

Mathematik hinter

Google™

Daniel Kressner

Seminar für angewandte Mathematik  
ETH Zürich

19. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht



Suche

[Erweiterte Suche](#)  
[Einstellungen](#)Suche:  Das Web  Seiten auf Deutsch  Seiten aus der Schweiz**Web**

Ergebnisse 1 - 10 von ungefähr 8'820'000 für eth. (0.09 Sekunden)

**ETH - ETH Zürich**

Die Eidgenössische Technische Hochschule Zürich ist eine technisch-naturwissenschaftliche Universität mit ausgezeichnetem Forschungsausweis.

[www.ethz.ch/](http://www.ethz.ch/) - 28k - [Im Cache](#) - [Ähnliche Seiten](#) - [Notieren](#)

[Personen](#)[Studium](#)[Studieninteressierte](#)[Über uns](#)[Studierende](#)[Campus Info](#)[Aktuell](#)[Forschung](#)[Weitere Ergebnisse von ethz.ch »](#)**ETH** - - [ [Diese Seite übersetzen](#) ]

The VW Stanford team took second place in the Darpa Urban Challenge, a race for autonomously-controlled motor vehicles – thanks among other things to an ETH ...

[www.ethz.ch/index\\_EN](http://www.ethz.ch/index_EN) - 28k - [Im Cache](#) - [Ähnliche Seiten](#) - [Notieren](#)

**ETH Zürich - D-ARCH** - [ [Diese Seite übersetzen](#) ]

ETH, Zurich, homepage, architecture, faculty, department, Architektur, Abteilung, Departement.

[www.arch.ethz.ch/](http://www.arch.ethz.ch/) - 2k - [Im Cache](#) - [Ähnliche Seiten](#) - [Notieren](#)

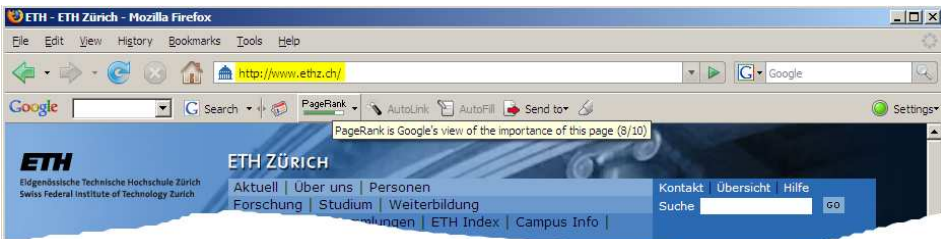
**ETH-Bibliothek - Homepage**

Beschreibung der Dienstleistungen und aller Spezialbereiche. Daneben existiert auch ein Online-Katalog.

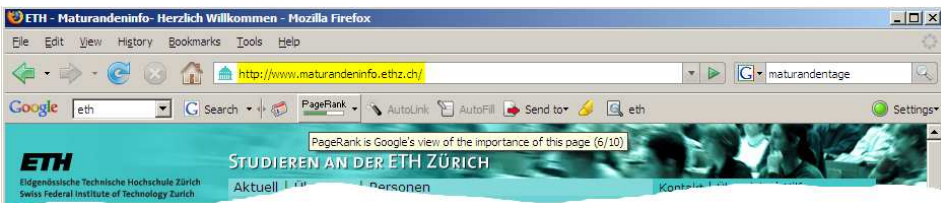
[www.ethbib.ethz.ch/](http://www.ethbib.ethz.ch/) - 26k - [Im Cache](#) - [Ähnliche Seiten](#) - [Notieren](#)



# PageRank



PageRank is Google's view of the importance of this page (8/10)



PageRank is Google's view of the importance of this page (6/10)

**PageRank** = Reputation einer Webseite

*Reputation is the opinion [...] of the public toward a person, a group of people, or an organization.*

Wikipedia-Eintrag zu Reputation

Erwerb von Reputation:

- ▶ Empfehlung durch Entitäten hoher Reputation
- ▶ Annahme bei PageRank: Jeder **Link** ist eine Empfehlung.

**PageRank** = Reputation einer Webseite

*Reputation is the opinion [...] of the public toward a person, a group of people, or an organization.*

Wikipedia-Eintrag zu Reputation

Erwerb von Reputation:

- ▶ Empfehlung durch Entitäten hoher Reputation
- ▶ Annahme bei PageRank: Jeder **Link** ist eine Empfehlung.

# Internet (Ausschnitt)

## Seite 1

[Link zu Seite 2](#)

[Link zu Seite 3](#)

## Seite 3

[Link zu Seite 2](#)

## Seite 5

[Link zu Seite 6](#)

[Link zu Seite 7](#)

[Link zu Seite 8](#)

## Seite 7

[Link zu Seite 1](#)

[Link zu Seite 5](#)

[Link zu Seite 8](#)

## Seite 2

[Link zu Seite 4](#)

## Seite 4

[Link zu Seite 2](#)

[Link zu Seite 5](#)

[Link zu Seite 6](#)

## Seite 6

[Link zu Seite 8](#)

## Seite 8

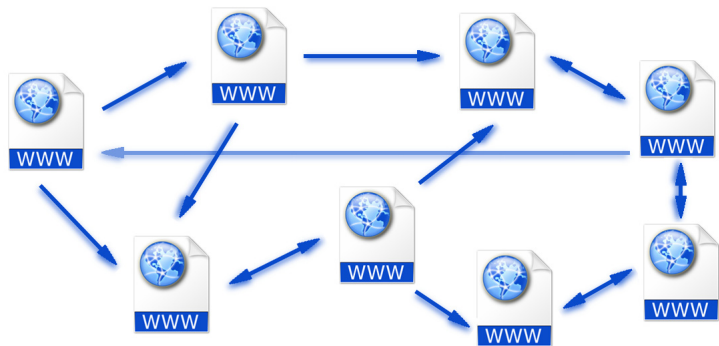
[Link zu Seite 6](#)

[Link zu Seite 7](#)

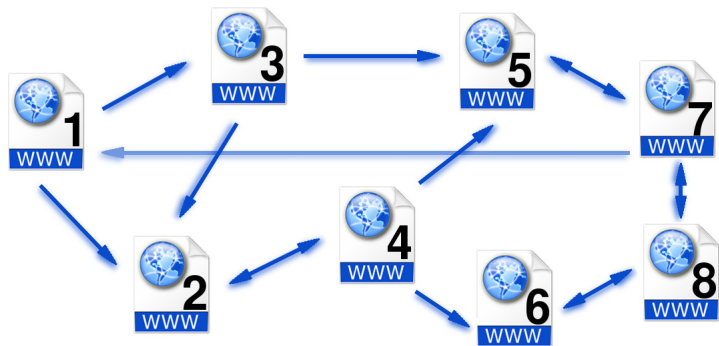
# Internet (Ausschnitt)



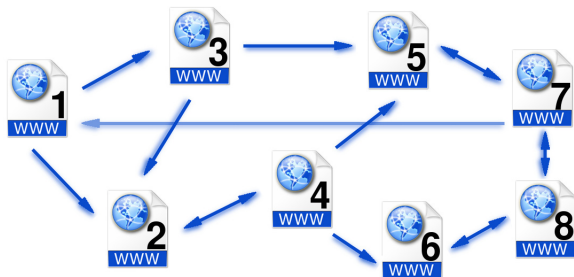
# Internet (Ausschnitt) + Linkstruktur



# Internet (Ausschnitt) + Linkstruktur



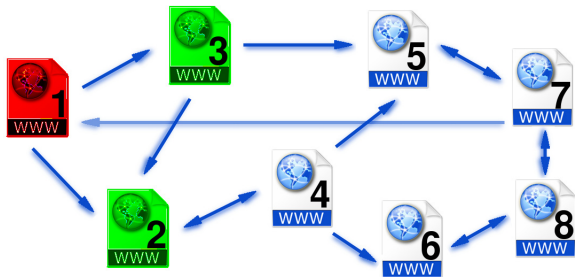
# Idee der PageRank-Berechnung



*Definition.* **Gerichteter Graph** ist ein Paar  $(V, E)$ , mit **Knotenmenge**  $V$  und **Kantenmenge**  $E \subseteq V \times V$ .

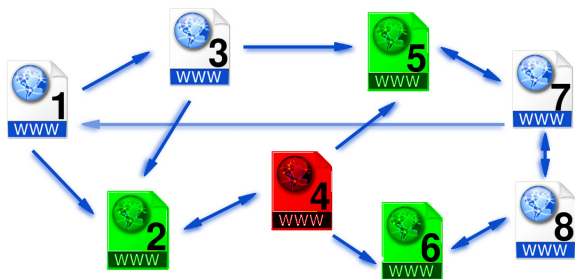
- ▶ Ausgehend von einer **Webseite (= Knoten)**, folge **zufällig** und **wahllos** einem **Link (= Kante)**.
- ▶ Die Webseite, die am häufigsten angezeigt wird, hat den höchsten PageRank!

# Zufälliger Surfer



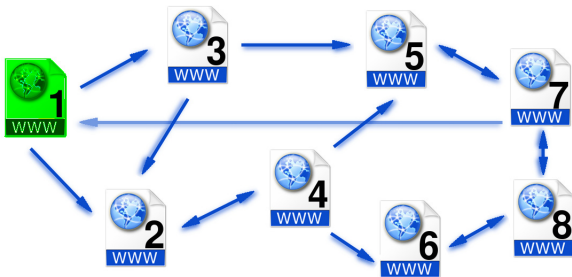
	1	2	3	4	5	6	7	8
1 ←	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0
2 ←	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
3 ←	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0
4 ←	0	1	0	0	0	0	0	0
5 ←	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0
6 ←	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
7 ←	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$
8 ←	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0

# Zufälliger Surfer



	1	2	3	4	5	6	7	8
1 ←	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0
2 ←	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
3 ←	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0
4 ←	0	1	0	0	0	0	0	0
5 ←	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0
6 ←	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
7 ←	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$
8 ←	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0

# Zufälliger Surfer



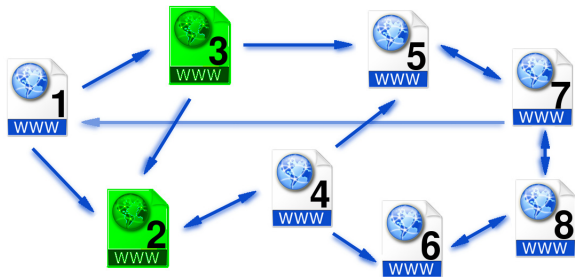
## Wahrscheinlichkeitsverteilung

$i$ -ter Eintrag = Wahrscheinlichkeit, sich auf Seite  $i$  zu befinden

Start

1
0
0
0
0
0
0
0

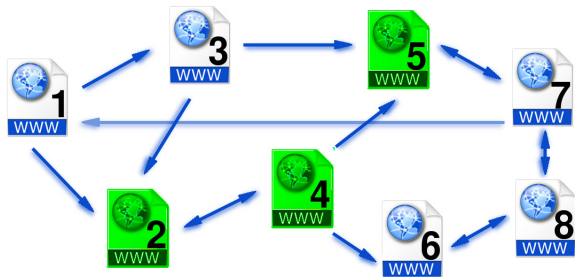
# Zufälliger Surfer



## 1. Klick

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

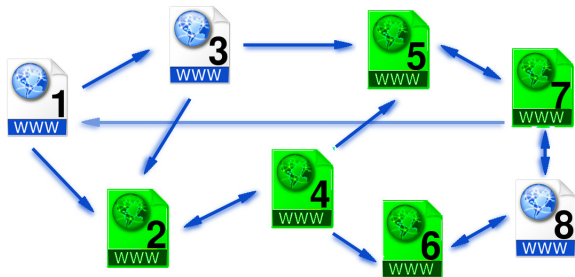
# Zufälliger Surfer



## 2. Klick

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

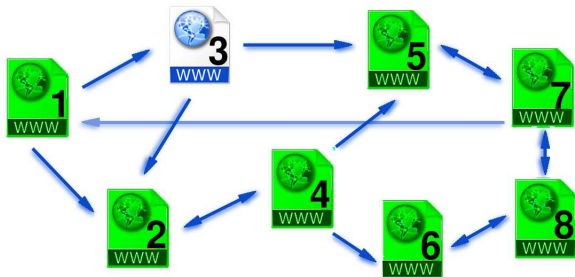
# Zufälliger Surfer



## 3. Klick

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

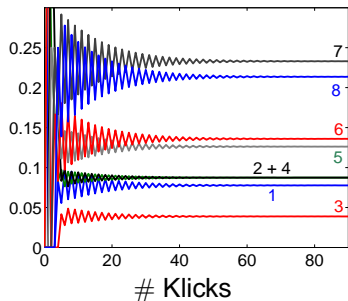
# Zufälliger Surfer



## 4. Klick

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

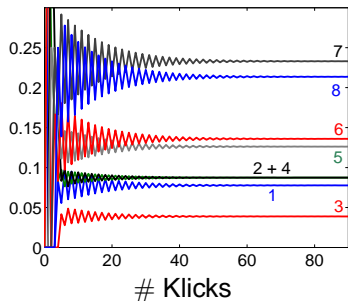
# Zufälliger Surfer



$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix}$$

Stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung  
~ PageRank

# Zufälliger Surfer



$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix}$$

~ Stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung  
~ PageRank

Im stationären Fall gilt

$$\begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix}.$$

$$x^* = Ax^*$$

**Definition.**  $x \neq 0$  heisst **Eigenvektor** und  $\lambda$  **Eigenwert** einer Matrix  $A$ , wenn

$$\lambda x = Ax.$$

Im stationären Fall gilt

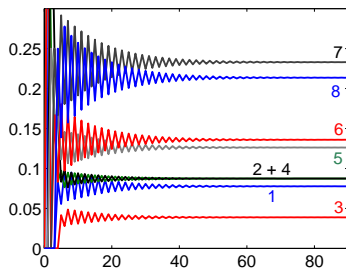
$$\begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} 0.0777 \\ 0.0874 \\ 0.0388 \\ 0.0874 \\ 0.1262 \\ 0.1359 \\ 0.2330 \\ 0.2136 \end{bmatrix}.$$

$$x^* = Ax^*$$

**Definition.**  $x \neq 0$  heisst **Eigenvektor** und  $\lambda$  **Eigenwert** einer Matrix  $A$ , wenn

$$\lambda x = Ax.$$

# Beobachtungen am Beispiel



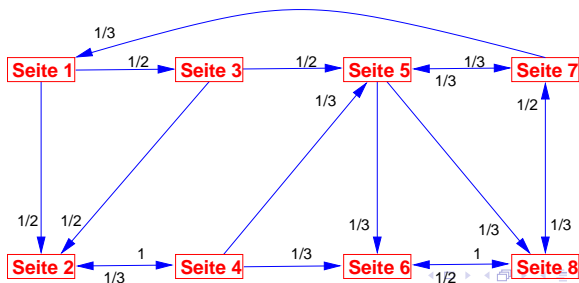
- ▶ Aufenthaltswahrscheinlichkeiten konvergieren;
- ▶ stationäre Aufenthaltswahrscheinlichkeiten sind positiv.

Gilt dies für jeden Linkgraphen?

# Matrix-Vektor-Schreibweise

Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt  $k + 1$  ergeben sich aus:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \\ x_{4k} \\ x_{5k} \\ x_{6k} \\ x_{7k} \\ x_{8k} \\ x_{9k} \end{bmatrix}$$



# Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

mit  $8 \times 8$  Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften:

- ▶ Einträge von  $A$  sind nichtnegativ;
- ▶ Spaltensummen von  $A$  betragen 1  $\rightsquigarrow x_{1,k+1} + \dots + x_{8,k+1} = 1$ .

$A$  ist eine nichtnegative, spaltenstochastische Matrix.

# Eigenwerte und -vektoren

Alle Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, \lambda_2 = -0.8702, \lambda_3 = -0.5568, \\ \lambda_4 &= 0.4251 + 0.2914i, \lambda_5 = 0.4251 - 0.2914i, \\ \lambda_6 &= -0.2116 + 0.2512i, \lambda_7 = -0.2116 - 0.2512i \\ \lambda_8 &= 0.\end{aligned}$$

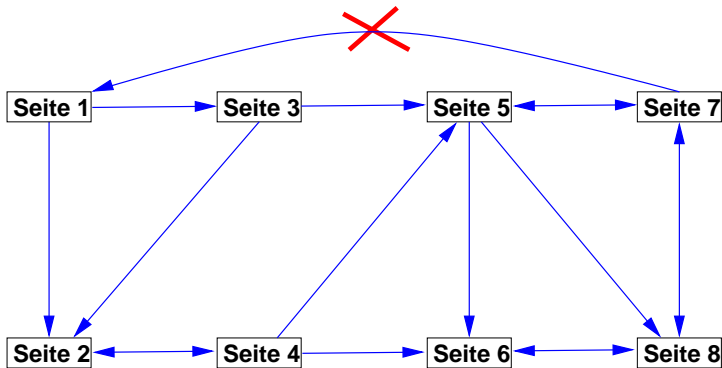
Einige Eigenvektoren:

$$\mathbf{x}_{\lambda_1}^* = \begin{bmatrix} 0.060 \\ 0.068 \\ 0.030 \\ 0.068 \\ 0.098 \\ 0.202 \\ 0.180 \\ 0.295 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\lambda_2}^* = \begin{bmatrix} 0.078 \\ -0.034 \\ -0.044 \\ 0.039 \\ 0.089 \\ -0.218 \\ -0.203 \\ 0.294 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\lambda_3}^* = \begin{bmatrix} 0.094 \\ 0.114 \\ -0.084 \\ -0.205 \\ 0.292 \\ -0.034 \\ -0.157 \\ -0.020 \end{bmatrix}$$

Beobachtung: Nur der Eigenvektor zu 1 besitzt ausschliesslich positive Komponenten.

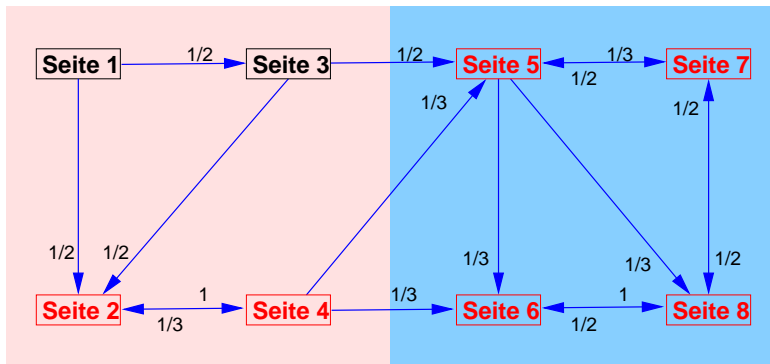
# Immer alle Komponenten positiv?

Entfernung eines Links:



# Zufälliger Surfer

Rechte Komponente gibt *keinerlei* Empfehlung für linke Komponente:



Aufenthaltswahrscheinlichkeiten (nach  $k = 60$  Klicks):

S. 1	S. 2	S. 3	S. 4	S. 5	S. 6	S. 7	S. 8
0	0.000	0	0.000	0.120	0.240	0.240	0.400

# Neue Linkmatrix

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k$$

mit  $8 \times 8$  Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

# Neue Linkmatrix

Eigenwerte:

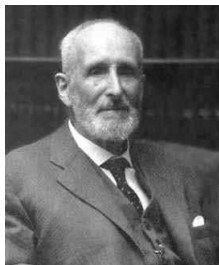
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -0.908, \lambda_3 = -0.577, \lambda_4 = 0.577, \\ \lambda_5 = -0.091, \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0.$$

Eigenvektor zu 1:

$$x_{\lambda_1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.12 \\ 0.24 \\ 0.24 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

Kein sinnvolles Ranking der Seiten 1–4 möglich!

# Das Perron-Frobenius-Theorem



Oskar Perron

(1880–1975)



Ferdinand Georg Frobenius

(1849–1917)

**Theorem.** Sei  $A$   $n \times n$  Matrix mit *ausschliesslich positiven Einträgen*. Eigenwerte geordnet:  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Dann gilt

1.  $\lambda_1$  ist reell positiv und  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ ;
2. der Eigenvektor  $x^*$  zu  $\lambda_1$  hat **ausschliesslich positive Einträge**;
3.  $x_k$  **konvergiert immer** gegen  $x^*$ .

# Anwendung auf Linkmatrix

- ▶ Perron-Frobenius-Theorem stellt unrealistische Forderung an Linkmatrix  $A$ .



Idee von Larry Page und Sergey Brin [1998]:

$$G(\alpha) = \alpha A + (1 - \alpha)E, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Interpretation im Random-Surfer-Modell:

- ▶ Surfer wählt mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  zufällig irgendeine Seite (Teleportation).

# Anwendung auf Linkmatrix

- ▶ Perron-Frobenius-Theorem stellt unrealistische Forderung an Linkmatrix  $A$ .



Idee von Larry Page und Sergey Brin [1998]:

$$G(\alpha) = \alpha A + (1 - \alpha)E, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Interpretation im Random-Surfer-Modell:

- ▶ Surfer wählt mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  zufällig **irgendeine** Seite (Teleportation).

# Wahl von $\alpha$

- ▶ Je grösser  $\alpha$  desto näher  $G(\alpha)$  an  $A$ .
- ▶ Je grösser  $\alpha$  desto langsamer Konvergenz.

**Theorem.** Sei  $x_{k+1} = G(\alpha)x_k$  und  $x^*$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  von  $G(\alpha)$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so dass

$$\|x_k - x_{\lambda_1}^*\| \leq C \left(\frac{\alpha}{1}\right)^k.$$

*Beweisidee.* Sind  $1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , dann sind  $1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n$  die Eigenwerte von  $G(\alpha)$ .  $\square$

Vorschlag von Page und Brin:

$$\alpha = 0.85$$

# Wahl von $\alpha$

- ▶ Je grösser  $\alpha$  desto näher  $G(\alpha)$  an  $A$ .
- ▶ Je grösser  $\alpha$  desto langsamer Konvergenz.

**Theorem.** Sei  $x_{k+1} = G(\alpha)x_k$  und  $x^*$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  von  $G(\alpha)$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so dass

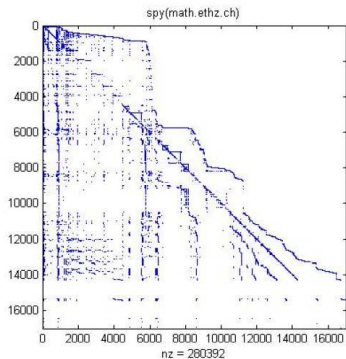
$$\|x_k - x_{\lambda_1}^*\| \leq C \left(\frac{\alpha}{1}\right)^k.$$

*Beweisidee.* Sind  $1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , dann sind  $1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n$  die Eigenwerte von  $G(\alpha)$ .  $\square$

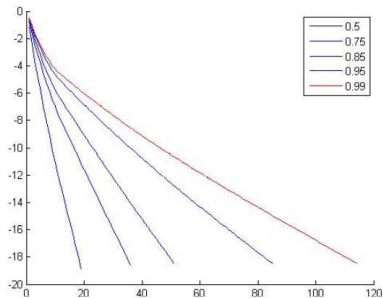
Vorschlag von Page und Brin:

$$\alpha = 0.85$$

## Struktur von $A$



## Konvergenz bzgl. $\alpha$



# Beispiel: [www.math.ethz.ch](http://www.math.ethz.ch)

$\alpha = 0.85$

0.024269 <http://www.math.ethz.ch>  
0.012202 <http://www.math.ethz.ch/favicon.ico>  
0.005994 <http://www.sam.math.ethz.ch>  
0.005839 [http://www.math.ethz.ch/news\\_events/index](http://www.math.ethz.ch/news_events/index)  
0.005703 <http://www.math.ethz.ch/research/index>  
0.005700 [http://www.math.ethz.ch/sitemap/index\\_EN](http://www.math.ethz.ch/sitemap/index_EN)  
0.005656 <http://www.math.ethz.ch/studiensekretariat/index>  
0.005652 [http://www.math.ethz.ch/assistant\\_groups/index](http://www.math.ethz.ch/assistant_groups/index)

$\alpha = 0.99$

0.034450 <http://www.math.ethz.ch>  
0.017083 <http://www.math.ethz.ch/favicon.ico>  
0.009927 [http://www.math.ethz.ch/sitemap/index\\_EN](http://www.math.ethz.ch/sitemap/index_EN)  
0.009909 [http://www.math.ethz.ch/news\\_events/index](http://www.math.ethz.ch/news_events/index)  
0.009767 <http://www.math.ethz.ch/research/index>  
0.009764 <http://www.math.ethz.ch/studiensekretariat/index>  
0.009755 [http://www.math.ethz.ch/assistant\\_groups/index](http://www.math.ethz.ch/assistant_groups/index)

# Beispiel: [www.ethz.ch](http://www.ethz.ch)

201237 Seiten, 4417262 Links.

$\alpha = 0.85$

0.032207	<a href="http://www.ethz.ch">http://www.ethz.ch</a>
0.028671	<a href="http://www.weboffice.ethz.ch/webcd_wcms">http://www.weboffice.ethz.ch/webcd_wcms</a>
0.026578	<a href="http://www.cd.ethz.ch">http://www.cd.ethz.ch</a>
0.026385	<a href="http://www.cms.ethz.ch">http://www.cms.ethz.ch</a>
0.010514	<a href="http://www.ethz.ch/index_EN">http://www.ethz.ch/index_EN</a>
0.004887	<a href="http://www.cc.ethz.ch">http://www.cc.ethz.ch</a>
0.003834	<a href="http://www.id.ethz.ch">http://www.id.ethz.ch</a>
0.003384	<a href="http://www.cd.ethz.ch/sitemap/index">http://www.cd.ethz.ch/sitemap/index</a>
0.003313	<a href="http://www.cd.ethz.ch/services/web/index">http://www.cd.ethz.ch/services/web/index</a>
⋮	⋮
0.000648	<a href="http://www.math.ethz.ch">http://www.math.ethz.ch</a> (Rang 114)
0.000116	<a href="http://www.sam.math.ethz.ch">http://www.sam.math.ethz.ch</a> (Rang 450)

# Literatureempfehlung

Langville, Amy N.; Meyer, Carl D. [Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings](#). Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

