

7 Das Ersetzungsaxiom

7.1 Einleitung

Es geht hier um einen *sehr* subtilen Punkt. Zur Orientierung untersuchen wir – informell – ein Beispiel. Wir versuchen, eine Folge von Mengen zu konstruieren durch

$$\begin{aligned}v_0 &= \emptyset \\v_1 &= \{\emptyset\} \\v_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\v_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\v_{n+1} &= \{v_0, \dots, v_n\} = v_n \cup \{v_n\}\end{aligned}$$

Wenn so eine Folge existiert, ist $\{v_n\}$ ein sehr attraktives Modell für die natürlichen Zahlen:

- es ist, wie unser früheres Modell, „konstruiert aus nichts.“
- jedes v_n hat genau n Elemente, und daher können wir definieren:
 - eine Menge A ist endlich genau dann wenn gleichmächtig mit ein v_n , d.h., mit einem Element aus \mathbb{N}
 - die Kardinalität von A kann definiert werden als das eindeutige $v_n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig mit A
- Für $n < m$ ist $v_n \subset v_m$, und somit ist die Ordnung auf \mathbb{N} „schon vorhanden“ und muss nicht indirekt konstruiert werden via Addition.

Existiert so eine Folge? Die „Definition“ sieht wie eine (einfache) rekursive Definition aus:

$$v_0 = \emptyset, \quad v_{n+1} = h(v_n), \quad \text{wobei } h(X) := X \cup \{X\}$$

Der Satz über einfache Rekursion (Proposition 4.4) beginnt aber: „Sei $(N, 0, S)$ ein System natürlichen Zahlen; E eine Menge; $h : E \rightarrow E \dots$ “ Das heisst: Eine Menge E , in der die durch Rekursion definierte Funktion ihre Werte nimmt, muss schon am Anfang vorhanden sein. Es ist – zumindest – nicht offensichtlich, wie wir ein Bereich E finden können, in dem wir die gewünschte Rekursion ausführen können.

Es stellt sich heraus, dass

- Jedes v_n kann problemlos definiert werden, aber
- Existenz einer Menge V , die alle v_n enthält, folgt aus den Zermeloschen Axiomen *nicht*, (und das Auswahlaxiome hilft auch nicht ...)

Schauen wir sorgfältig die Definition von v_n an.

Proposition 7.1 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Funktion $v^{(n)}$ mit Definitionsbereich $\{0, 1, \dots, n\} =: [0, n]$ (und un spezifizierter Wertebereich) so dass*

$$i) \quad v^{(n)}(0) = \emptyset$$

$$ii) \quad v^{(n)}(j+1) = v^{(n)}(j) \cup \{v^{(n)}(j)\} \text{ for } 0 \leq j \leq n-1.$$

Des Weiteren ist $v^{(n)} = v^{(m)}|_{[0,n]}$ wenn $n \leq m$.

Wir können dann v_n als $v^{(n)}(n)$ definieren.

Beweis. Eindeutigkeit ist, wie üblich, routine, und die Formel $v^{(n)} = v^{(m)}|_{[0,n]}$ folgt aus Eindeutigkeit und der Tatsache, dass $v^{(m)}|_{[0,n]}$ erfüllt offensichtlich i) und ii).

Der Beweis von Existenz erfolgt durch (gewöhnliche, vollständige) Induktion nach n (nicht Rekursion!).

$$\text{– “Induktionsverankerung:” } v^{(0)} = \{(0, \emptyset)\}$$

$$\text{– “Induktionsschritt:” } v^{(n+1)} = v^{(n)} \cup \{(n+1, v^{(n)}(n) \cup \{v^{(n)}(n)\})\}$$

□

Zur Frage der Existenz eines “genügend grossen” Gebiets V : Es ist lehrreich, ein Versuch zu machen, die Existenz eines V 's zu beweisen. Man sollte aber nicht allzu viel Zeit darin investieren, weil man *beweisen* kann, dass Existenz eines V 's folgt aus (ZAC) nicht. Die Idee ist: Man geht von der Existenz eines Universums “mit guten Eigenschaften” aus und konstruiert ein “Teiluniversum” in dem (ZAC) erfüllt ist und kein V existiert. Der Beweis ist nicht ungeheuer schwierig – wäre das Semester nur eine Woche länger . . .

7.2 Operationen und das Ersetzungsaxiom

Jetzt führen wir ein neues Axiom ein, dass die Konstruktion einer Folge (v_n) wie im vorigen Absatz – und viele andere Konstruktionen – ermöglicht. Als erstes brauchen wir einen „verallgemeinerten Funktionsbegriff“: Sei $\varphi(x, y)$ eine „zweistellige Bedingung“, d.h., eine mengentheoretische Formel mit zwei freien Veränderlichen. Wir sagen φ *definiert eine Operation* falls, für jedes x genau ein y erfüllt $\varphi(x, y)$. (Zur Erinnerung: eine Formel ist entweder wahr oder falsch . . .) Wenn so ein φ vorhanden ist, definieren wir eine zugehörige *Operation* F_φ :

$$y = F_\varphi(x) \quad \text{bedeutet} \quad \varphi(x, y).$$

Eine *Operation* (schlechthin) ist eine Operation definiert durch eine Formel mit diesen Eigenschaften. Ungefähr: Das Verhältnis Operation/Funktion ist analog zum Verhältnis Klasse/Menge: Eine Operation wäre eine Funktion wenn die Klasse aller Objekte eine Menge wäre. Wie mit Klassen: Operationen sind nur eine alternative – oft verständlichere – Weise, über Formeln des obigen Typus zu reden. Es ist immer eine routine Sache, Aussagen über Operationen in Aussagen über Formeln zu übersetzen.

VII. Ersetzungsaxiom. *Sei F eine Operation und A eine Menge. Dann gibt es eine Menge B , die $F(a)$ für alle $a \in A$ enthält.*

Es folgt dann aus dem Aussonderungsaxiom, dass

$$B_0 := \{y \in B : \exists x \in A(\varphi(x, y))\}$$

eine Menge ist. Daher können wir das Ersetzungsaxiom folgendermass umformulieren:

Ersetzungsaxiom, zweite Fassung. *Das Bild einer Menge unter einer Operation ist wiederum eine Menge.*

oder – ein wenig näher an eine strenge formale Formulierung –

Ersetzungsaxiom, dritte Fassung. *Sei $\varphi(x, y)$ eine Formel derart, dass für jedes x genau ein y erfüllt $\varphi(x, y)$, und sei A eine Menge. Dann ist die Klasse*

$$\{y : \exists x(x \in A \wedge \varphi(x, y))\}$$

eine Menge.

Das Axiomesystem I-VII heisst Zermelo-Fraenkelsches Axiomesystem (**ZF**). Von nun an ist auch das Ersetzungsaxiom immer vorausgesetzt.

Der Einfachheit halber haben wir das Ersetzungsaxiom nur für „überall definierte“ Operationen formuliert. Die Aussage lässt sich aber einfach „localisieren“:

Proposition 7.2 *Sei A eine Menge, und sei $\varphi(x, y)$ eine Formel, derart, dass für jedes $x \in A$ ein eindeutiges y existiert mit $\varphi(x, y)$. Dann ist*

$$\{y : \exists x(x \in A \wedge \varphi(x, y))\}$$

eine Menge.

Beweis. Das Ersetzungsaxiom anwenden auf

$$\varphi_0(x, y) := ((x \in A) \wedge \varphi(x, y)) \vee ((x \notin A) \wedge (y = \emptyset)).$$

□

Jetzt können wir einen noch allgemeineren Satz über Rekursion (als Satz 5.5) beweisen:

Satz 7.3 (Rekursion mit Operationen) Sei H eine Operation und N eine wohlgeordnete Menge. Dann gibt es genau eine Funktion f mit Definitionsbereich N , so dass

$$f(a) = H(f|_{[0,a]}) \quad \text{für alle } a \in N.$$

Bemerkung. Wie in der vorigen Proposition ist es leicht zu sehen, dass es genügt wenn die Operation H nur „auf der Klasse der Funktionen mit Definitionsbereich ein Anfangsstück von N definiert ist.“

Beweis. Fast wie für Satz 5.5.

Hilfssatz Mit der Notation des Satzes: Für jedes $b \in N$ gibt es eine eindeutige Funktion f_b mit Definitionsbereich $[0, b]$, so dass

$$f(a) = H(f|_{[0,a]}) \quad \text{für alle } a \leq b.$$

Beweis des Hilfssatzes. Eindeutigkeit ist, wie immer, einfach. Wir beweisen Existenz durch transfinite Induktion nach b . Angenommen: Die Aussage trifft für alle $c < b$ zu. Für $b = 0$ oder b ein Nachfolgerelement argumentieren wir genau wie im Beweis von Satz 5.5. Für b ein Limeselement betrachten wir die Formel

$$\varphi(c, f) := \left((c \in [0, b]) \Rightarrow \left(f \text{ ist eine Funktion mit Definitionsbereich } [0, c] \wedge \right. \right. \\ \left. \left. (f(d) = H(f|_{[0,d]}) \quad \text{für alle } d \leq c) \right) \right)$$

Die Induktionshypothese ist genau die Aussage, dass φ erfüllt die Bedingungen der Proposition 7.2 (mit $A = [0, b]$). Daher gibt es eine Funktion $c \mapsto f_c$ mit Definitionsbereich $[0, b]$, so dass $\varphi(c, f_c)$ zutrifft für $c < b$. Wegen Eindeutigkeit ist $\tilde{f}_b := \cup_{c < b} f_c$ eine Funktion – mit Definitionsbereich $[0, b]$ – und es ist einfach zu sehen, dass

$$f_b := \tilde{f}_b \cup \{(b, H(\tilde{f}_b))\}$$

erfüllt die behaupteten Bedingungen. Somit ist der Hilfssatz bewiesen. Eine weitere Anwendung des Ersetzungaxioms zeigt, dass $b \mapsto f_b$ eine Funktion ist, und

$$f := \cup_b f_b$$

erfüllt dann die Bedingungen. □