Übungen 2.

1. Zur Erinnerung: Eine Relation R auf einer Menge A ist eine Teilmenge von $A \times A$. Zeigen Sie: Eine Menge R deren Elemente geordnete Paare sind, ist eine Relation auf einer Menge, d.h., es existiert eine Menge A, so dass $R \subset A \times A$. Hinweis: Untersuchen Sie die Menge $\bigcup \bigcup R$.
2. Für jede Menge X gelten:
   (a) $\bigcup \mathcal{P} X = X$.
   (b) $\mathcal{P} \bigcup X \supset X$.
3. Es bezeiche
   $$N_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\} \ldots\},$$
   d.h., N_0 ist die kleinste Menge invariant unter $X \mapsto \{X\}$ die $\emptyset$ enthält. Wir konstruieren eine Folge von Mengen $(\mathcal{Z}_n)$ rekursiv (Satz 7.3) durch
   $$\mathcal{Z}_0 = N_0, \quad \mathcal{Z}_{n+1} = \mathcal{P}\mathcal{Z}_n \quad n \geq 0.$$
   (a) Jedes $\mathcal{Z}_n$ ist transitiv, d.h. jedes Element aus $\mathcal{Z}_n$ ist Teilmenge von $\mathcal{Z}_n$
   (b) $\mathcal{Z}_n \subset \mathcal{Z}_{n+1}$ for $n = 0, 1, \cdots$
4. **(Korrigiert 06.02.2004.)** Sei (v_n) die Folge rekursiv definiert durch
   $$v_0 = \emptyset, \quad v_{n+1} = v_n \cup \{v_n\} \quad n \geq 0$$
   (d.h., v_n ist die endliche Ordinalzahl mit n Elementen). Zeigen Sie: $v_n \in \mathcal{Z}_{n-1} \setminus \mathcal{Z}_{n-2}$, $n \geq 0$. (wobei $\mathcal{Z}_n$ dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Übung hat.) Es folgt: Die Menge aller v_n (= Menge aller endlichen Ordinalzahlen = erste unendliche Ordinalzahl) gehört zu
   $$\mathcal{Z} := \bigcup_n \mathcal{Z}_n$$
   nicht.

   Hinweis: Um $v_n \notin \mathcal{Z}_{n-2}$ zu beweisen, bemerken Sie zunächst, dass $v_2 \notin Z_0$, dann argumentieren, dass
   $$v_n \in \mathcal{Z}_{n-2} \quad \Longrightarrow \quad v_{n-1} \in \mathcal{Z}_{n-3}.$$

Abgabe. Bis 20. März 2004, im roten Fach im Vorraum des Büros HG G48.1/2. Oder per Post an:

Prof. O. Lanford
D-MATH, HG G48.1
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

Bitte Name und Legi-Nummer *sehr lesbar* angeben – wenn möglich auch E-Mail Addresse und/oder Telefonnummer.