Gamma(TM)$, $p \in M$ und $X_p \neq 0$, so existiert eine Karte (φ, U) um p mit $X|_U = \partial/\partial\varphi^1$.

Sind $X, Y \in \Gamma(TM)$, so heisst das durch

$$[X,Y]_p(f) := X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \quad (f \in C^\infty(M))$$

definierte Vektorfeld $[X,Y] \in \Gamma(TM)$ die *Lie-Klammer* von X und Y.

10.11 Satz (Lie-Klammer)
Es gilt:
(1) $[X,Y]$ *ist bilinear,* $[Y,X] = -[X,Y]$,
(2) $[fX,gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$, *insbesondere ist* $[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X$ *und* $[X,gY] = g[X,Y] + X(g)Y$,
(3) $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ *(Jacobi-Identität).*

In einer Karte (φ, U) gilt offensichtlich $[\partial/\partial\varphi^i, \partial/\partial\varphi^j] = 0$. Mit (1) und (2) folgt daraus

$$[X,Y]|_U = \sum_i \Big(\sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial \varphi^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \varphi^j} \Big) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

für $X|_U = \sum X^i(\partial/\partial\varphi^i)$, $Y|_U = \sum Y^j(\partial/\partial\varphi^j)$.

10.12 Satz (Lie-Ableitung)
Ist Φ lokaler Fluss von X um p, so gilt

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\Phi_*^{-t}(Y_{\Phi^t(p)}) - Y_p\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\Phi_*^{-t}(Y_{\Phi^t(p)})\big).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung heisst *Lie-Ableitung* von Y in Richtung X im Punkt p und wird mit $(L_X Y)_p$ bezeichnet, also $[X,Y] = L_X Y$.

Sei N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine m-dimensionale C^∞-*Distribution* Δ auf N ordnet jedem $p \in N$ einen m-dimensionalen linearen Unterraum $\Delta_p \subset TN_p$ zu, so dass für jeden Punkt $p \in N$ eine offene Umgebung $U \subset N$ von p und Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(TU)$ existieren mit $\Delta_q = \mathrm{lin}(X_1(q), \ldots, X_m(q))$ für alle $q \in U$. Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ *in* Δ erfüllt $X_p \in \Delta_p$ für alle $p \in U$. Die Distribution Δ heisst *involutiv* oder *vollständig integrierbar*, falls $[X,Y]$ in Δ ist für alle X, Y in Δ. Eine injektive Immersion $i\colon M \to N$ einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heisst eine *Integralmannigfaltigkeit* von Δ, falls $i_*(TM_p) = \Delta_p$ für alle $p \in M$.

10.13 Satz (Frobenius)
Sei Δ eine m-dimensionale C^∞-Distribution auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit N. Es existiert genau dann durch jeden Punkt von N eine Integralmannigfaltigkeit von Δ, wenn Δ involutiv ist.

11 Differentialformen

Grundbegriffe

Im Folgenden sei M wieder eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension m. Für $p \in M$ bezeichne $\Lambda_s(TM_p^*)$ den Vektorraum der alternierenden s-linearen Abbildungen $(TM_p)^s \to M$ (s. Anhang C), und

$$\Lambda_s(TM^*) := \bigcup_{p\in M} \Lambda_s(TM_p^*)$$

sei das entsprechende Bündel.

11.1 Definition (Differentialform)
Eine *Differentialform* ω vom Grad s (kurz: *s-Form*) auf M ist ein Schnitt $\omega \in \Gamma(\Lambda_s(TM^*))$. Wir bezeichnen den Vektorraum der s-Formen auf M kürzer mit $\Omega^s(M) := \Gamma(\Lambda_s(TM^*))$.

Nach Konvention ist $\Lambda_0(TM_p^*) = \mathbb{R}$ und somit $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, und im Fall $s > m$ gilt $\Omega^s(M) = \{0\}$.

Für $\omega \in \Omega^s(M)$, $\theta \in \Omega^t(M)$ ist das *äussere Produkt* (oder *Dachprodukt*)

$$\omega \wedge \theta \in \Omega^{s+t}(M)$$

durch $(\omega \wedge \theta)_p := \omega_p \wedge \theta_p$ $(p \in M)$ erklärt (s. Definition C.3); es gilt

$$\theta \wedge \omega = (-1)^{st}\omega \wedge \theta.$$

Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ und $\omega \in \Omega^s(M)$ ist $f \wedge \omega = f\omega$.

In einer Karte (φ, U) ist die Form $\omega \in \Omega^s(M)$ von der Gestalt

$$\omega|_U = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le m} \omega_{i_1\ldots i_s}\, d\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi^{i_s}$$

mit *Komponenten* $\omega_{i_1\ldots i_s} = \omega(\partial/\partial\varphi^{i_1}, \ldots, \partial/\partial\varphi^{i_s}) \in C^\infty(U)$.

11.2 Satz (äussere Ableitung)
Es existieren eindeutig bestimmte lineare Operatoren

$$d\colon \Omega^s(M) \to \Omega^{s+1}(M) \quad (s = 0, 1, \ldots)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) *Für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ist df das Differential von f, d.h. $df(X) = X(f)$ für $X \in \Gamma(TM)$,*

(2) *$d \circ d = 0$,*

(3) *$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^s\omega \wedge d\theta$ für $\omega \in \Omega^s(M)$.*

Die Operatoren d sind lokal, d.h. für jede offene Menge $U \subset M$ und $\omega \in \Omega^s(M)$ gilt $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. In einer Karte (φ, U) ist dann

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le m} d\omega_{i_1 \ldots i_s} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi^{i_s}.$$

11.3 Satz
Für $\omega \in \Omega^s(M)$ und $X_1, \ldots, X_{s+1} \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{s+1}) = &\sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{s+1})\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le s+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{s+1}) \end{aligned}$$

($\widehat{X}_i$ bedeutet, dass X_i nicht auftritt).

Insbesondere gilt

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

für $\omega \in \Omega^1(M)$.

Für eine C^∞-Abbildung $F\colon N \to M$ und $\omega \in \Omega^s(M)$ definiert man die *zurückgeholte Form* (*pull-back*) $F^*\omega \in \Omega^s(N)$ durch

$$(F^*\omega)_p\big(v_1, \ldots, v_s\big) := \omega\big(F_{*p} v_1, \ldots, F_{*p} v_s\big)$$

($p \in N$, $v_1, \ldots, v_s \in TN_p$). Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ist $F^* f := f \circ F$.

11.4 Lemma
Es gilt
(1) $F^*(\omega \wedge \theta) = F^*\omega \wedge F^*\theta$,
(2) $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

Integration von Formen

Es sei M eine orienierte Mannigfaltigkeit der Dimension m. Eine Menge $M' \subset M$ heisst *messbar*, falls $\varphi(M' \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ Lebesgue-messbar ist für jede Karte (φ, U) von M. Eine *messbare Zerlegung* von M ist eine abzählbare Familie von messbaren Mengen $M_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, so dass gilt:
(1) $M \setminus \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ hat Mass null (Definition 9.1),
(2) für alle $\alpha \neq \beta$ hat $M_\alpha \cap M_\beta$ Mass null.

Zu jedem Atlas von M gibt es eine messbare Zerlegung $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von M, so dass jede Menge M_α in einem Kartengebiet enthalten ist. Es sei jetzt $\omega \in \Omega^m(M)$ und (φ, U) eine positiv orientierte Karte von M. Dann gilt

$$\omega|_U = \omega^\varphi \, \partial\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \partial\varphi^m$$

für $\omega^\varphi = \omega(\partial/\partial\varphi^1, \ldots, \partial/\partial\varphi^m) \in C^\infty(U)$. Ist $M' \subset U$ messbar, so heisst ω über M' *integrierbar*, falls

$$\int_{\varphi(M')} \left|\omega^\varphi \circ \varphi^{-1}\right| dx < \infty.$$

In diesem Fall definiert

$$\int_{M'} \omega := \int_{\varphi(M')} \omega^\varphi \circ \varphi^{-1} \, dx$$

das *Integral* von ω über M'. Wohldefiniertheit (d.h. Unabhängigkeit des Integrals von der Wahl der positiv orientierten Karte) folgt mittels der Transformationsformel und Eigenschaft (4) in Satz C.2.

11.5 Definition
Die Form $\omega \in \Omega^m(M)$ heisst über M *integrierbar*, falls eine messbare Zerlegung $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und positiv orientierte Karten $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ mit $M_\alpha \subset U_\alpha$ existieren, so dass

$$\sum_{\alpha\in A} \int_{\varphi_\alpha(M_\alpha)} \left|\omega^{\varphi_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}\right| dx < \infty$$

ist. In diesem Fall definiert

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha\in A} \int_{M_\alpha} \omega = \sum_{\alpha\in A} \int_{\varphi_\alpha(M_\alpha)} \omega^{\varphi_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} \, dx$$

das Integral von ω über M.

Bemerkungen:

1. Das Integral ist unabhängig von der Wahl der messbaren Zerlegung.
2. Ist ω über M integrierbar und $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins auf M, so gilt
$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in A} \int_M \tau_\alpha \omega.$$
3. Formen mit kompaktem Träger sind stets integrierbar.

4. Ist $F\colon N \to M$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten und ω über M integrierbar, so gilt

$$\int_N F^*\omega = \epsilon \int_M \omega$$

mit $\epsilon = 1$ falls F orientierungstreu ist und $\epsilon = -1$ im andern Fall.

11.6 Satz (Stokes)
Sei M^m eine orientierte Mannigfaltigkeit mit (möglicherweise leerem) Rand und $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ eine Form mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

(genauer $\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$ für die Inklusion $i\colon \partial M \to M$).

Hier ist ∂M mit der induzierten Orientierung versehen: Eine Basis $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ von $T(\partial M)_p \subset TM_p$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $(v, v_1, \ldots, v_{m-1})$ positiv orientiert ist für jeden Vektor v in der „äusseren" Zusammenhangskomponente von $TM_p \setminus T(\partial M)_p$.

Eine *Volumenform* ω auf M^m ist eine nirgends verschwindende m-Form, d.h. für alle $p \in M$ ist $\omega_p \neq 0 \in \Lambda_m(TM_p^*)$.

11.7 Satz
Auf M existiert genau dann eine Volumenform, wenn M orientierbar ist.

Integration ohne Orientierung

Ist V ein m-dimensionaler ($\mathbb{R}$-)Vektorraum und $0 \neq \omega \in \Lambda_m(V^*)$, so heisst

$$|\omega|\colon V \times \cdots \times V \to [0, \infty), \quad |\omega|(v_1, \ldots, v_m) := |\omega(v_1, \ldots, v_m)|$$

ein *Volumenelement* auf V. Ein (C^∞-)*Volumenelement* $d\mu$ auf einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung, die jedem $p \in M$ ein Volumenelement $d\mu_p$ auf TM_p zuordnet, wobei gilt: Für jede Karte (φ, U) von M ist $d\mu|_U = \varrho^\varphi |d\varphi^1 \wedge \ldots \wedge d\varphi^m|$, mit einer C^∞-„Dichte" $\varrho^\varphi\colon U \to (0, \infty)$.

Bemerkungen:

1. Transformationsverhalten der ϱ^φ: Für einen Kartenwechsel $H = \psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ gilt

$$\varrho^\psi \circ \psi^{-1} \circ H \; |\det J_H| = \varrho^\varphi \circ \varphi^{-1}.$$

2. Die Bezeichnung „$d\mu$“ stammt aus der Masstheorie und hat nichts mit der äusseren Ableitung von Differentialformen zu tun.

Ist $d\mu$ ein Volumenelement auf M und M orientierbar, so existiert eine Volumenform $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $d\mu = |\omega|$. Ist M nicht orientierbar, so gibt es eine solche Form immer nur lokal (Satz 11.7).

Aus einem Volumenelement $d\mu$ auf M erhält man wie folgt ein Mass μ auf M (bzw. auf der σ-Algebra der messbaren Mengen in M). Ist $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine messbare Zerlegung von M, sodass für jedes α eine Karte $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ mit $M_\alpha \subset U_\alpha$ existiert, so setzt man für messbares $B \subset M$

$$\mu(B) := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(B\cap M_\alpha)} \varrho^{\varphi_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}\, dx.$$

Die Wohldefiniertheit von μ folgt aus dem Transformationsverhalten der ϱ^{φ_α} und der Transformationsformel. Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ messbar, so ergibt sich die Bedeutung von $\int_M f\, d\mu$ aus diesem Mass μ. Man kann aber auch direkt von dem Volumenelement $d\mu$ ausgehen: f ist *integrierbar*, falls

$$\int_M |f|\, d\mu := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(M_\alpha)} (|f| \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varrho^{\varphi_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1})\, dx < \infty;$$

dieselbe Formel ohne Betragsstriche definiert dann das Integral $\int_M f\, d\mu$.

Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M^m, g) ist das *durch g bestimmte Volumenelement* $d\mu_g$ in einer Karte (φ, U) gegeben durch

$$d\mu_g|_U := \sqrt{\det(g_{ij}^\varphi)}\, |d\varphi^1 \wedge \ldots \wedge d\varphi^m|,$$

wobei $g|_U = \sum g_{ij}^\varphi\, d\varphi^i \otimes d\varphi^j$.

De Rham-Kohomologie

Eine Form $\omega \in \Omega^s(M)$ heisst *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ ist. Die Form ω heisst *exakt*, falls ein $\theta \in \Omega^{s-1}(M)$ existiert mit $\omega = d\theta$; im Fall $s = 0$ vereinbart man, dass $0 \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ die einzige exakte 0-Form sei. Jede m-Form auf einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist geschlossen, da $\Omega^{m+1}(M) = \{0\}$. Wegen $d \circ d = 0$ ist jede exakte Form geschlossen.

11.8 Definition
Für $s \geq 0$ heisst der Quotienten-Vektorraum

$$H^s_{\mathrm{dR}}(M) := \frac{\{\omega \in \Omega^s(M) : \omega \text{ ist geschlossen}\}}{\{\omega \in \Omega^s(M) : \omega \text{ ist exakt}\}}$$

die *s-te de Rham-Kohomologie* von M. Für eine geschlossene Form $\omega \in \Omega^s(M)$ bezeichnet

$$[\omega] := \{\omega' \in \Omega^s(M) : \omega' - \omega \text{ ist exakt}\} \in H^s_{\mathrm{dR}}(M)$$

die *Kohomologie-Klasse* von ω. Zwei Formen $\omega, \omega' \in \Omega^s(M)$ sind *kohomolog*, falls $[\omega] = [\omega']$.

Man nennt $b_s(M) := \dim H^s_{\mathrm{dR}}(M)$ die s-te *Betti-Zahl* von M, und

$$\chi(M) := \sum_{s=0}^{m} (-1)^s b_s(M)$$

ist die *Euler-Charakteristik* von M. Ist jede geschlossene s-Form exakt, so ist $H^s_{\mathrm{dR}}(M)$ ein trivialer (einpunktiger) Vektorraum, den wir im Folgenden mit $\mathbf{0}$ bezeichnen.

Beispiele:

1. $H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\}$ ist der Vektorraum der auf M lokal konstanten Funktionen. Besitzt M eine endliche Anzahl k von Zusammenhangskomponenten, so ist also $H^0(M) \simeq \mathbb{R}^k$ (isomorph).
2. Auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert

   $$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

   eine 1-Form, die geschlossen, aber nicht exakt ist. Insbesondere ist $H^1(M) \neq \mathbf{0}$. Lokal ist $\omega = d\varphi$, wobei φ einen Polarwinkel bezüglich $(0,0)$ bezeichnet, aber φ ist nicht stetig auf ganz M definierbar.

Im Folgenden seien M, N zwei Mannigfaltigkeiten und $F \in C^\infty(N, M)$. Für $s \geq 0$ induziert $F^*\colon \Omega^s(M) \to \Omega^s(N)$ eine wohl-definierte lineare Abbildung

$$F^*\colon H^s(M) \to H^s(N), \quad F^*[\omega] = [F^*\omega].$$

Ist L eine weitere Mannigfaltigkeit und $G \in C^\infty(M, L)$, so gilt

$$F^* \circ G^* = (G \circ F)^*\colon H^s(L) \to H^s(N);$$

insbesondere sind $H^s(M)$ und $H^s(N)$ isomorph, falls F ein Diffeomorphismus ist.

11.9 Satz („Poincaré-Lemma“)
Sind $F, G \in C^\infty(N, M)$ zwei glatt homotope Abbildungen, $F \sim G$, so gilt $F^* = G^*\colon H^s(M) \to H^s(N)$ für $s \geq 0$.

Zwei Mannigfaltigkeiten M und $\bar{M}$ heissen (glatt) *Homotopie-äquivalent*, falls (C^∞-)Abbildungen $\bar{F}\colon M \to \bar{M}$ und $F\colon \bar{M} \to M$ existieren, so dass $F \circ \bar{F} \sim \mathrm{id}_M$ und $\bar{F} \circ F \sim \mathrm{id}_{\bar{M}}$; man nennt dann F und $\bar{F}$ zwei *inverse Homotopie-Äquivalenzen*. Die Mannigfaltigkeit M heisst *kontrahierbar*, falls id_M homotop zu einer konstanten Abbildung $M \to \{p_0\} \subset M$ ist; dies ist genau dann der Fall, wenn M Homotopie-äquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.

11.10 Korollar

(1) *Sind M und $\bar{M}$ Homotopie-äquivalent, so gilt $H^s(M) \simeq H^s(\bar{M})$ für $s \geq 0$.*

(2) *Ist M kontrahierbar, so ist $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$ und $H^s(M) = \mathbf{0}$ für $s \geq 1$.*

Ist M eine Mannigfaltigkeit und sind $U, V \subset M$ zwei offene Mengen mit $U \cup V = M$, so existiert ein lange exakte Sequenz[5]

$$\begin{aligned}\mathbf{0} \to & H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to \dots \\ \dots \to & H^s(M) \to H^s(U) \oplus H^s(V) \to H^s(U \cap V) \\ \to & H^{s+1}(M) \to H^{s+1}(U) \oplus H^{s+1}(V) \to H^{s+1}(U \cap V) \to \dots,\end{aligned}$$

die *Mayer–Vietoris-Sequenz*, die ein sehr nützliches Werkzeug zur Bestimmung der de Rham-Kohomologie darstellt.

Beispiel: Die Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ($m \geq 1$) wird durch $U := S^m \setminus \{-e_{m+1}\}$ und $V := S^m \setminus \{e_{m+1}\}$ überdeckt, U und V sind kontrahierbar, und $U \cap V$ ist Homotopie-äquivalent zu S^{m-1}. Mit Korollar 11.10 folgt: Für $s \geq 1$ ist $H^s(U) \oplus H^s(V) = \mathbf{0}$ und $H^{s+1}(U) \oplus H^{s+1}(V) = \mathbf{0}$, die Abbildung $H^s(S^{m-1}) \simeq H^s(U \cap V) \to H^{s+1}(M) = H^{s+1}(S^m)$ in der Mayer–Vietoris-Sequenz ist deshalb sowohl injektiv als auch surjektiv. Für $m, s \geq 1$ gilt also die Rekursionsformel $H^{s+1}(S^m) \simeq H^s(S^{m-1})$. Für $s = 0$ ist ausserdem $H^0(S^m) \simeq \mathbb{R}$ und $H^0(U) \oplus H^0(V) \simeq \mathbb{R}^2$, so dass man die exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to H^0(U \cap V) \to H^1(S^m) \to \mathbf{0}$$

erhält. Im Fall $m = 1$ ist $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ und damit $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$, im Fall $m \geq 2$ ist $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}$ und demnach $H^1(S^m) = \mathbf{0}$. Insgesamt ergibt sich $H^s(S^m) \simeq \mathbb{R}$ für $s \in \{0, m\}$ und $H^s(S^m) = \mathbf{0}$ sonst.

Wir erwähnen noch zwei weitere wichtige Resultate. In beiden bezeichnet M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension m, und $s \in \{0, 1, \dots, m\}$.

[5] Eine Kette von aufeinander folgenden linearen Abbildungen, so dass jeweils das Bild einer Abbildung gleich dem Kern der folgenden ist.

Der Satz über die *Poincaré-Dualität* besagt, dass die Bilinearform $(.\,,.)\colon H^s(M) \times H^{m-s}(M) \to \mathbb{R}$,

$$([\omega],[\theta]) := \int_M \omega \wedge \theta,$$

nicht ausgeartet ist (Wohldefiniertheit folgt aus dem Satz von Stokes). Somit erhält man einen Isomorphimus $H^s(M) \simeq (H^{m-s}(M))^*$, der $[\omega]$ die Linearform $[\theta] \mapsto ([\omega],[\theta])$ zuordnet. Ist M zusammenhängend, so folgt daraus beispielsweise $H^m(M) \simeq H^0(M) \simeq \mathbb{R}$.

Jetzt bezeichne $H_s^{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R})$ die s-te differenzierbare singuläre Homologie von M. Ein Element $[\sigma]$ des Vektorraums $H_s^{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R})$ ist eine Homologieklasse $\{\sigma' : \sigma' - \sigma = \partial\tau\}$ von glatten singulären s-Ketten σ' mit reellen Koeffizienten und $\partial\sigma' = 0$. Man kann zeigen, dass die Bilinearform $(.\,,.)\colon H^s_{\mathrm{dR}}(M) \times H_s^{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$([\omega],[\sigma]) := \int_\sigma \omega,$$

nicht ausgeartet ist (Wohldefiniertheit folgt aus der verallgemeinerten Fassung des Satzes von Stokes für glatte singuläre s-Ketten). Insbesondere erhält man einen kanonischen Isomorphimus $H^s_{\mathrm{dR}}(M) \simeq (H_s^{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R}))^*$, der $[\omega]$ auf die Linearform $[\sigma] \mapsto ([\omega],[\sigma])$ abbildet. Ausserdem existieren kanonische Isomorphismen $(H_s^{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R}))^* \simeq H^s_{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R}) \simeq H^s_\Delta(M,\mathbb{R})$ zur differenzierbaren singulären Kohomologie bzw. zur gewöhnlichen singulären Kohomologie. Damit sind $H^s_{\mathrm{dR}}(M)$ und $H^s_\Delta(M,\mathbb{R})$ isomorph; dies ist der *Satz von de Rham*.

12 Lie-Gruppen

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Eine *topologische Gruppe* $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe mit einer Topologie, so dass die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$, stetig ist.

12.1 Definition (Lie-Gruppe)
Eine *Lie-Gruppe* $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe mit der Struktur einer C^∞-Mannigfaltigkeit, so dass die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$, C^∞ ist.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^m$ mit der Vektoraddition.
2. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der komplexen Multiplikation.
3. $S^1 \subset \mathbb{C}^*$.
4. Sind G, H Lie-Gruppen, so bildet die Produktmannigfaltigkeit $G \times H$, versehen mit der durch $(g, h)(g', h') := (gg', hh')$ definierten Multiplikation, eine Lie-Gruppe.
5. $T^m = S^1 \times \ldots \times S^1$ (m Faktoren).
6. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$ mit der Matrizenmultiplikation, ebenso $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.
7. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, versehen mit der Multiplikation

$$(A, v)(A', v') := (AA', Av' + v),$$

   ist die Lie-Gruppe der affinen Bewegungen von $\mathbb{R}^n$; unter der Identifikation von (A, v) mit $B_{A,v} \colon x \mapsto Ax + v$ entspricht das Produkt $(A, v)(A', v')$ der affinen Bewegung $B_{A,v} \circ B_{A',v'}$.

Es seien G, H zwei Lie-Gruppen. Ein *Lie-Gruppen-Homomorphismus* $F \colon G \to H$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der C^∞ ist; F heisst *Lie-Gruppen-Isomorphismus*, falls F zusätzlich ein Diffeomorphimus (und damit auch ein Gruppen-Isomorphismus) ist. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $F \colon G \to H$ wird auch eine *Darstellung* von G in H genannt, insbesondere im Fall $H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Im Folgenden sei $(G, \cdot)$ eine Lie-Gruppe mit Neutralelement e. Für alle $g \in G$ ist die *Links-Translation* um g,

$$l_g \colon G \to G, \quad l_g(h) := gh,$$

ein Diffeomorphismus von G.

12.2 Lemma
Ist $(G, \cdot)$ eine zusammenhängende Lie-Gruppe und U eine Umgebung von e, so wird G von U erzeugt, d.h. für alle $g \in G$ existieren $k \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_k \in U$, so dass $g = g_1 \ldots g_k$.

Bemerkung: Ist G nicht zusammenhängend, wie beispielsweise $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so bildet die Zusammenhangskomponente G_0, die das Neutralelement e enthält, eine Lie-Gruppe. Die Nebenklassen von G_0 sind die Zusammenhangskomponenten von G, G_0 ist somit Normalteiler von G, und G/G_0 ist eine abzählbare Gruppe.

12.3 Definition (Lie-Algebra)
Eine *Lie-Algebra* V über $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $[.,.]\colon V \times V \to V$, der *Lie-Klammer* von V, so dass für alle $X, Y, Z \in V$ gilt:
(1) $[Y, X] = -[X, Y]$ (Anti-Kommutativität),
(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität).

Beispiele:
1. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V, versehen mit der trivialen Lie-Klammer $[.,.] = 0$, bildet eine sog. *abelsche* Lie-Algebra.
2. Der Vektorraum $\Gamma(TM)$ der C^∞-Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M, mit der Lie-Klammer $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$.
3. $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $[A, B] := AB - BA$.
4. $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt $[X, Y] := X \times Y$.
5. Ist V ein 2-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{X, Y\}$, so erhält man durch die Festsetzung $[X, X] := 0$, $[Y, Y] := 0$, $-[Y, X] = [X, Y] := Y$ und bilineare Erweiterung eine 2-dimensionale nicht-abelsche Lie-Algebra.

Es seien V, W zwei Lie-Algebren. Ein *Lie-Algebra-Homomorphismus* $L\colon V \to W$ ist eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $[LX, LY] = [X, Y]$ für alle $X, Y \in V$; L heisst *Lie-Algebra-Isomorphismus*, falls L zusätzlich ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Ein Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G heisst *links-invariant*, falls

$$l_{g*} X = X \circ l_g, \quad \text{d.h. } l_{g*} X_h = X_{gh}$$

für alle $g, h \in G$. Für jeden Vektor $X_0 \in TG_e$ gibt es genau ein zugehöriges links-invariantes Vektorfeld X mit $X_e = X_0$, nämlich

$$g \mapsto X_g := l_{g*} X_0.$$

Links-invariante Vektorfelder sind C^∞, und sind X, Y links-invariant, so ist auch $[X, Y]$ links-invariant. Die links-invarianten Vektorfelder bilden also eine *Unter-Lie-Algebra* von $\Gamma(TG)$.

12.4 Definition (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe)
Die *Lie-Algebra* $\underline{g}$ *einer Lie-Gruppe* G ist der Vektorraum TG_e mit der durch

$$[X_0, Y_0] := [X, Y]_e$$

definierten Lie-Klammer, wobei X, Y die zu $X_0, Y_0 \in TG_e$ gehörigen links-invarianten Vektorfelder bezeichnen.

Beispiele:

1. Für die Lie-Gruppe $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist $TG_e = \underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{R})$ ein Vektorraum der Dimension n^2, der natürlicherweise mit $\mathbb{R}^{n\times n}$ identifiziert wird. Ist $A \in \underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{R})$ und ist $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine glatte Kurve mit $c(0) = e$ und $\dot{c}(0) = A$, so gilt

   $$l_{g*}A = l_{g*}(\dot{c}(0)) = (l_g \circ c)^{\cdot}(0) = l_g(\dot{c}(0)) = gA;$$

   somit ist $g \mapsto gA$ das zu A gehörige links-invariante Vektorfeld. Eine Rechnung zeigt: Für $A, B \in \underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{R})$ ist $[A, B] = [gA, gB]_e = AB - BA$ (Übung).
2. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, Dimension $2n^2$, $\underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$, $[A, B] = AB - BA$.
3. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det g = 1\}$, Dimension $n^2 - 1$,

   $$\underline{\mathrm{sl}}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{spur}\, A = 0\}.$$

4. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : \det g = 1\}$, Dimension $2(n^2 - 1)$,

   $$\underline{\mathrm{sl}}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \mathrm{spur}\, A = 0\}.$$

5. $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : gg^{\mathrm{t}} = e\}$, $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, Dimension $n(n-1)/2$,

   $$\underline{\mathrm{o}}(n) = \underline{\mathrm{so}}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^{\mathrm{t}}\}.$$

6. $\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : g\bar{g}^{\mathrm{t}} = e\}$, Dimension n^2,

   $$\underline{\mathrm{u}}(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A = -\bar{A}^{\mathrm{t}}\}.$$

   $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, Dimension $n^2 - 1$,

   $$\underline{\mathrm{su}}(n) = \underline{\mathrm{u}}(n) \cap \underline{\mathrm{sl}}(n, \mathbb{C}).$$

7. Affine Gruppe $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, $(g,v)(h,w) = (gh, gw+v)$,

$$\underline{g} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n, \quad [(A,v),(B,w)] = (AB-BA, Aw-Bv).$$

8. Der Vektorraum $\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ der Quaternionen, dessen nicht-kommutierende imaginäre Einheiten i,j,k die Relationen $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ und somit

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

erfüllen, bildet eine Divisionsalgebra mit Norm $\|a+bi+cj+dk\| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$. Fasst man die 3-dimensionale Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ als die Menge $\{a+bi+cj+dk \in \mathbb{H} : \|a+bi+cj+dk\| = 1\}$ der Einheitsquaternionen auf, so erhält S^3 dadurch die Struktur einer Lie-Gruppe. Die zugehörige Lie-Algebra $\underline{\mathrm{s}}^3$ wird durch i,j,k erzeugt, wobei

$$[i,j] = 2k, \quad [j,k] = 2i, \quad [k,i] = 2j.$$

Die Quotientengruppe $S^3/\{1,-1\}$ bildet eine Lie-Gruppe diffeomorph zu $\mathbb{R}P^3$.

Bemerkungen:

1. Ist $F\colon G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus (bzw. -Isomorphismus), so ist $F_{*e}\colon \underline{g} \to \underline{h}$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus (bzw. -Isomorphismus).
2. Die Lie-Gruppen S^3 und $\mathrm{SU}(2)$ sind isomorph, ausserdem ist $S^3/\{1,-1\}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(3)$. Insbesondere sind die Lie-Algebren $\underline{\mathrm{s}}^3, \underline{\mathrm{su}}(2), \underline{\mathrm{so}}(3)$ isomorph.

Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $i\colon H \to G$ wird eine *Unter-Lie-Gruppe* von G genannt, falls i eine injektive Immersion ist; $i(H)$ ist Untergruppe von G, im Allgemeinen ist i aber kein Homömorphismus auf $i(H)$ bezüglich der durch G induzierten Topologie.

Beispiel: Für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist $i\colon (\mathbb{R},+) \to (T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, +)$, $t \mapsto (t,\alpha t) \bmod \mathbb{Z}^2$, eine injektive Immersion aber keine Einbettung; $i(\mathbb{R})$ liegt dicht in T^2.

Mittels Satz 10.13 (Frobenius) und Lemma 12.2 kann man zeigen: *Ist $\underline{h}' \subset \underline{g}$ Unter-Lie-Algebra, $\underline{g}$ die Lie-Algebra von G, so existiert eine zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe $i\colon H \to G$ mit $i_{e*}\bar{h} = \bar{h}'$. Jede andere zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe $\tilde{i}\colon \tilde{H} \to G$ mit $\tilde{i}_{e*}\tilde{\underline{h}} = \underline{h}'$ ist von der Form $\tilde{i} = i \circ F$ für einen Lie-Gruppen-Isomorphismus $F\colon \tilde{H} \to H$.*

Exponentialabbildung

12.5 Lemma
Links-invariante Vektorfelder sind vollständig integrierbar. Die Integralkurven $c\colon \mathbb{R} \to G$ mit $c(0) = e$ sind genau die Lie-Gruppen-Homomorphismen $(\mathbb{R}, +) \to G$.

12.6 Definition (Exponentialabbildung)
Die Abbildung $\exp\colon \underline{g} \to G$, $\exp(X_0) := c(1)$ für den eindeutig bestimmten Homomorphismus $c\colon \mathbb{R} \to G$ mit $\dot{c}(0) = X_0$, heisst *Exponentialabbildung* von G.

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n} = \underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{C})$ sei

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j} A^j.$$

Es gilt:
(1) Für $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist $Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$,
(2) $\det(e^A) = e^{\mathrm{spur}(A)}$, und
(3) für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ ist $e^{A+B} = e^Ae^B$.
Wegen (3) ist $c\colon t \mapsto e^{tA}$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in G, und $\dot{c}(0) = A$. Somit gilt für die Lie-Gruppen-Exponentialabbildung

$$\exp\colon \underline{\mathrm{gl}}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

gerade $\exp(A) = e^A$.

12.7 Satz
Ist G eine Lie-Gruppe und sind $X_0, Y_0 \in \underline{g}$, so gilt

$$\exp(tX_0)\exp(tY_0) = \exp\big(t(X_0 + Y_0) + \tfrac{t^2}{2}[X_0, Y_0] + O(t^3)\big).$$

Abgeschlossene Untergruppen und homogene Räume

12.8 Satz (abgeschlossene Untergruppe)
Es sei H eine abgeschlossene Teilmenge der Lie-Gruppe G, und H sei auch Untergruppe der Gruppe G. Dann ist H eine Untermannigfaltigkeit und somit eine Unter-Lie-Gruppe von G.

Es sei jetzt H eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G (vgl. Satz 12.8). Dann bezeichne

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

die Menge der Linksnebenklassen von H (d.h. die Menge der Äquivalenzklassen der Relation $g \sim g' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H$) und

$$\pi\colon G \to G/H, \quad g \mapsto gH$$

die Projektion. Weiter sei G/H mit der Quotiententopologie versehen; $U \subset G/H$ ist also genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset G$ offen ist. Dann ist π stetig und offen, und G/H besitzt eine abzählbare Basis der Topologie. Mittels der Abgeschlossenheit von H folgt, dass G/H hausdorffsch ist.

12.9 Satz (differenzierbare Struktur auf G/H)
Auf G/H existiert genau eine C^∞-Struktur, so dass gilt:

(1) *$\pi\colon G \to G/H$ ist C^∞, und*

(2) *es existieren lokale C^∞-Schnitte von π, d.h. für alle $gH \in G/H$ existiert eine Umgebung U von gH in G/H und eine C^∞-Abbildung $\sigma\colon U \to G$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.*

Es gilt $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Bemerkungen:

1. Eine Funktion f auf G/H ist genau dann C^∞, wenn $f \circ \pi$ C^∞ ist.
2. Ist G Lie-Gruppe und $H \subset G$ abgeschlossener Normalteiler, so besitzt G/H Lie-Gruppen-Struktur.
3. Ist $F\colon G \to G'$ surjektiver Lie-Gruppen-Homomorphismus, so ist $F'\colon G/\ker(F) \to G'$ Lie-Gruppen-Isomorphismus.

12.10 Definition (homogener Raum)
Eine Mannigfaltigkeit der Gestalt G/H für eine Lie-Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$, versehen mit der durch Satz 12.9 charakterisierten differenzierbaren Struktur, heisst ein *homogener Raum*.

Eine *Aktion* (oder *Operation*) der Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M ist eine C^∞-Abbildung $G \times M \to M$, geschrieben als $(g, p) \mapsto gp$, mit

$$g'(gp) = (g'g)p \quad \text{und} \quad ep = p$$

für alle $g, g' \in G$, $p \in M$. Für festes $g \in G$ ist die Abbildung $F_g\colon p \mapsto gp$ ein Diffeomorphismus von M. Die Aktion heisst *treu* (oder *effektiv*), falls $F_g \neq \mathrm{id}_M$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$. Die Aktion heisst *transitiv*, falls für alle $p, q \in M$ ein $g \in G$ existiert mit $gp = q$.

Ist H abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G, so operiert G in kanonischer Weise auf dem homogenen Raum G/H:

$$G \times G/H \to G/H, \quad (g, g'H) \mapsto gg'H.$$

Diese Operation ist transitiv, denn für $gH, g'H \in G/H$ ist $(g'g^{-1})gH = g'H$. Für festes $g \in G$ ist $g'H \mapsto gg'H$ ein Diffeomorphismus von G/H; jeder homogene Raum besitzt also eine transitiv operierende Gruppe von Diffeomorphismen.

Der nächste Satz wird zeigen: Jede Mannigfaltigkeit mit einer transitiven Operation einer Lie-Gruppe ist diffeomorph zu einem homogenen Raum. Operiert die Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M, so heisst

$$G_p = \{g \in G : gp = p\}$$

Isotropie-Gruppe der Aktion im Punkt $p \in M$. Dies ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, und aus $gp = q$ folgt $G_q = gG_pg^{-1}$. Die Abbildung

$$I\colon G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto gp$$

ist wohldefiniert und injektiv. Operiert G transitiv, so existiert für alle $q \in M$ ein $g \in G$ mit $I(gG_p) = gp = q$; I ist also in diesem Fall auch surjektiv.

12.11 Satz (transitive Aktion)
Es sei $G \times M \to M$ eine transitive Aktion und $p \in M$. Dann ist

$$I\colon G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto gp$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis: Die Abbildung $\tilde{I}\colon G \to M$, $\tilde{I}(g) = gp$, ist C^∞ und erfüllt $\tilde{I} = I \circ \pi$. Aufgrund von Satz 12.9(2) ist I daher ebenfalls C^∞. Wir zeigen noch, dass I_* in jedem Punkt ein Isomorphismus ist. Für $g \in G$ bezeichne F_g den durch $F_g(p) = gp$ definierten Diffeomorphismus von M. Für alle $h \in G$ gilt $(\tilde{I} \circ l_g)(h) = ghp = (F_g \circ \tilde{I})(h)$. Durch Ableiten der Identität $\tilde{I} \circ l_g = F_g \circ \tilde{I}$ im Punkt e folgt, dass $\tilde{I}_*$ konstanten Rang hat. Da $\tilde{I}$ surjektiv ist, muss dieser Rang gleich $\dim M$ sein. Wegen $\tilde{I} = I \circ \pi$ hat dann auch I_* überall Rang $\dim M$. □

Beispiele:

1. S^{n-1}, $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ sind diffeomorph.
2. S^{2n-1}, $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$, $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$ sind diffeomorph.
3. Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist diffeomorph zu $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{O}(n-1)$.
4. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^{n-1}$ ist diffeomorph zu $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{U}(n-1)$.
5. Die *Grassmann-Mannigfaltigkeit* $G(n,m)$ aller m-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n-m))$, $G(n,n-1)$ und $G(n,1)$ sind diffeomorph zu $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Kapitel III

Riemannsche Geometrie

13 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Riemannsche Metrik und Distanzfunktion

Im Folgenden bezeichnet M eine m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

13.1 Definition (riemannsche Metrik)
Eine *riemannsche Metrik* g auf M ist ein $(0,2)$-Tensorfeld (d.h. $g \in \Gamma(T_{0,2}(TM))$) mit folgender Eigenschaft: Für alle $p \in M$ ist

$$g_p \colon TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt (eine positiv definite symmetrische Bilinearform). Das Paar (M, g) heisst eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.

13.2 Definition (Isometrie)
(1) Zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g), $(\bar{M}, \bar{g})$ heissen *isometrisch*, falls ein Dfiffeomorphismus $F \colon M \to \bar{M}$ existiert mit $F^*\bar{g} = g$; F heisst dann eine *Isometrie*.

(2) Eine glatte Abbildung $F \colon M \to \bar{M}$ heisst *isometrische Immersion* bzw. *isometrische Einbettung*, falls $F^*\bar{g} = g$ und F Immersion bzw. Einbettung.

13.3 Satz (Distanzfunktion)
Sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann definiert

$$d(p,q) := \inf\{L(c) : c \colon [a,b] \to M \text{ ist stetig und stückweise } C^1, \\ c(a) = p,\ c(b) = q\}$$

eine Distanzfunktion (Metrik) auf M. Die von d induzierte Topologie stimmt mit derjenigen von M überein.

Kovariante Ableitung und Geodätische

13.4 Definition (linearer Zusammenhang)
Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein *linearer Zusammenhang* oder eine *kovariante Ableitung* ∇ auf TM ist eine bilineare Abbildung

$$\nabla\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),\quad (X,Y)\mapsto \nabla(X,Y)=:\nabla_X Y,$$

mit folgenden Eigenschaften:
(1) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$,
(2) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$
für alle $X,Y\in\Gamma(TM)$ und $f\in C^\infty(M)$.

Aufgrund von (1) hängt $(\nabla_X Y)_p$ für ein gegebenes $Y\in\Gamma(TM)$ nur von X_p ab. Die Abbildung $T\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$,

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

heisst der *Torsionstensor* von ∇; T definiert ein $(1,2)$-Tensorfeld auf M (vgl. Satz 10.7). Im Fall $T\equiv 0$ nennt man ∇ *torsionsfrei*.

Ist g eine riemannsche Metrik auf M, so heisst ∇ *riemannsch*, falls

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

für alle $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$.

13.5 Satz (Levi-Civita)
Für jede riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) existiert genau ein torsionsfreier und riemannscher linearer Zusammenhang auf TM.

Dieser lineare Zusammenhang, den wir mit D statt ∇ bezeichnen, heisst *Levi–Civita-Zusammenhang* von (M,g). Er ist durch die *Koszul-Formel*

$$\begin{aligned}2g(D_X Y,Z) = {}& X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y))\\ & - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])\end{aligned}$$

charakterisiert.

Im Folgenden sei $F\colon N\to M$ eine C^∞-Abbildung. Wir bezeichnen den Vektorraum der Vektorfelder längs F mit $\Gamma(F^*TM)$. Ein Element $X\in\Gamma(F^*TM)$ ist also eine C^∞-Abbildung $X\colon N\to TM$ mit $X_p := X(p)\in TM_{F(p)}$ für alle $p\in N$.

Beispiele:
1. Für $Z\in\Gamma(TM)$ ist $Z\circ F\in\Gamma(F^*TM)$.

2. Ist $X \in \Gamma(TN)$, so definiert $(F_*X)(p) := F_{*p}X_p = F_*X_p \in TM_{F(p)}$ für $p \in N$ ein Vektorfeld $F_*X \in \Gamma(F^*TM)$ längs F. Im Fall einer Kurve $c\colon I \to M$ schreiben wir natürlich $\dot{c}$ oder dc/dt anstelle von $c_*(d/dt) \in \Gamma(c^*TM)$.

Ist ein linearer Zusammenhang ∇ auf TM gegeben, so erhält man für jede C^∞-Abbildung $F\colon N \to M$ eine entsprechende kovariante Ableitung für Vektorfelder längs F. Der durch F und ∇ induzierte *lineare Zusammenhang längs F* ist die bilineare Abbildung

$$\nabla^F\colon \Gamma(TN) \times \Gamma(F^*TM) \to \Gamma(F^*TM), \quad (X,Y) \mapsto \nabla^F(X,Y) =: \nabla^F_X Y,$$

die durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:
(1) $\nabla^F_{fX}Y = f\nabla^F_X Y$,
(2) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla^F_X Y$,
(3) $\big(\nabla^F_X(Z \circ F)\big)_p = \nabla_{F_*X_p}Z$
für alle $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(F^*TM)$, $f \in C^\infty(N)$, $Z \in \Gamma(TM)$ und $p \in N$. Ist ∇ torsionsfrei, so gilt

$$T^F(X_1,X_2) := \nabla^F_{X_1}F_*X_2 - \nabla^F_{X_2}F_*X_1 - F_*[X_1,X_2] \equiv 0$$

für alle $X_1, X_2 \in \Gamma(TN)$. Ist ∇ riemannsch bezüglich der riemannschen Metrik g auf M, so gilt

$$X(g(Y_1,Y_2)) = g\big(\nabla^F_X Y_1, Y_2\big) + g\big(\nabla^F_X Y_1, Y_2\big)$$

für alle $X \in \Gamma(TN)$ und $Y_1, Y_2 \in \Gamma(F^*TM)$. Ist $\nabla = D$ für die riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g), so ist D^F der entsprechende *Levi-Civita-Zusammenhang längs F*. Im Folgenden schreiben wir meist einfach wieder D statt D^F.

Ein Vektorfeld $Y \in \Gamma(c^*TM)$ längs einer Kurve $c\colon I \to (M,g)$ heisst *parallel*, falls $D_{d/dt}\,Y \equiv 0$. Geodätische sind ebenfalls wie in Kapitel I erklärt, und auch die Formel für die erste Variation der Bogenlänge lautet wie dort.

13.6 Definition
Eine Kurve $c\colon I \to (M,g)$ mit $D_{d/dt}\,\dot{c} \equiv 0$ heisst *Geodätische*.

Es sei $c\colon (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine C^∞-Variation von $c_0\colon [a,b] \to M$, $c_s(t) := c(s,t)$, mit Variationsvektorfeld $V_s(t) := (\partial c/\partial s)(s,t) := c_*(\partial/\partial s)|_{(s,t)}$.

13.7 Satz (erste Variationsformel)
Falls $|\dot{c}_0| \equiv k \neq 0$, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c_s) = \frac{1}{k}\bigg(g\big(V_0(t),\dot{c}_0(t)\big)\Big|_a^b - \int_a^b g\big(V_0(t), D_{d/dt}\,\dot{c}_0(t)\big)\,dt\bigg).$$

Exponentialabbildung und Satz von Hopf-Rinow

Für jeden Vektor $v \in TM$ existiert genau eine auf einem maximalen (möglicherweise unbeschränkten) offenen Intervall $0 \in (\alpha_v, \omega_v) \subset (-\infty, \infty)$ definierte Geodätische

$$c_v \colon (\alpha_v, \omega_v) \to M$$

mit $\dot{c}_v(0) = v$. Es gilt $c_v(t) = c_{tv}(1)$, und die Menge $\Omega := \{v \in TM : 1 < \omega_v\}$ ist offen in TM.

13.8 Definition (Exponentialabbildung)
Die (C^∞-)Abbildung $\Omega \to M$, $v \mapsto c_v(1)$, heisst *Exponentialabbildung* von M und wird mit exp bezeichnet. Für $p \in M$ setzt man $\Omega_p := \Omega \cap TM_p$ und $\exp_p := \exp|_{\Omega_p}$.

Das Differential $(\exp_p)_{*0} \colon T(\Omega_p)_0 = TM_p \to TM_{\exp_p(0)} = TM_p$ ist die Identität auf TM_p: Für $v \in TM_p$ gilt

$$(\exp_p)_{*0} v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c_{tv}(1) = \dot{c}_v(0) = v.$$

Mit dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit folgt die Existenz einer offenen Umgebung $V_p \subset \Omega_p$ von 0, so dass $\exp_p|_{V_p} \colon V_p \to \exp_p(V_p) =: U_p$ ein Diffeomorphismus ist. Für eine lineare Isometrie $L \colon (TM_p, g_p) \to (\mathbb{R}^m, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ erhält man sogenannte *Normalkoordinaten*

$$\varphi := L \circ (\exp_p|_{V_p})^{-1} \colon U_p \to L(V_p) \subset \mathbb{R}^m$$

um p.

13.9 Lemma (Normalkoordinaten)
In Normalkoordinaten um $p \in M$ gilt $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $(\partial g_{ij}/\partial \varphi^k)(p) = 0$ und $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ für alle i, j, k.

13.10 Lemma („Gauss-Lemma“)
Es sei $u \in TM_p$, und $q := \exp_p(u)$ sei definiert. Dann besitzt das Differential $T_u := (\exp_p)_{*u} \colon T(TM_p)_u = TM_p \to TM_q$ die folgende Eigenschaft: Sind $v, w \in TM_p$, und sind u, v linear abhängig, so gilt $g_q(T_u v, T_u w) = g_p(v, w)$.

13.11 Satz
Sei $p \in M$, und sei $r > 0$ hinreichend klein, so dass $\exp_p$ auf $B(0, r)$ definiert ist und $\exp_p|_{B(0,r)} \colon B(0, r) \to \exp_p(B(0, r))$ ein Diffeomorphismus ist.

(1) *Ist $v \in B(0, r)$ und $\gamma \colon [a, b] \to M$ eine stetige, stückweise C^1-Kurve von p nach $c_v(1) = \exp_p(v)$, so gilt*

$$L(\gamma) \geq L(c_v|_{[0,1]});$$

Gleichheit tritt nur ein, wenn γ eine Umparametrisierung von $c_v|_{[0,1]}$ ist. Insbesondere gilt $d(p, c_v(1)) = L(c_v|_{[0,1]}) = |v|$.

(2) *Ist M zusammenhängend, $0 < \varrho < r$, und ist $q \in M$ ein Punkt ausserhalb von $\exp_p(\bar{B}(0,\varrho)) =: K$, so existiert ein $q' \in \partial K$ mit $d(p,q) = d(p,q') + d(q',q)$. Insbesondere ist $K = \bar{B}(p,\varrho)$.*

13.12 Satz (Hopf–Rinow 1932)
Sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind die folgenden vier Eigenschaften äquivalent:

(1) *Der metrische Raum (M, d) (s. Satz 13.3) ist vollständig.*

(2) *Es existiert ein $p \in M$, so dass $\exp_p$ auf ganz TM_p definiert ist.*

(3) *Für jeden Punkt p ist $\exp_p$ auf ganz TM_p definiert.*

(4) *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von M ist kompakt.*

Gilt eine (und somit jede) dieser Eigenschaften, so existiert für jedes Paar von Punkten $p, q \in M$ eine Geodätische von p nach q der Länge $d(p,q)$.

Eine *vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit den im Satz genannten Eigenschaften.

14 Krümmung

Wir noch ergänzt (Riemannscher Krümmungstensor, Schnittkrümmung, ric, scal, kovariante Ableitung von Tensorfeldern, 2. Bianchi-Identität, Satz von Schur und Einstein-Mannigfaltigkeiten, Krümmungsbegriffe für Untermannigfaltigkeiten, 2. Fundamentalform, Gauss-Gleichungen).

15 Zweite Variation der Bogenlänge und Jacobifelder

Wird noch ergänzt (2. Variationsformel, Satz von Synge, Jacobifelder, Satz von Bonnet-Myers, Indexform, konjugierte Punkte, Indexlemma, Vergleichssatz von Rauch und Folgerungen).

16 Riemannsche Submersionen und Überlagerungen

Riemannsche Submersionen

16.1 Definition (riemannsche Submersion)
Seien $(\bar{M}, \bar{g}), (M, g)$ riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi\colon \bar{M} \to M$ eine Submersion (d.h. $\pi_{*p}\colon T\bar{M}_p \to TM_{\pi(p)}$ ist surjektiv für alle $p \in \bar{M}$). Dann heisst π eine *riemannsche Submersion*, falls für alle $p \in M$ die Abbildung

$$\pi_{*p}|_{(\ker \pi_{*p})^\perp}\colon (\ker \pi_{*p})^\perp \to TM_{\pi(p)}$$

eine Isometrie ist.

16.2 Lemma
Sind $\bar{M}, M$ zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Distanzfunktionen $\bar{d}$ bzw. d, und ist $\pi\colon \bar{M} \to M$ eine riemannsche Submersion, so gilt $d(\pi(p), \pi(q)) \leq \bar{d}(p, q)$ für alle $p, q \in M$.

16.3 Satz
Sei $\pi\colon \bar{M} \to M$ eine surjektive Submersion und $\bar{g}$ eine riemannsche Metrik auf $\bar{M}$. Für alle $p, q \in \bar{M}$ mit $\pi(p) = \pi(q)$ existiere eine Isometrie $\gamma \in \mathrm{Iso}(\bar{M}, \bar{g})$ mit $\gamma(p) = q$ und $\pi \circ \gamma = \pi$. Dann gibt es genau eine riemannsche Metrik auf M, so dass $\pi\colon (\bar{M}, \bar{g}) \to (M, g)$ eine riemannsche Submersion ist.

16.4 Satz
Sei $\pi\colon \bar{M} \to M$ eine riemannsche Submersion.

(1) *Sei c eine Geodätische von M mit $c(0) = \pi(p)$. Für jedes hinreichend kleine $\epsilon > 0$ existiert ein eindeutig bestimmter horizontaler Lift $\bar{c}\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \bar{M}$ von c mit $\bar{c}(0) = p$, und $\bar{c}$ ist Geodätische von $\bar{M}$.*

(2) *Sei $\bar{c}$ eine Geodätische von $\bar{M}$ mit horizontalem Anfangsvektor $\dot{\bar{c}}(0)$. Dann ist $\bar{c}$ horizontal, und $c := \pi \circ \bar{c}$ ist Geodätische von M.*

(3) *Ist $\bar{M}$ vollständig und M zusammenhängend, so ist M vollständig.*

Riemannsche Überlagerungen

16.5 Definition
Eine Überlagerung $\pi\colon (\bar{M}, \bar{g}) \to (M, g)$ mit $\pi^* g = \bar{g}$ heisst eine *Riemannsche Überlagerung.*

16.6 Lemma
Sei $\pi\colon (\bar{M}, \bar{g}) \to (M, g)$ eine lokale Isometrie, d.h. $\pi^* g = \bar{g}$, und sei $(\bar{M}, \bar{g})$ vollständig. Dann ist π eine riemannsche Überlagerung.

16.7 Satz (Hadamard 1898, Cartan 1926)
Sei (M, g) eine m-dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\sec \leq 0$. *Dann ist* $\exp_p \colon TM_p \to M$ *eine Überlagerung für alle $p \in M$. Ist M zusätzlich einfach-zusammenhängend, so ist M diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$.*

Eine vollständige und einfach-zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\sec \leq 0$ heisst eine *Hadamard-Mannigfaltigkeit*.

16.8 Lemma
Seien $F, G \colon \bar{M} \to M$ lokale Isometrien, und sei $\bar{M}$ zusammenhängend. Gilt $F(p) = G(p)$ und $F_{*p} = G_{*p}$ für ein $p \in \bar{M}$, so ist $F = G$.

Beweis: Die Menge $A := \{q \in \bar{M} : F(q) = G(q) \text{ und } F_{*q} = G_{*q}\}$ ist nichtleer (da $p \in A$) und abgeschlossen aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von F und G. Sei $q \in A$. Da F und G lokale Isometrien sind, gilt

$$F \circ \exp_q = \exp_{F(q)} \circ F_{*q} = \exp_{G(q)} \circ G_{*q} = G \circ \exp_q$$

in einer Umgebung von $0_q \in T\bar{M}_q$ und somit $F = G$ in einer Umgebung von q. Damit ist A auch offen. Da $\bar{M}$ zusammenhängend ist, folgt $A = \bar{M}$, also $F = G$ auf ganz M. □

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ bezeichne M^m_κ ($m \geq 2$) den m-dimensionalen (vollständigen, einfach-zusammenhängenden) Modellraum konstanter Schnittkrümmung κ,

$$M^m_\kappa = \begin{cases} (S^m, \frac{1}{\kappa} g^{\mathrm{sph}}) & \text{falls } \kappa > 0, \\ (\mathbb{R}^m, g^{\mathrm{eukl}}) & \text{falls } \kappa = 0, \\ (H^m, \frac{1}{|\kappa|} g^{\mathrm{hyp}}) & \text{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

Weiter bezeichne

$$D_\kappa = \operatorname{diam} M^m_\kappa = \begin{cases} \pi/\sqrt{\kappa} & \text{falls } \kappa > 0, \\ \infty & \text{falls } \kappa \leq 0 \end{cases}$$

den Durchmesser von M^m_κ.

16.9 Satz (Killing 1893, Hopf 1925)
Sei M eine m-dimensionale Raumform, d.h. eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung $\sec \equiv \kappa \in \mathbb{R}$. *Dann existiert eine frei und eigentlich diskontinuierlich operierende Gruppe von Isometrien $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(M^m_\kappa)$, so dass M isometrisch zu M^m_κ/Γ ist. Ist M einfach-zusammenhängend, so ist M isometrisch zu M^m_κ.*

Beispiele:

1. Für die Standardsphäre (S^m, g^{sph}) und $\Gamma = \{\text{id}, -\text{id}\}$ ist

$$(S^m, g^{\text{sph}})/\Gamma = (\mathbb{R}P^m, g^{\text{ell}})$$

der reelle projektive Raum. Die kanonische (Quotienten-)Metrik g^{ell} auf $\mathbb{R}P^m$ heisst *elliptische Metrik*. Für m gerade sind S^m und $\mathbb{R}P^m$ die einzigen sphärischen Raumformen, s. Satz 16.10.

2. Die 3-Sphäre (S^3, g^{sph}) besitzt weitere Quotienten: Seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann ist

$$\Gamma := \{(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi in/q} z_1, e^{2\pi inp/q} z_2) | n = 0, \ldots, q-1\}$$

eine frei und eigentlich diskontinuierlich operierende Gruppe von Isometrien von $(S^3, g^{\text{sph}}) \subset \mathbb{C}^2$. Die Quotienten $L(p,q) := S^3/\Gamma$ heissen *Linsenräume*.

3. Sei $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^m, g^{\text{eukl}})$ eine Gruppe von Translationen, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^m$ operiert. Dann existieren linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\Gamma = \{x \mapsto x + \textstyle\sum_{i=1}^k z_i v_i | (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{Z}^k\}$$

(Übung), d.h. Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^k$. Im Fall $k = m$ ist $(\mathbb{R}^m, g^{\text{eukl}})/\Gamma$ ein *flacher m-Torus*, diffeomorph zu $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. Im Fall $k < m$ ist $(\mathbb{R}^m, g^{\text{eukl}})/\Gamma$ isometrisch zum Produkt $(T^k \times \mathbb{R}^{m-k}, g \times g^{\text{eukl}})$ für einen flachen k-Torus (T^k, g).

4. $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^m, g^{\text{eukl}})$ operiere frei und eigentlich diskontinuierlich mit kompaktem Quotienten. Dann hat die Gruppe der Translationen $\Gamma' \subset \Gamma$ endlichen Index in Γ, und man erhält eine endliche Überlagerung von $\mathbb{R}^m/\Gamma$ durch den flachen Torus $\mathbb{R}^m/\Gamma'$ (*Satz von Bieberbach* (1912)).

5. Jede kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ lässt sich als Quotient $(H^2, g^{\text{hyp}})/\Gamma$ realisieren. Die Konstruktion hängt von $6g-6$ Parametern ab, der entsprechende Modulraum heisst *Teichmüllerraum*.

6. Für Quotienten von (H^m, g^{hyp}) mit $m \geq 3$ gilt der *Starrheitssatz von Mostow* (1973): Sind H^m/Γ und H^m/Γ' kompakt und Γ, Γ' isomorph, dann sind H^m/Γ und H^m/Γ' isometrisch.

16.10 Satz
Sei M eine Raumform mit Schnittkrümmung 1 und gerader Dimension m. Dann ist M isometrisch zur Standardsphäre S^m oder zum reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^m = S^m/\{\text{id}, -\text{id}\}$.

Beweis: Nach Satz 16.9 ist $M = S^m/\Gamma$ für eine frei und eigentlich diskontinuierlich operierende Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(S^m) = O(m+1)$. Sei $\gamma \in \Gamma$. Da $m+1$ ungerade ist, besitzt γ einen Eigenwert 1 oder -1. Im ersten Fall folgt $\gamma = \mathrm{id}$, da Γ fixpunktfrei operiert. Ist dagegen -1 der einzige reelle Eigenwert von γ, so ist 1 Eigenwert von γ^2, also $\gamma^2 = \mathrm{id}$. Dann folgt $\gamma = -\mathrm{id}$: Wäre $\gamma(v) \neq -v$ für ein $v \in S^m$, so wäre $\gamma(v) + v \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert 1. Damit gilt $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$ oder $\Gamma = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. □

Literatur: J. A. Wolf, Spaces of Constant Curvature, Publish or Perish, 1974.

Anhang

A Mehrdimensionale Analysis

(Wird noch ergänzt.)

A.1 Satz (implizite Funktionen, surjektive Form)
Es sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^\infty(W, \mathbb{R}^k)$, $p \in W$, $F(p) = 0$ und dF_p surjektiv. Dann existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ von $(0,0)$ und $V \subset W$ von p sowie ein C^∞-Diffeomorphismus $\psi\colon U \to V$, so dass $\psi(0,0) = p$ und

$$(F \circ \psi)(x, y) = y$$

für alle $(x, y) \in U$ (kanonische Projektion).

A.2 Satz (implizite Funktionen, injektive Form)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, $0 \in U$, $f(0) = p$ und df_0 injektiv. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$ von p und $W \subset U \times \mathbb{R}^{n-m}$ von $(0,0)$ sowie ein C^∞-Diffeomorphismus $\varphi\colon V \to W$, so dass $\varphi(p) = (0,0)$ und

$$(\varphi \circ f)(x) = (x, 0)$$

für alle $(x, 0) \in W$ (kanonische Inklusion).

B Grundbegriffe der Topologie

Literatur: Jedes Buch über mengentheoretische (allgemeine) Topologie. Besonders empfehlenswert: K. Jänich, Topologie, Springer Lehrbuch.

B.1 Definition (Topologie, topologischer Raum)
Sei M eine Menge. Eine *Topologie* auf M ist ein System von Teilmengen von M, *offene Mengen* genannt, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\emptyset$ und M sind offen,

(2) die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen,

(3) der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

Durch die Wahl einer Topologie auf M wird M zu einem *topologischen Raum*.

Beispiele:

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Bezüglich der *durch d induzierten Topologie* ist $U \subset M$ offen genau dann, wenn es für alle $p \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B(p, r) = \{q \in M |\ d(p, q) < r\} \subset U$.
2. Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^m$ ist induziert durch die Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$.
3. Die *triviale Topologie* auf einer Menge M besteht nur aus $\emptyset$ und M, die *diskrete Topologie* aus sämtlichen Teilmengen von M.

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes M heisst *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen ist; $\emptyset$ und M sind also offen und abgeschlossen. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen zwei topologischen Räumen ist *stetig*, falls $f^{-1}(V) \subset M$ offen ist für jede offene Menge $V \subset N$. Die Abbildung f heisst ein *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} beide stetig sind.

B.2 Definition (induzierte Topologie)
Sei N ein topologischer Raum und $M \subset N$. Die *induzierte Topologie* oder *Teilraumtopologie* auf M besteht aus allen Mengen $U \subset M$ der Gestalt $U = M \cap V$ mit V offen in N.

B.3 Definition (Kompaktheit)
Ein topologischer Raum M heisst *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D.h.: Ist $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ für offene Mengen $U_\alpha \subset M$ und eine Indexmenge A, so existiert eine endliche Menge $B \subset A$ mit $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = M$.

Ist M kompakt und $f\colon M \to N$ stetig, so ist $f(M)$ ein kompakter Teilraum von N. Ist M kompakt und A abgeschlossen in M, so ist A ein kompakter Teilraum von M.

Eine Menge $U \subset M$ heisst *Umgebung* eines Punktes $p \in M$, falls es eine offene Menge V gibt mit $p \in V \subset U$.

B.4 Definition (Hausdorffraum)
Ein topologischer Raum M heisst *Hausdorffraum* oder *hausdorffsch*, falls zu je zwei verschiedenen Punkten in M disjunkte Umgebungen existieren.

Jeder metrische Raum (mit der von der Metrik induzierten Topologie) ist hausdorffsch.

B.5 Lemma
Ist M ein Hausdorffraum und $A \subset M$ ein kompakter Teilraum, dann ist A abgeschlossen in M.

Daraus folgt leicht, dass jede stetige bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ von einem kompakten Raum M auf einen Hausdorffraum N ein Homöomorphismus ist.

B.6 Definition (Basis, Subbasis)
Sei M ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen heisst

(a) eine *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist,

(b) eine *Subbasis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Beispiele:

1. Die Menge aller offenen Bälle bildet eine Basis der Topologie eines metrischen Raumes.
2. Die Menge aller $B(x, r)$ mit $x \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ ist eine abzählbare Basis der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}^m$.

B.7 Definition (Produkttopologie)
Seien M, N zwei topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $M \times N$ ist diejenige Topologie, für die die Mengen der Gestalt $U \times V \subset M \times N$ mit U offen in M und V offen in N eine Basis bilden.

B.8 Definition (Quotiententopologie)
Sei M ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $\pi\colon M \to M/\sim$ die kanonische Projektion auf den Raum der Äquivalenzklassen. Die *Quotiententopologie* auf $M/\sim$ besteht aus allen Mengen $V \subset M/\sim$, für die $\pi^{-1}(V)$ offen in M ist.

Ein topologischer Raum M heisst

(a) *zusammenhängend*, falls $\emptyset$ und M die einzigen in M gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen sind,

(b) *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein Weg (d.h. eine stetige Kurve) in M von p nach q existiert,

(c) *lokal wegzusammenhängend*, falls jeder Punkt $p \in M$ eine (bezüglich der induzierten Topologie) wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

Jeder wegzusammenhängende Raum ist auch zusammenhängend. Der Teilraum $\{(x, \sin(1/x))|\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\} \cup \{(0, y)|\ y \in [-1, 1]\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

B.9 Lemma

Ist M zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist M wegzusammenhängend.

C Multilineare Algebra

Es seien $V, V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume (über $\mathbb{R}$). Wir bezeichnen mit $L(V; W)$ den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W. Eine Abbildung

$$f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$$

heisst *multilinear* oder *n-linear*, falls für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und für feste $v_j \in V_j$, $j \neq i$, die Abbildung

$$v \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

von V_i nach W linear ist. Es bezeichne $L(V_1, \ldots, V_n; W)$ den Vektorraum aller solchen n-linearen Abbildungen.

C.1 Satz (Tensorprodukt)
Zu $V_1, \ldots, V_n$ existieren ein bis auf lineare Isomorphie eindeutig bestimmter Vektorraum $\mathcal{T}$ und eine n-lineare Abbildung $\tau \in L(V_1, \ldots, V_n; \mathcal{T})$, so dass es für jede n-lineare Abbildung $f \in L(V_1, \ldots, V_n; W)$ in einen Vektorraum W genau eine lineare Abbildung $g \in L(\mathcal{T}; W)$ mit $f = g \circ \tau$ gibt.

Der Vektorraum

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n := \mathcal{T}$$

heisst dann das *Tensorprodukt* von $V_1, \ldots, V_n$ mit *Tensorabbildung* τ. Man schreibt

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n := \tau(v_1, \ldots, v_n).$$

Die durch den Satz gegebene eindeutige Zuordnung $f \mapsto g$ ist ein linearer Isomorphismus

$$L(V_1, \ldots, V_n; W) \cong L(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n; W).$$

Für jede Permutation σ von $\{1, \ldots, n\}$ existiert ein Isomorphismus

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \cong V_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes V_{\sigma(n)},$$

wobei $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ auf $v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$ abgebildet wird. Für $m < n$ ist

$$(V_1 \otimes \ldots \otimes V_m) \otimes (V_{m+1} \otimes \ldots \otimes V_n) \cong V_1 \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Für jeden Vektorraum V ist die skalare Multplikation eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R} \times V$ nach V; dies induziert den Isomorphismus

$$\mathbb{R} \otimes V \cong V,$$

wobei $a \otimes v$ auf av abgebildet wird. Ist $V \cong V_1 \oplus V_2$ (direkte Summe), so ist

$$V \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W).$$

Die Konstruktion des Tensorprodukts ist natürlich in folgendem Sinn: Sind lineare Abbildungen $f_j \colon V_j \to V_j'$ gegeben, $j = 1, \ldots, n$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ mit

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f_1(v_1) \otimes \ldots \otimes f_n(v_n)$$

für $v_j \in V_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Wir nehmen jetzt an, die Vektorräume $V, V_1, \ldots, V_n$ seien endlichdimensional. Ist B_j eine Basis von V_j, $j = 1, \ldots, n$, so bilden die $b_1 \otimes \ldots \otimes b_n$, $b_j \in B_j$, eine Basis von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Insbesondere ist

$$\dim(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_n).$$

Wir bezeichnen mit $V^* := L(V; \mathbb{R})$ den Dualraum von V. Die Abbildung $v \mapsto \tilde{v} \in (V^*)^*$, $\tilde{v}(\lambda) := \lambda(v)$, ist ein kanonischer Isomorphismus $V \cong V^{**}$. Ist $\lambda_j \in V_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, so kann $\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \in V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^*$ auch als das oben erklärte Tensorprodukt

$$\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to \mathbb{R} \otimes \ldots \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

der linearen Abbildungen $\lambda_j \colon V_j \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden; dies gibt einen Isomorphismus

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \cong (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)^*.$$

Es gilt

$$(\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \lambda_1(v_1) \cdots \lambda_n(v_n).$$

Ein (r,s)-*Tensor* über V ist ein Element von

$$\begin{aligned} T_{r,s}(V) &:= \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s} \\ &\cong (\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{r} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s})^* \\ &\cong \{T \colon \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s} \to \mathbb{R} : T \text{ ist } (r+s)\text{-linear}\}. \end{aligned}$$

Es gilt $\dim(T_{r,s}(V)) = \dim(V)^{r+s}$, $T_{1,0}(V) = V$, $T_{0,1}(V) = V^*$, und man setzt noch $T_{0,0}(V) := \mathbb{R}$. Ist $(e_1, \ldots, e_m)$ eine Basis von V und $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^m)$ die duale Basis von V^*, $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$, so besitzt $T \in T_{r,s}(V)$ eine Darstellung

$$T = \sum_{j_1,\ldots,j_r,i_1,\ldots,i_s=1}^{m} T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{i_s}$$

mit Komponenten $T^{j_1\dots j_r}_{i_1\dots i_s} \in \mathbb{R}$.

Im Folgenden identifizieren wir $T_{0,s}(V)$ mit dem Vektorraum $L(V,\dots,V;\mathbb{R})$ der s-linearen Abbildungen $A\colon V\times\dots\times V\to\mathbb{R}$. Für $A\in T_{0,s}(V)$ und $B\in T_{0,t}(V)$ ist $A\otimes B\in T_{0,s+t}(V)$ dann gegeben durch

$$A\otimes B\,(v_1,\dots,v_{s+t}) = A(v_1,\dots,v_s)\,B(v_{s+1},\dots,v_{s+t}),$$

$v_1,\dots,v_{s+t}\in V$.

C.2 Satz (alternierender $(0,s)$-Tensor)
Für $A\in T_{0,s}(V)$ sind die folgenden vier Eigenschaften äquivalent:

(1) *A ist* alternierend, *d.h. $A(v_1,\dots,v_s)=0$ falls $v_i=v_j$ für zwei Indizes $i\neq j$,*

(2) *A ist* schief-symmetrisch, *d.h. $A(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(s)}) = -A(v_1,\dots,v_s)$ für jede Transposition τ von $\{1,\dots,s\}$,*

(3) *$A(v_1,\dots,v_s)=0$ für linear abhängige $v_1,\dots,v_s$.*

(4) *$A(w_1,\dots,w_s)=\det(a^i_j)\,A(v_1,\dots,v_s)$ falls $w_j=\sum_{i=1}^s a^i_j v_i$, $j=1,\dots,s$.*

Wir bezeichnen den Vektorraum der alternierenden $(0,s)$-Tensoren über V mit $\Lambda_s(V^*)$ und setzen $\Lambda_0(V^*):=\mathbb{R}$. Wegen (3) gilt $\Lambda_s(V^*)=\{0\}$ für $s>m=\dim(V)$.

Man definiert eine lineare Projektion $\mathrm{Alt}\colon T_{0,s}(V)\to\Lambda_s(V^*)\subset T_{0,s}(V)$ durch

$$\mathrm{Alt}(A)(v_1,\dots,v_s) := \frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sgn}(\sigma)\,A(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(s)}),$$

wobei über die $s!$ Permutationen von $\{1,\dots,s\}$ summiert wird. Ist $A\in T_{0,s}(V)$ und $B\in T_{0,t}(V)$, so gilt

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(A)\otimes B) = \mathrm{Alt}(A\otimes B) = \mathrm{Alt}(A\otimes\mathrm{Alt}(B))\in\Lambda_{s+t}(V^*).$$

C.3 Definition (äusseres Produkt)
Für $A\in\Lambda_s(V^*)$, $B\in\Lambda_t(V^*)$ ist das *äussere Produkt* oder *Dachprodukt* $A\wedge B\in\Lambda_{s+t}(V^*)$ definiert durch

$$A\wedge B := \frac{(s+t)!}{s!\,t!}\,\mathrm{Alt}(A\otimes B)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}&A\wedge B\,(v_1,\dots,v_{s+t})\\ &\quad=\frac{1}{s!\,t!}\sum_{\sigma\in S_{s+t}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,A(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(s)})\,B(v_{\sigma(s+1)},\dots,v_{\sigma(s+t)}).\end{aligned}$$

Sind beispielsweise $\lambda, \mu \in V^* = \Lambda_1(V^*)$, so ist

$$\lambda \wedge \mu\,(v, w) = \lambda(v)\mu(w) - \lambda(w)\mu(v).$$

Die Abbildung $\wedge\colon \Lambda_s(V^*) \times \Lambda_t(V^*) \to \Lambda_{s+t}(V^*)$ ist bilinear, und es gilt

$$B \wedge A = (-1)^{st} A \wedge B.$$

Insbesondere ist $A \wedge A = 0$ für $A \in \Lambda_s(V^*)$ und s ungerade. Sind $A \in \Lambda_s(V^*)$, $B \in \Lambda_t(V^*)$, $C \in \Lambda_u(V^*)$, so folgt

$$(A \wedge B) \wedge C = \frac{(s+t+u)!}{s!\,t!\,u!}\,\mathrm{Alt}(A \otimes B \otimes C) = A \wedge (B \wedge C).$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis von V und $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^m\}$ die dazu duale Basis von V^*. Für $1 \le i_1 < \ldots < i_s \le m$ und $1 \le j_1, \ldots, j_s \le m$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&(\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_s})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) \\
&\quad = s!\,\mathrm{Alt}(\epsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{i_s})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\delta^{i_1}_{j_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{i_s}_{j_{\sigma(s)}} \\
&\quad = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & \text{falls } \sigma \in S_s \text{ sodass } (j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(s)}) = (i_1, \ldots, i_s), \\ 0 & \text{falls } \{j_1, \ldots, j_s\} \neq \{i_1, \ldots, i_s\}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Menge

$$\{\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_s} : 1 \le i_1 < \ldots < i_s \le m\}$$

bildet eine Basis von $\Lambda_s(V^*)$, insbesondere ist $\dim(\Lambda_s(V^*)) = \binom{m}{s}$.

Literaturverzeichnis

[Bä] Christian Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter, 2001

[dC] Manfredo P. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 1983, 1998

[Ho] Heinz Hopf: Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math. No. 1000, Springer 1983, 1989

[Jo] Jürgen Jost: Differentialgeometrie und Minimalflächen, Springer 1994

[Kl] Wilhelm Klingenberg: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer 1973

[Kü] Wolfgang Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 1999, 2003

[SpIII] Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. III, Publish or Perish 1979

[BaT] Dennis Barden, Charles Thomas: An Introduction to Differential Manifolds, Imperial College Press 2003

[BrJ] Theodor Bröcker, Klaus Jänich: Einführung in die Differentialtopologie, Springer 1973, 1990

[GuP] Victor Guillemin, Alan Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall 1974

[Hi] Morris W. Hirsch: Differential Topology, Springer 1976, 1991

[Mi] John W. Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. Press of Virginia, Charlottesville 1965, 1990

[MiSt] John W. Milnor, James D. Stasheff: Characteristic Classes, Princeton Univ. Press 1974

[Wa] Frank W. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer 1971, 1983

[SpI] Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. I, Publish or Perish 1979