Mémoire de D.E.A

Théorie d'Atkin - Lehner
pour les formes paraboliques
de Maaβ
Représentations automorphes de GL(2)

Emmanuel Kowalski

Directeur de stage: **Roland Gillard**

"...Oh ! brave new world..."

"The Tempest", William Shakespeare

Remerciements

Je tiens à remercier Roland Gillard pour m'avoir permis de continuer sur la lancée de mon stage de magistère avec Henryk Iwaniec, et donné ainsi l'occasion de m'initier aux représentations automorphes.

Je remercie aussi Yves Colin de Verdière qui m'a expliqué sa preuve du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein.

Sommaire

Introduction

Ce mémoire de D.E.A est un résumé de l'étude de la théorie d'Atkin-Lehner effectuée pendant l'année scolaire 1991-92, sous la direction de Roland Gillard. Il s'agit du prolongement d'un stage de magistère qui a eu lieu durant l'été 1991 à Rutgers University (New Jersey, USA) sous la direction de Henryk Iwaniec. Ce premier stage avait pour objet principal l'étude de **[A-L]**, et son adaptation au cadre des formes paraboliques de Maaβ, et avait donné lieu à un premier rapport. Cependant, la durée assez courte de ce stage n'avait pas permis l'exploration de certains points intéressants et des généralisations de la théorie. C'est ce qui sera détaillé plus avant ici. Plus précisément, les points suivants ont pu être approfondis:

- Le rôle exact de l'isométrie négative
- En particulier, son importance dans le théorème de multiplicité un
- La preuve de la majoration critique dans le théorème de multiplicité un, par la méthode de Rankin - Selberg
- Les représentations automorphes, au sens de Jacquet - Langlands **[J-L]**

De ces quatre points, le plus important en matière de travail fut nécessairement le dernier, compte tenu de l'ampleur des prérequis pour aborder la théorie des représentations automorphes. Mais pour la même raison, sa présentation restera assez limitée dans ce rapport.

Une partie de ce qui suit est la reprise du premier rapport, en particulier dans les paragraphes introductifs. Le plan est le suivant: après la mise en place des notions fondamentales vient l'étude des opérateurs de Hecke dans le cadre des formes de Maaβ; c'est là que la clarification de la nature de l'isométrie négative (dont la discussion est presque universellement oubliée) intervient. Ensuite vient le rappel du théorème de Hecke - Maaβ - Weil concernant les séries de Dirichlet associées aux formes de Maaβ, précédant la partie consacrée à la théorie d'Atkin - Lehner elle-même. Les deux parties suivantes sont les plus neuves: la première discute la méthode de Rankin - Selberg pour majorer les coefficients de Fourier de formes paraboliques, et enfin la dernière essaie de donner quelque idée de la façon dont tout ces résultats se généralisent dans le cadre des représentations automorphes. A l'exception de cette dernière partie, la discussion reste assez élémentaire.

Mais ceci dit, commençons par le commencement...

Notations

On notera:

- (a,b) le plus grand diviseur commun de deux entiers a et b
- $\sigma_k(n)=\sum_{d|n} d^k$ pour tout entier n, et $d(n)=\sigma_0(n)$
- $n|N^\infty$ pour indiquer que tout les facteurs premiers de n divisent N
- $e(z)=e^{2i\pi z}=e^{-2\pi y}e^{2i\pi x}$ pour tout complexe z; on notera parfois q=e(z), z étant sous-entendu
- B_k le k-ème nombre de Bernoulli, tel que $\frac{ze^z}{e^z-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$, $|z|<\pi$
- $dh=\frac{dy}{y}$ est la mesure de Haar sur le groupe abélien $\mathbf{R}^{+*}$; on a $\int f(y)dh=\int f(1/y)dh$.
- $\Gamma(s)$ désigne la fonction gamma d'Euler; si Re(s)>0, il vient $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-y}y^s dh$. On utilisera l'estimation de Stirling, $\Gamma(s)\sim\sqrt{2\pi}\,\tau^{\sigma-1/2}e^{-\pi|\tau|/2}$, pour $s=\sigma+i\tau$, $|\tau|\to\infty$, valable uniformément sur toute bande $a\leq\sigma\leq b$

On rappelle qu'un caractère de Dirichlet modulo N est une application $\chi:\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ telle que $\chi(n)=\chi'(n \bmod N)$ si (n,N)=1 et 0 sinon, pour χ' un caractère du groupe abélien $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$. Les caractères de Dirichlet modulo N forment un groupe abélien fini d'ordre $\varphi(n)$ - indicateur d'Euler -. Si N|M, tout caractère modulo N en induit un modulo M en prolongeant par 0 pour $(n,M)\neq 1$. Le conducteur m de χ est alors le plus petit entier tel que χ soit induit par un caractère modulo m; donc m|N. Si m=N, χ est dit primitif. C'est en particulier toujours le cas si N=p premier ou N=4.

La somme de Gauβ associée à χ est par définition $W(\chi)=\sum_{n=0}^{N}\chi(n)e(n/N)$ et si χ est primitif on a, pour tout entier n, la formule (cf. **[I-R]**)

$$\chi^{-1}(b)W(\chi)=\overline{\chi}(b)W(\chi)=\sum_{i=0}^{N-1}\chi(i)e(in/N)$$

Les formes paraboliques de Maaβ

L'étude des formes automorphes est l'un des sujets de recherche les plus importants actuellement en mathématiques. Mais bien qu'il soit historiquement assez ancien - Gauβ, Jacobi, Poincaré... - , ce n'est que vers 1960 qu'il a réellement "explosé", révélant des connections profondes avec quantité d'autres théories, et en particulier sous l'effet des idées de Langlands, dont nous essayerons de dire quelques mots à la fin de ce rapport. Dans cette partie, la référence principale est **[Miy1]**, à ceci près que c'est le cas holomorphe qui y est traité.

1. Géométrie hyperbolique etc...

Le groupe GL(2,**C**) agit naturellement sur $P_1(\mathbf{C})$, donc sur $\hat{\mathbf{C}}$, et alors cette action est

$$g.z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1}$$

En fait, on peut se restreindre à SL(2,**C**) car des matrices proportionnelles ont la même action. Alors, grâce à la formule $\mathrm{Im}(g.z)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ pour $g\in SL(2,\mathbf{R})$ (ou par continuité et connexité), on voit que le sous-groupe SL(2,**R**) agit lui sur $\mathbf{H}=\{z\in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$, le demi-plan de Poincaré; cette action est transitive. De façon géométrique, **H** est une variété Riemannienne, modèle du plan hyperbolique, si on le munit de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, et on montre assez aisément que PSL(2,**R**)=SL(2,**R**)/{±1} est le groupe des isométries préservant l'orientation de $(\mathbf{H},ds^2)$. C'est aussi le groupe des automorphismes de **H** s'il est considéré comme surface de Riemann par l'inclusion $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}$: ce deuxième point de vue ("holomorphe") est celui le plus souvent adopté en raison de la prééminence dans la théorie classique des formes holomorphes, mais il ne convient pas ici. Le groupe de toutes les isométries de **H** comme variété riemannienne est le groupe de Möbius Mob(2), engendré par PSL(2,**R**) et la symétrie σ par rapport à l'axe $i\mathbf{R}+$ (qui renverse l'orientation): $\sigma(z)=-\bar{z}$. C'est cette symétrie qui est généralement oubliée ou négligée. Pour des raisons techniques (passage de SL(2) à GL(2) dans la dernière partie), il est utile de "remonter" σ au niveau de GL(2,**R**). Nous noterons donc $GL_\pm(2,\mathbf{R})$ le groupe abstrait engendré par GL(2,**R**) et un élément σ d'ordre 2, avec la relation $\sigma g=\iota(g)\sigma$, ι désignant l'homomorphisme de GL(2) donné par $\iota\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. Ce groupe $GL_\pm(2,\mathbf{R})$ agit encore naturellement sur **H**, σ comme on le pense par le biais de la symétrie. Pour tout sous-groupe Γ de GL(2,**R**) on notera $\Gamma_\pm$ (ou $\Gamma^\pm$ si nécessaire) le sous-groupe de $GL_\pm(2,\mathbf{R})$ engendré par Γ et σ. Nous utiliserons sans plus de détails quelques évidences relatives au passage de $GL(2,\mathbf{R})$ à $GL_\pm(2,\mathbf{R})$. On munit $SL_\pm(2,\mathbf{R})$ de la topologie évidente pour laquelle $SL_\pm(2,\mathbf{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes. On a un caractère canonique ε ('orientation') de $GL_\pm(2,\mathbf{R})$ par $\varepsilon(\sigma)=-1$, et $\varepsilon(g)=1$ si $g\in GL_\pm(2,\mathbf{R})$.

Son statut de variété riemannienne dote $\mathbf{H}$ de plusieurs objets intrinsèques importants. Nous utiliserons la mesure canonique, invariante par isométrie et aussi par $SL_\pm(2,\mathbf{R})$, qui est ici $d\mu = \frac{dx\ dy}{y^2}$, et le laplacien Δ (des géomètres), également invariant, à savoir $\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, ce qui s'écrit aussi $\Delta = (z-\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en coordonnées $(z,\bar{z})$.

$SL(2,\mathbf{R})$ contient de nombreux sous-groupes discrets Γ (pour la topologie induite), et ceux-ci agissent proprement discontinûment sur $\mathbf{H}$ pour des raisons de topologie générale (cf. **[Miy1]** p° 6 et 17), ie pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathbf{H}$, il existe des voisinages U et V de x et y tels que Card $\{g\in\Gamma \mid gU \cap V \neq \emptyset \} < +\infty$. De tels sous-groupes sont appelés groupes fuchsiens. Un exemple important est celui de $SL(2,\mathbf{Z})$; on peut remarquer d'emblée que l'action d'un groupe fuchsien comporte souvent des points fixes, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.i = \frac{-1}{i} = i$. La situation n'est donc pas topologiquement idéale, mais suffisante pour avoir $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ séparé. Un autre bon côté est l'existence d'un domaine fondamental: pour tout groupe fuchsien Γ il existe un ouvert connexe U de $\mathbf{H}$ tel que les translatés de $\bar{U}$ (adhérence) par Γ recouvrent $\mathbf{H}$, et ceux de U ne le rencontrent pas. On a même une description explicite (non canonique) d'un tel U, cf. **[Miy1]** p°20-24. Par exemple, pour $SL(2,\mathbf{Z})$ le domaine "classique" est $U=\{z\in \mathbf{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) <1/2,\ |z|>1\}$, cf. **[Ser]**.

Nous allons encore restreindre les sous-groupes que nous allons considérer. Pour cela, rappelons la classification des isométries de $\mathbf{H}$. Un élément $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbf{R})$ est dit:

. elliptique si $|Tr(g)|<2 \Leftrightarrow$ g possède deux points fixes complexes conjugués $\Leftrightarrow$ g conjugué à une isométrie de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotation autour du point fixe dans $\mathbf{H}$)

. hyperbolique si $|Tr(g)|>2$ ou $c=d=0 \Leftrightarrow$ g possède deux points fixes dans $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow$ g conjugué à une isométrie de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ (homothétie)

. parabolique si $|Tr(g)|=2$ ou $c=0$ et $b\neq 0 \Leftrightarrow$ g possède un unique point fixe dans $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow$ g conjugué à une isométrie de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (translation horizontale)

Si $g\in\Gamma$, les points fixes de g dans $\mathbf{H}\cup\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ sont appelés points elliptiques, hyperboliques, paraboliques de Γ selon la nature de g. Un point parabolique est aussi appelé une pointe ("cusp") de Γ. Les pointes sont responsables de la plupart des complications (et des phénomènes intéressants) dans l'action d'un groupe fuchsien. Par exemple, $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ n'est jamais compact si Γ a des pointes (cf. le domaine fondamental de $SL(2,\mathbf{Z})$ ci-dessus). La compacité étant hautement désirable dans bien des cas on essaie de la remplacer par une autre condition qui en comporte certains aspects. Là on a encore les deux approches, géométrie analytique ou riemannienne et assez spectaculairement on obtient la même condition. La condition riemannienne, excessivement simple, est $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbf{H})<\infty$. La condition holomorphe est que l'on puisse faire de $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ une surface de Riemann compacte (ie une courbe algébrique, notée $X(\Gamma)$) en rajoutant les pointes (cf. le cas de $SL(2,\mathbf{Z})$, et **[Miy1]** p°24-31 pour plus de détails). C'est un théorème difficile de Siegel (**[Miy1]** p° 32) qui dit que ces deux conditions sont équivalentes; si elles sont vérifiées, on dit que Γ est de première espèce. Si Γ est un sous-groupe de $SL_{\pm}(2,\mathbf{R})$, on dira qu'il est de première espèce si $\Gamma\cap SL(2,\mathbf{R})$ l'est. La définition riemannienne implique trivialement qu'un sous-groupe d'indice fini d'un groupe fuchsien de première espèce l'est encore. Avec l'égalité (théorème de Gauβ - Bonnet, cf. le domaine fondamental) $\mathrm{Vol}(SL(2,\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H})=\pi/3$, cela suffira pour assurer dans la suite que tout nos sous-groupes discrets sont de première espèce.

Citons les propriétés suivantes: pour un groupe de première espèce, il n'y a qu'un nombre fini de pointes et de points elliptiques, à Γ-équivalence près. Pour $SL(2,\mathbf{Z})$, il n'y a que la pointe ∞.

Introduisons enfin les sous-groupes de $SL(2,\mathbf{Z})$ que nous étudierons ensuite. Posons:

$$\Gamma(N) =\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid a\equiv d\equiv 1,\ b\equiv c\equiv 0 \pmod N \right\}$$
$$= \mathrm{Ker}(SL(2,\mathbf{Z}) \to SL(2,\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})), \text{ donc distingué}$$

$$\Gamma_0(N)=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid c\equiv 0 \pmod N \right\}\supset \Gamma(N)$$

$$\Gamma_1(N)=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid a\equiv d\equiv 1,\ c\equiv 0 \pmod N \right\} \supset \Gamma(N), \text{ distingué dans } \Gamma_0(N)$$

Clairement, si $M|N$, $\Gamma_{\bullet}(M)\supset\Gamma_{\bullet}(N)$.

Comme on a $[SL(2,\mathbf{Z}) : \Gamma(N)]=N^3\prod_{p|N}(1-1/p^2)$ (cf. **[Miy1]** p°105), les $\Gamma_{\bullet}(N)$ sont des groupes fuchsiens de première espèce; plus généralement, tout sous-groupe de $SL(2,\mathbf{R})$ contenant un $\Gamma(N)$ est appelé groupe modulaire de congruence, et le plus petit N qui convient est le niveau de Γ. En particulier, $\Gamma_0(N)$ est appelé groupe de congruence de Hecke de niveau N. Ce sont ces groupes qui seront étudiés essentiellement dans la suite de ce rapport. Il convient de préciser ici que ces sous-groupes sont à bien des égards très particuliers et non significatifs pour l'étude des groupes fuchsiens de première espèce généraux; ce sont des groupes à très forte connotation arithmétique.

Finalement, on notera $GL^+(2,\mathbf{K})$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbf{K}$ (=$\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$) et déterminant positif, qui agit encore sur $\mathbf{H}$.

De plus, signalons ici faute de meilleure place que des générateurs de $SL(2,\mathbf{Z})$ sont la translation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'inversion $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cf. **[Ser]**.

2. Formes automorphes holomorphes

Ce très court paragraphe donnera juste la définition et quelques exemples pour motiver l'introduction des formes de Maaβ (cf. **[Miy1]** § II.1. pour des détails). Ici, la symétrie σ n'intervient pas.

Notons $j(g,z)=cz+d$, pour $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL^+(2,\mathbf{R})$. C'est un homomorphisme croisé, ie $j(gh,z)=j(h,z)j(g,hz)$; cela vient de $d(g.z)/dz=\det(g)/j(g,z)^2$. Il en découle que pour tout k entier pair on peut faire agir $GL^+(2,\mathbf{R})$ à droite sur les $f:\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ en posant:

(2.1) $$(f\,|_k\, g)\,(z)=(\det g)^{k/2}\, j(g,z)^{-k}\, f(g.z)$$

Le facteur det g est placé pour que ce soit essentiellement les transformations de Möbius qui agissent; plus précisément, $f\,|_k\, aI = (\mathrm{sgn}\, a)^k f$.

Notons que cette action en induit une sur l'espace vectoriel $M(\mathbf{H})$ (resp. $H(\mathbf{H})$) des fonctions méromorphes (resp. holomorphes) sur $\mathbf{H}$, car $j(g,.)$ est holomorphe sans zéro sur $\mathbf{H}$.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce, k un entier pair. L'ensemble des formes automorphes de poids k pour Γ est l'ensemble $\Omega_k(\Gamma)$ des éléments de $M(\mathbf{H})$ invariants par l'action $|_k$ de Γ induite par celle de $GL^+(2,\mathbf{Q})$; $\Omega_k(\Gamma)$ est alors un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, et la somme directe sur k des $\Omega_k(\Gamma)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre graduée. Notons déjà que si $f\in\Omega_k(\Gamma)$, alors pour tout $g\in SL(2,\mathbf{R})$, $f|_k g \in \Omega_k(g^{-1}\Gamma g)$. Aussi, que si k est impair et $-1\in\Gamma$, $\Omega_k(\Gamma)=\{0\}$.

Cette définition revient à considérer des formes différentielles de degré k/2 sur la surface de Riemann compacte $X(\Gamma)$ et on est amené à distinguer dans $\Omega_k(\Gamma)$ les formes méromorphes (resp. holomorphes) et celles s'annulant aux pointes de Γ. On note donc $A_k(\Gamma)$ le sous-espace de $\Omega_k(\Gamma)$ formé des éléments méromorphes à toutes les pointes, $G_k(\Gamma)$ celui formé des éléments holomorphes à toutes les pointes, et $S_k(\Gamma)$ pour les éléments nuls à toutes les pointes:

ces derniers sont les formes paraboliques de poids k pour Γ. Le S vient de l'allemand "Spitzen".

Cette interprétation par les formes différentielles permet, par le biais du théorème de Riemann - Roch, d'exprimer la dimension de $S_k(\Gamma)$ et de $G_k(\Gamma)$ comme **C**-espaces vectoriels (cf. **[Miy1]** § II.5); le résultat final dépend du genre de $X(\Gamma)$, de l'ordre (du stabilisateur) des points elliptiques de Γ, et du nombre de pointes non équivalentes de Γ. Pour une approche plus élémentaire dans le cas $\Gamma=SL(2,\mathbf{Z})$, cf. **[Ser]**. Dans tout les cas, on conclut que les espaces $G_k(\Gamma)$ et $S_k(\Gamma)$ sont de dimension finie, et non triviaux si k est assez grand. C'est un résultat important, qui repose essentiellement sur le fait que $X(\Gamma)$ est compacte.

Plus élémentairement, on peut voir les conditions de régularité de la façon suivante. Supposons pour simplifier que $-1\in\Gamma$. Soit **a** une pointe de Γ, et $g\in SL(2,\mathbf{R})$ tel que $g\mathbf{a}=\infty$. Γ étant discret, on montre qu'il existe h>0 tel que

$$g\Gamma_{\mathbf{a}}g^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & hm \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m\in \mathbf{Z} \right\}$$

où $\Gamma_{\mathbf{a}}$ est le stabilisateur de **a** dans Γ. On a donc

$$(f|_k g^{-1})\ (z+h) = (f|_k g^{-1})\ (z)$$

et il existe une fonction g définie sur $\mathbf{D}$-{0} avec $(f|_k g^{-1})\ (z) = g(e^{2i\pi z/h}) = g(e(z/h))$; f est holomorphe (resp. méromorphe, nulle) en **a** si et seulement si g l'est. Considérons le cas holomorphe: on peut développer g en série de Taylor, d'où le développement de Fourier de f en **a**: $(f|_k g^{-1})\ (z) = \sum_{n\geq 0} a_n e(nz/h)$, et les a_n sont les coefficients de Fourier de f en **a**. Ce sont des nombres bien intéressants comme on le verra. On montre facilement (Hecke) que $a_n=O(n^{k/2})$ et la conjecture de Ramanujan - Petersson /théorème de Deligne est le raffinement $a_n=O(n^{(k-1)/2})$.

Nous allons maintenant considérer le cas où Γ est un groupe modulaire; dans ce cas les formes automorphes sont appelées formes modulaires. Le cas $\Gamma=\Gamma_0(N)$ est particulièrement intéressant, et on note alors $G_k(N)=G_k(\Gamma_0(N))$, $S_k(N)=S_k(\Gamma_0(N))$, etc (fonctoriellement par rapport aux idées comme dirait S. Lang)... En fait, on peut y ramener pratiquement tout les cas.

En posant $(f,g) = \dfrac{1}{v(\Gamma\backslash\mathbf{H})} \displaystyle\int_{\Gamma\backslash\mathbf{H}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{Im}(z)^k d\mu(z)$, on montre que l'on munit $S_k(\Gamma)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

Voici maintenant des exemples explicites de formes automorphes plus ou moins générales et importantes pour la théorie.

♦ Les séries de Poincaré

L'idée est la même que celle qui conduit à dire que si f est une fonction réelle, alors la série $\sum_{n\in \mathbf{Z}} f(x+n)$ est invariante par translations entières, à ceci près que Γ est trop gros pour sommer les translatés d'une fonction sur **H**. On choisit donc une fonction déjà invariante par un "petit" sous-groupe, et on somme sur les classes modulo ce sous-groupe. En pratique, soit **a** une pointe de Γ, m un entier positif. La série de Poincaré de poids k, paramètre m, en **a** est donnée par

$$P_{\mathbf{a},m}(z;k)=\sum_{\gamma\in \Gamma_{\mathbf{a}}\backslash\Gamma} j(g\gamma,z)^{-k}\, e(mg\gamma z/h)$$

où $g\in SL(2,\mathbf{R})$ est tel que $g\mathbf{a}=\infty$ et h est tel que $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendre le conjugué $g\Gamma_{\mathbf{a}}g^{-1}$ du stabilisateur $\Gamma_{\mathbf{a}}$ de **a** dans Γ. Dans le cas m=0, on appelle également cette série la série d'Eisenstein (holomorphe) en **a**, notée $E_{\mathbf{a}}(z;k)$. Si $k\geq 3$, on montre que ces séries convergent absolument et que leur somme est dans $G_k(\Gamma)$ pour la raison esquissée ci-dessus.

Dans le cas du groupe modulaire, la seule série d'Eisenstein est

$$E_k(z) = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}(cz+d)^{-k} = 1+(-1)^k\frac{4}{B_k}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)e(nz)$$

Une propriété importante des séries de Poincaré est qu'elles engendrent $S_k(\Gamma)$ (**[Miy1]** p°67); ceci se montre en calculant explicitement le produit scalaire $(f,P_{\mathbf{a},m})$.

♦ Les fonctions Θ

Cette fois-ci, on ne peut pas dire que ce soit évident. Soit $Q(x_1,\ldots,x_r)$ une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{Z}^r$, et A la matrice qui la représente. On définit alors la fonction Θ associée à Q par

$$\Theta(z;Q) = \sum_{n\in \mathbf{Z}^r} e\left(\frac{Q(n)}{2}\, z\right)$$

Soit N un entier tel que NA^{-1} soit à coefficients entiers. On montre alors que si r est pair, $\Theta(2z;Q)\in G_k(\Gamma_1(4N))$, avec k=r/2; la démonstration étant essentiellement fondée sur la formule de Poisson, à savoir pour $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ convenable

$$\sum_{n\in \mathbf{Z}} f(n+x) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)e(nx)$$

On peut dés lors comprendre le grand intérêt arithmétique des coefficients de Fourier pour la pointe ∞, car visiblement ce ne sont autres que $a_n=\mathrm{Card}\{m\in \mathbf{Z}^r \mid Q(m)=n\}$! C'est par ce raisonnement, en exploitant le fait que les $G_k(\Gamma_1(4N))$ sont de petite dimension quand N est assez petit, et que de plus les séries d'Eisenstein (cf. ci-dessus) en fournissent d'autres éléments non triviaux, que Jacobi réussit à obtenir le nombre de représentations d'un entier comme somme de 4,8,12 carrés. Bien entendu, la forme du développement des séries d'Eisenstein explique celle des formules de Jacobi, par exemple $r_4(n) = 8 \sum_{d|n\ 4\nmid d} d$, pour le nombre de représentation d'un entier en somme de 4 carrés.

La restriction à r pair semble artificielle, et elle l'est en fait. Dans le cas où n est impair, la fonction théta est encore une forme modulaire, de poids demi-entier. La théorie de telles formes n'est pas incluse dans les définitions ci-dessus, et n'en est pas une généralisation immédiate. Le problème est que le "facteur d'automorphie" convenable n'est pas $j(g,z)^{1/2}$, bien que sur $\mathbf{H}$ il y ait une racine carrée holomorphe. En fait la définition qui est choisie pour ce facteur est simplement: celui pour lequel $\Theta(z;n^2)$ est automorphe!

3. <u>Formes automorphes (non holomorphes) de Maaβ</u>

La théorie des formes automorphes holomorphes, survolée très rapidement ci-dessus, ne dépend pas fondamentalement de l'hypothèse d'holomorphie. Une grande partie (voir les opérateurs de Hecke plus loin) est assez formelle. C'est à Maaβ (**[Maa]**) en 1949 que l'on doit l'observation que moyennant simplement quelques légères modifications dans les définitions, on est en mesure de créer une théorie de fonctions automorphes non holomorphes. L'importance de cette découverte peut être exprimée par cette remarque d'André Weil: "...il a fallu Maaβ pour nous sortir du ghetto des fonctions holomorphes".

Chacun sait qu'une fonction C^2 est holomorphe si et seulement si elle vérifie l'équation de Cauchy - Riemann, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. Avec la seconde expression du laplacien Δ que nous avons donnée dans le premier paragraphe, on en déduit alors $\Delta f=0$. Une généralisation assez naturelle est de considérer alors n'importe quelle fonction propre de Δ, pour toute valeur propre et pas seulement 0. C'est effectivement l'idée de Maaβ.

On supposera pour simplifier que $-1\in \Gamma$.

Dorénavant, la symétrie σ entre en jeu, aussi les groupes de première espèce qui interviendront seront des sous-groupes de $SL_{\pm}(2,\mathbf{R})$.

<u>Définition</u> (Maaβ)

Soit $\lambda\in\mathbf{C}$ et χ un caractère de Γ. Une fonction f de classe C^2 sur $\mathbf{H}$ est appelée fonction (ou forme par abus de langage) automorphe (de Maaβ) pour Γ et χ si on a

(i) pour tout $g\in\Gamma$, $f|g = \chi(g)f$, où $|$ est l'action $|_0$ du §2, ie simplement $(f|g)(z)=f(gz)$

(ii) il existe $\lambda\in\mathbf{C}$ tel que $(\Delta-\lambda)f=0$

(iii) il existe $A\geq 0$ tel que, pour toute pointe $\mathbf{a}$ de Γ et $g\in SL(2,\mathbf{R})$ vérifiant $g\mathbf{a}=\infty$, on a $f(g^{-1}z)=O(y^A)$

On note $G_\lambda(\Gamma,\chi)$ l'espace vectoriel des fonctions automorphes pour Γ et χ avec la valeur propre λ. Si χ est trivial on note $G_\lambda(\Gamma)$ cet espace.

La condition (iii) est une condition de régularité dont l'utilité apparaîtra ensuite. Notons que si χ est trivial, il s'agit bien ici essentiellement de fonctions et non de formes, les éléments de $G_\lambda(\Gamma)$ étant effectivement identifiables à des fonctions sur $\Gamma\backslash\mathbf{H}$. Rappelons enfin que la théorie générale des opérateurs elliptiques nous assure qu'une fonction automorphe de Maaβ sera automatiquement C^∞ et même analytique réelle; ceci sera utile dans le paragraphe consacré aux séries de Dirichlet. Une autre remarque immédiate est que si f est une fonction automorphe pour λ, alors pour tout $g\in GL^+(2,\mathbf{Q})$, on a $f|g\in G_\lambda(g^{-1}\Gamma g)$, ceci parce que le laplacien Δ est invariant par isométries de $\mathbf{H}$.

<u>N.B.</u> L'introduction du multiplicateur χ est souvent utile, en particulier si on prend ici comme groupe un $\Gamma_\pm$, les éléments de $G_\lambda(\Gamma)$ sont 'pairs', c'est à dire $f|\sigma=f$, et ceux de $G_\lambda(\Gamma,\varepsilon)$ sont 'impairs', et de plus $G_\lambda(\Gamma)=G_\lambda(\Gamma)\oplus G_\lambda(\Gamma,\varepsilon)$. De la même façon, si l'on observe que $\Gamma_1(N)\subset\Gamma_0(N)$ avec $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ isomorphe à $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$, on en déduit que $G_\lambda(\Gamma_1(N))=\oplus G_\lambda(\Gamma_0(N),\chi)$, la somme directe étant sur les caractères de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ - étendus à $\Gamma_0(N)$ par $\chi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})=\chi(d)$ -.

Pour continuer maintenant l'analogie avec le cas holomorphe, nous allons nous placer dans le cas d'intérêt pour la suite, c'est à dire $\Gamma=\Gamma_0(N)$, ou bien $\Gamma_{0,\pm}(N)$, et χ étant un caractère de Dirichlet modulo N éventuellement multiplié par ε. On notera alors aussi $G_\lambda(N,\chi)$ ou $G_{\lambda,\pm}(N,\chi)$ l'espace des formes de Maaβ correspondant.

Il nous faut trouver ce qui correspond au développement de Fourier, et définir les formes paraboliques. Pour cela, nous allons entrer dans la théorie spectrale de l'opérateur Δ et dans l'analyse harmonique sur $\mathbf{H}$; ce qui mène immanquablement à la jungle des fonctions spéciales, cf. **[Iwa]** §2 et 5. On peut ici se limiter au minimum.

Soit $\mathbf{a}$ une pointe de Γ, et g tel que $g\mathbf{a}=\infty$. On a ici

$$g\Gamma_{\mathbf{a}}g^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m\in\mathbf{Z} \right\}$$

c'est à dire h=1 dans la notation de §2 grâce aux hypothèses sur le groupe Γ. Comme $\chi(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})=1$, on a donc encore 1-périodicité de $f|g^{-1}$, par rapport à x, et on peut donc pour tout y>0 développer $(f|g^{-1})$ (.+iy), qui est une fonction C^∞, en une série de Fourier convergeant absolument et uniformément sur les compacts, à savoir

$$(f|g^{-1})(z) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} f_{\mathbf{a}}(n,y)e(nx)$$

et de plus la série est dérivable terme à terme; la condition (ii) associée à l'unicité des séries de Fourier permet d'assurer que $f_{\mathbf{a}}(n,.)$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire du second ordre (équation de Whittaker)

$$f'' + (\lambda y^{-2} - 4\pi^2 n^2)f = 0 \tag{3.1}$$

Il est possible de déterminer une base de l'ensemble des solutions de cette équation (cf. **[Iwa]** § 5). Ecrivons $\lambda=s(1-s)$; le paramètre s peut prendre deux valeurs s_1 et s_2 reliées par $s_2=1-s_1$, et son introduction est justifiée par l'identité $\Delta y^s=s(1-s)y^s$.

Si n=0, deux solutions linéairement indépendantes de (3.1) sont y^s et y^{1-s} (sauf bien sur si s=1/2 - ie λ=1/4 -, où on prend comme seconde solution $y^{1/2}\ln y$), et si $n\neq 0$, $y^{1/2}I_{s-1/2}(2\pi|n|y)$ et $y^{1/2}K_{s-1/2}(2\pi|n|y)$, I et K désignant des fonctions de Bessel appelées (cf. **[Leb]** p°109) respectivement fonction de Bessel modifiée de première espèce et fonction de MacDonald. Comme on peut déjà le deviner en faisant formellement y=0 dans (3.1), l'une de ces deux solutions (à savoir I) croît exponentiellement à l'infini, et l'autre (K) décroît exponentiellement; la condition (iii) élimine le premier cas, et il ne reste donc que la fonction K.

Une expression en est donnée par la transformée de Mellin suivante (**[Leb]** p°119):

$$K_s(z)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^+}\exp\left(-\frac{z}{2}(\xi+\xi^{-1})\right)\xi^s dh(\xi) \tag{3.2}$$

l'intégrale convergeant absolument et uniformément sur les compacts pour tout s et Re z>0. On peut montrer alors les estimations (**[Leb]** p°123,136)

$$\begin{aligned} &K_s(y) \sim 2^{s-1}\Gamma(s)y^{-s}, \text{ pour } y \to 0^+ \\ &K_s(y) \sim \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{1/2} \exp(-y), \text{ pour } y \to +\infty \end{aligned} \tag{3.3}$$

qui confirment que l'on obtient bien des solutions vérifiant la condition (ii) de la définition.

La tradition veut maintenant que l'on définisse la fonction de Whittaker W_s; soit donc $W_s(z)=2|y|^{1/2}K_{s-1/2}(2\pi|y|)e(x)$; le raisonnement ci-dessus permet d'énoncer le théorème

Théorème 1 (Maaβ)

Soit f une fonction automorphe pour la valeur propre $\lambda=s(1-s)$, et **a** une pointe de Γ, g comme ci-dessus. Alors f admet un développement de Fourier convergeant absolument et uniformément sur les compacts de **H** de la forme

$$(f|g^{-1})(z) = f_{\mathbf{a}}^{+} y^{s} + f_{\mathbf{a}}^{-} y^{1-s} + \sum_{n\neq 0} f_{\mathbf{a}}(n) W_s(nz)$$

pour des complexes $f_{\mathbf{a}}^{+}$, $f_{\mathbf{a}}^{-}$, et $f_{\mathbf{a}}(n)$, appelés coefficients de Fourier de f en **a**; si s=1/2, il faut évidemment remplacer y^{1-s} par $y^{1/2}\ln y$. On a $W_s(nz) \sim e(nz)$ pour $\mathrm{Im}(z) \to \infty$.

On en déduit aisément

Lemme 2

Si f est une fonction automorphe de Maaβ, on a $f_{\mathbf{a}}(n)=O(n^A)$, A étant comme en (iii).

Il en découle d'ailleurs que l'on peut prendre $A=\mathrm{Max}(\mathrm{Re}(s),1-\mathrm{Re}(s))$. En tout cas, on est amené naturellement à définir une forme parabolique de Maaβ comme une fonction $f\in G_\lambda(\Gamma,\chi)$ vérifiant $f_{\mathbf{a}}^{+}=f_{\mathbf{a}}^{-}=0$ dans le développement de f en toute pointe de Γ. C'est la même condition de nullité du terme constant du développement de Fourier que dans le cas holomorphe. Notons $S_\lambda(\Gamma,\chi)$ l'espace vectoriel de ces fonctions pour la valeur propre λ (et $S_\lambda(N,\chi)$, $S_{\lambda,\pm}(N,\chi)$, etc...). Pour les formes paraboliques, on a beaucoup mieux que la croissance modérée postulée dans la définition de $G_\lambda(\Gamma,\chi)$.

Lemme 3

Si $f\in S_\lambda(\Gamma,\chi)$, on a pour toute pointe **a** et g comme ci-dessus,

$$(f|g^{-1})(z) = O(e^{-2\pi y})$$

De plus $f\in G_\lambda(\Gamma,\chi)$ est parabolique si et seulement si f est bornée sur **H**. En particulier, $S_\lambda(\Gamma,\chi)\subset L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ puisque le volume de $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ est fini.

Avant de continuer, donnons une autre forme du développement de Fourier d'une forme parabolique de Maaβ, que nous utiliserons par la suite. Posant $a(n)=2|n|^{1/2}f_{\mathbf{a}}(n)$, on peut écrire

$$(f|g^{-1})(z) = y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx) \tag{3.4}$$

Pour l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier a(n) d'une forme parabolique dont le développement est donnée par (3.4), on a le premier résultat (trivial).

Théorème (Maaβ)

On a l'estimation $a(n)=O(n^{1/2})$.

Dém.

On peut supposer $\mathbf{a}=\infty$. Pour le développement du théorème 1, il vient pour tout y>0, parce que f est bornée

$$f_\infty(n)= \int_0^1 f(x+iy)e^{-2i\pi nx}dx << M$$

et on obtient le résultat avec l'expression de a(n) en fonction de $f_\infty(n)$ ♦

Dans ce contexte, la conjecture de Ramanujan-Petersson est $a(n)=O(d(n))$. Cette conjecture semble encore inaccessible.

Le théorème de Riemann - Roch non analytique ad hoc étant hélas inexistant, la question de l'existence de fonctions automorphes de Maaβ se pose légitimement. Posséder un développement comme ci-dessus est une condition nécessaire largement insuffisante pour que f soit Γ-invariante. La réponse (moins complète que dans le cas holomorphe) vient cette fois-ci de la théorie spectrale de l'opérateur Δ sur le quotient $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ (Δ est invariant par isométrie, donc passe au quotient), cf. **[Iwa]** §5.4 et §6, ou **[Kub]**. Exceptionnellement ici nous supposerons que Γ est un groupe de première espèce quelconque.

On considère le laplacien comme un opérateur définit sur le sous-espace dense de L^2 formé des fonctions C^∞ bornées à laplacien également C^∞ borné. Le quotient étant non compact, un spectre continu peut intervenir. Les formes paraboliques sont dans le spectre discret, mais par exemple les séries d'Eisenstein définies plus bas ne sont pas L^2 et on verra dans la partie consacrée à la méthode de Rankin - Selberg qu'elles permettent de décrire le spectre continu (comme les $e^{2i\pi x}$ permettent de décrire le spectre continu du laplacien de **R**).

Par la théorie générale du laplacien riemannien, l'opérateur Δ est symétrique positif, et par conséquent son spectre est inclus dans $\mathbf{R}^+$. Pour isoler le spectre discret, on utilise certains opérateurs intégraux invariants qui commutent avec Δ. Il s'avère que ces opérateurs intégraux se restreignent au sous-espace $L^2_0(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ de $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ formé des éléments "paraboliques" - c'est à dire ceux dont le premier coefficient de Fourier par rapport à x est nul pour tout y -, et qu'ils y sont compacts, et même sont des opérateurs de Hilbert - Schmidt. Le théorème de Hilbert - Schmidt permet alors de conclure:

Théorème (Maaβ)

Le spectre de l'opérateur Δ sur $L_0^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ est discret et les espaces propres sont de dimension finie. Les fonctions propres de Δ forment un système complet dans $L_0^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$, ie $L_0^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ possède une base (hilbertienne) formée de formes paraboliques de Maaβ. En particulier, $S_\lambda(\Gamma)$ est de dimension finie pour tout λ, et donc $S_\lambda(N,\chi)\subset S_\lambda(\Gamma_1(N))$ l'est également.

Ce point est assez difficile à démontrer complètement pour Γ quelconque mais pour un sous-groupe de congruence une méthode relativement simple existe, cf. **[Lan]**.

Dans certains cas (cf. **[Iwa2]**), par exemple pour certains sous-groupes de congruence, l'analyse fine de la partie continue du spectre permet d'obtenir plus d'informations: par exemple qu'il y a une infinité de valeurs propres, une estimation de leur croissance... Par contre, la dimension des $S_\lambda(\Gamma,\chi)$, finie par le théorème ci-dessus, est à peu près inaccessible. Il est conjecturé que, pour $SL(2,\mathbf{Z})$, cette dimension est un, mais Iwaniec appelle cela "a hopeless conjecture". Des résultats de Phillips - Sarnak et de Colin de Verdière (**[CdV]**) semblent indiquer que pour certains groupes Γ, $L_0^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ serait de dimension finie (contrairement à ce que supposerait une 'conjecture' de Roelcke et Selberg qui n'est pas localisable dans la littérature).

A propos du paramètre s, notons que $\lambda\geq 0$ équivaut à $s=\frac{1}{2}+it$, si $\lambda>1/4$, ou $s\in[0,1]$, si $0\leq\lambda<1/4$; le spectre étant discret, ce second cas dit exceptionnel ne peut se présenter qu'un nombre fini de fois. Le premier cas, bien entendu, ne laisse pas d'intriguer le théoricien des nombres obsédé par l'hypothèse de Riemann qui sommeille en chacun de nous... Signalons en passant qu'une conjecture de Selberg affirme que pour les sous-groupes de congruence on a $\lambda_1\geq 1/4$ (λ_1 est la première valeur propre); on sait (Selberg) que $\lambda_1\geq 3/16$, que la conjecture est vraie pour $SL(2,\mathbf{Z})$, et qu'elle est absolument fausse pour un sous-groupe discret quelconque; ce qui accentue encore l'aspect particulier des sous-groupes de congruence.

Dorénavant nous seront toujours dans le cas où Γ est $\Gamma_0(N)$ ou $\Gamma_{0,\pm}(N)$.

Terminons avec quelques mots sur les exemples de formes automorphes de Maaβ. Dans le cas non parabolique, on peut encore en obtenir explicitement en adaptant l'une des technique du §2, celle des séries d'Eisenstein. Soit **a** une pointe de Γ, g comme d'habitude.

On pose

$$E_{\mathbf{a}}(z;s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{a}}\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(g\gamma z))^s \qquad \mathbf{(3.5)}$$

et si $\mathrm{Re}(s)>1$, la série converge absolument et uniformément sur les compacts, et on obtient ainsi un élément de $G_\lambda(\Gamma)$. De plus, dans ce domaine, on obtient une fonction de s qui est holomorphe. On montre que ces séries d'Eisenstein permettent de décrire le spectre continu de Δ, si on les prolonge méromorphiquement en s sur tout le plan; ce qui n'est pas une mince affaire (cf. **[Kub]**, **[CdV]** et la quatrième partie). On peut en calculer le développement de Fourier, que l'on trouvera également dans la quatrième partie.

Ces séries d'Eisenstein sont les seules fonctions automorphes complètement explicites connues. En effet, les séries de Poincaré obtenues en ajoutant e(mgγz) dans la sommation ne sont pas des fonctions propres de Δ (elles sont cependant utiles pour d'autres raisons). Bien entendu, l'absence d'exemple de formes paraboliques 'simples' n'est guère étonnante si l'espace $L_0^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ est génériquement de dimension finie.

Pour conclure, notons que le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ existe aussi si un seul des arguments est parabolique; on l'appelle traditionnellement produit scalaire de Petersson.

4. Opérateurs de Hecke

La notion d'opérateur de Hecke est très importante dans l'étude des formes automorphes, et permet d'obtenir des résultats tout à fait révélateurs concernant la nature des coefficients de Fourier.

La difficulté réside dans la définition; il y a en pratique quantités de façons d'introduire ces opérateurs, suivant le cadre dans lequel on veut les appliquer, et il n'est pas facile dans tout les cas de motiver cette définition. On peut procéder brutalement (**[A-L]**) ou plus ou moins abstraitement (par exemple comme dans **[Ser]**), le concept le plus général (et le plus abstrait) étant celui d'algèbre de Hecke. L'expérience enseignant que souvent c'est finalement la définition la plus générale qui s'avère la plus utile à la longue - et finalement la plus naturelle -, nous allons ici essentiellement suivre cette dernière approche, en prenant simplement quelques raccourcis correspondant au cas qui nous intéresse. Pour tout ceci (dans le cas holomorphe), cf. **[Miy1]** §2.7,2.8,4.5. On verra ici l'intérêt de cette méthode pour le traitement correct de la symétrie σ. Mentionnons juste en passant que les opérateurs de Hecke ont une définition parfaitement naturelle dans le cadre des représentations automorphes.

Tentons tout de même de motiver la définition abstraite qui suivra: soit f est une forme automorphe pour un groupe Γ, et $g\in GL^+(2,\mathbf{R})$. Il est immédiat que f|g est alors automorphe pour $g^{-1}\Gamma g$, et donc pour $\Gamma'=\Gamma\cap g^{-1}\Gamma g$. Si ce dernier groupe est d'indice fini dans Γ, c'est encore un groupe de première espèce, et on peut voir que, par le procédé usuel de moyenne, on obtient une forme automorphe sur Γ en sommant f|g sur des représentants de Γ modulo Γ'. Il apparaît alors que cette forme ne dépend que de la double classe $\Gamma g\Gamma$, ce qui pousse à noter cette forme $f|\Gamma g\Gamma$, faisant ainsi agir les doubles classes. C'est l'idée essentielle qui est développée ensuite. D'abord, quelques préliminaires de théorie des groupes.

Définition

Soit G un groupe (abstrait ici), Γ et Γ' des sous-groupes de Γ. On dit que Γ et Γ' sont commensurables si on a $[\Gamma:\Gamma\cap\Gamma']<\infty$ et $[\Gamma':\Gamma\cap\Gamma']<\infty$. Ceci induit une relation d'équivalence $\approx$ dans l'ensemble des sous-groupes de Γ. De plus, si on note $\Gamma^\circ=\{g\in G \mid \Gamma\approx g^{-1}\Gamma g\}$, Γ° est un sous-groupe de G ne dépendant que de la classe de Γ modulo $\approx$.

Si Γ,Γ' sont des sous-groupes de G, $\Gamma'\approx\Gamma$, $g\in\Gamma^\circ$, alors Γ agit à droite et à gauche par translations sur $\Gamma g\Gamma'$. Le résultat (élémentaire) basique (**[Miy1]** p°69) est que

$$\Gamma g\Gamma'=\bigsqcup\Gamma gh_i=\bigsqcup k_j g\Gamma$$

pour toute famille (h_i) (resp. (k_j)) représentant les classes de $(\Gamma'\cap g^{-1}\Gamma g)\backslash\Gamma'$ (resp. de $\Gamma/(\Gamma\cap g\Gamma' g^{-1})$). Si maintenant G agit à droite sur un module M sur un anneau A commutatif, on peut faire agir cette double classe sur M^Γ (éléments invariants par Γ) par

$$m|\Gamma g\Gamma' = \sum m.gh_i$$

créant ainsi un morphisme A-linéaire de M^Γ dans $M^{\Gamma'}$, ne dépendant que de $\Gamma g\Gamma'$. L'algèbre sur A engendrée par de telles applications pour Γ dans un ensemble de sous-groupes deux à deux commensurables, et g décrivant un sous-ensemble convenable (un sous-semigroupe de G toujours coincé entre un Γ et son Γ°...) est une algèbre de Hecke. Notons la similarité frappante de la définition avec celle de l'homomorphisme de transfert en théorie des groupes (cf. **[Neu]** p°26).

Dans le cadre des formes de Maaβ, nous allons définir deux algèbres de Hecke: la première correspond au cadre holomorphe, l'autre intègre la symétrie σ. La première est celle de **[Miy1]**, et le passage à la seconde se fait sans difficulté.

1. Algèbre de Hecke holomorphe

On considère $G=GL^+(2,\mathbf{R})$. Pour tout groupe fuchsien modulaire Γ (donc commensurable en particulier avec $SL(2,\mathbf{Z})$), on a donc (**[Miy1]** p°132) $\Gamma^\circ=\mathbf{R}^*.GL^+(2,\mathbf{Q})$. Les opérateurs de Hecke que nous allons considérer seront essentiellement de la forme $\Gamma_0(M)g\Gamma_0(N)$, $N|M$, pour g dans l'ensemble $\Delta_0(N)$ des éléments de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$, avec $c\equiv 0$ (N), $(a,N)=1$. On notera $\mathcal{H}^\circ(N)$ l'algèbre de Hecke correspondant à M=N (sa définition précise n'est pas importante, car nous donnerons des générateurs plus simples explicites). Un résultat important est que cette algèbre est commutative; cela découle de propriétés générales des algèbres de Hecke.

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N; on peut étendre χ aux matrices de $\Delta_0(N)$ en posant $\chi(g)=\overline{\chi(a)}$, et ceci permet de définir une action de $\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N)=T$ sur $S_\lambda(N,\chi)$ par la formule

(4.1) $$f|T = (\det g)^{-1/2} \sum\overline{\chi(h_i)}f|h_i$$

$$\text{si on a } T=\bigsqcup\Gamma_0(N)h_i$$

<u>N.B.</u> 1. Le facteur $(\det g)^{-1/2}$ est placé pour simplifier l'action de T sur les développements de Fourier: cf. plus loin; le χ est conjugué pour que l'action soit bien sur $S_\lambda(N,\chi)$.

2. T envoie $S_\lambda(N,\chi)$ dans $S_\lambda(N,\chi)$ car Δ est invariant par isométrie, donc les f|h sont encore fonctions propres de Δ pour la même valeur propre. La "parabolicité" est élémentaire.

2. <u>Algèbre de Hecke non holomorphe</u>

On considère cette fois $G_\pm$ et ses sous-groupes.

Tout Γ étant d'indice 2 dans $\Gamma_\pm$, les problèmes de finitude pour les indices sont les mêmes pour Γ et $\Gamma_\pm$. De plus, Γ en tant que sous-groupe de $G_\pm$ est commensurable avec $\Gamma_\pm$, donc son commensurateur dans $G_\pm$ est $(\Gamma°)_\pm$. On a aussi $(\Gamma_\pm)°= (\Gamma°)_\pm$. Pour tout groupe fuchsien modulaire Γ (toujours commensurable avec $SL(2,\mathbf{Z})$), il vient $\Gamma°=\mathbf{R}^*.GL_\pm^+(2,\mathbf{Q})$ d'après le résultat correspondant de 1.

On est amené à considérer simultanément des opérateurs $T=\Gamma_0(N)g\Gamma_0(M)$ pour $g\in\Delta_0(N)_\pm$, et ceux de la forme $T'=\Gamma_0(N)_\pm g\Gamma_0(M)_\pm$. Notons que les seconds agissent sur $S_{\lambda,\pm}(N,\chi)$ qui est un sous-espace de $S_\lambda(N,\chi)$ sur lequel agissent les premiers. Si $g\in\Delta_0(N)$ (ie $\varepsilon(g)=1$), alors la restriction de T à $S_{\lambda,\pm}(N,\chi)$ est égale à T'. Ceci découle de l'implication

$$T=\bigsqcup\Gamma_0(N)gh_i \Rightarrow T'=\bigsqcup\Gamma_{0,\pm}(N)gh_i$$

que l'on peut vérifier directement en écrivant $\Gamma_{0,\pm}(N)=\Gamma_0(N)\sqcup\Gamma_0(N)\sigma$ en développant, et en remarquant que par le théorème des diviseurs élémentaires on peut supposer g diagonale, donc $\iota(g)=g$ et $\Gamma_0(N)\iota(g)=\Gamma_0(N)g$ (ou alors en calculant tout explicitement pour avoir cette égalité pour tout g).

On fait agir ces opérateurs sur les formes automorphes par la formule (4.1), à cela près que $\det \sigma g$ est considéré comme égal à $\det g$.

On notera $\mathcal{H}(N)$ l'algèbre de Hecke formée par les T, et $\mathcal{H}_{\pm}(N)$ celle formée par les T'. Pour relier parfaitement ces algèbres de Hecke à celle de 1. et en réduire l'étude à celle de $\mathcal{H}°(N)$, il suffit maintenant de remarquer que $T(-1)=\Gamma_0(N)\sigma\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)\sigma$ et $\Gamma_0(N)\sigma g\Gamma_0(N)$ est le produit de T(-1) et $\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N)$. Ainsi l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(N)$ est isomorphe à celle obtenue en adjoignant T(-1) à $\mathcal{H}°(N)$, avec les relations évidentes. En particulier, elle est encore commutative. Notons que $\mathcal{H}_{\pm}(N)$ est isomorphe à $\mathcal{H}°(N)$.

3. Opérateurs T(n)

Les opérateurs de Hecke originaux (ceux qu'on trouve dans **[A-L]** et **[Ser]**, dans le cas holomorphe), peuvent maintenant être définis pour $n\in\mathbf{N}$ par

$$T(n) = \sum_{\det g=n} \Gamma_0(N)g\Gamma_0(N) \tag{4.2}$$

et par T(-n)=T(-1)T(n)=T(n)T(-1) (notons en passant qu'en posant formellement det σ=-1, on obtiendrait une définition uniforme des T(n) par (4.2); cependant cette convention ne donnerait pas toujours le résultat escompté). Précisons aussi qu'ici $\Gamma_0(N)g\Gamma_0(N)\in\mathcal{H}(N)$.

On s'intéressera en particulier aux opérateurs T(p), $p\in\mathbf{N}$ premier, et T(-1), pour l'excellente raison qu'ils engendrent l'algèbre $\mathcal{H}(N)$ (il faut quelques opérateurs supplémentaires dans le cas holomorphe, cf. **[Miy1]** p°142, qui sont essentiellement des homothéties à la source). On montre même que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de polynômes en ces variables, avec les seules relations $T(-1)^2=1$ et T(-1)T(p)=T(p)T(-1), cf. **[Miy1]**.

Le lemme suivant fournit toutes les décompositions explicites de doubles classes nécessaires à la suite de ce rapport, et permet de calculer explicitement T(p); rappelons que par le théorème des diviseurs élémentaires, il n'y a dans la somme (4.2) que la double classe $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)$.

Lemme 1

Soit p un nombre premier.

(i) $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)$ admet pour représentants les matrices suivantes:

$\begin{pmatrix}1&d\\0&p\end{pmatrix}$, $0\leq d<p$, si $p|N$

$\begin{pmatrix}1&d\\0&p\end{pmatrix}$, $0\leq d<p$ et $\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}$, si $(p,N)=1$

(ii) $\Gamma_0(pN)\backslash\Gamma_0(pN)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)$ admet pour représentants toute famille de matrices de la forme $\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\gamma_i$, avec $0\leq i<p$ si $p|N$ et $0\leq i\leq p$ sinon, où

$\gamma_i\equiv\begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}$ mod p, pour $0\leq i<p$

$$\gamma_p \equiv \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \bmod p \text{ et } \gamma_p \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N$$

<u>N.B.</u> 1. Les deux décompositions sont très proches, et on verra le rôle joué par cette similitude dans la théorie d'Atkin - Lehner.

2. Pour ce rapport, la précision dans la seconde décomposition n'est pas capitale: on pourrait choisir arbitrairement des matrices vérifiant les congruences demandées; mais la flexibilité de l'énoncé est utilisée dans la preuve de certains lemmes plus loin.

3. Un avantage immédiat de la définition des opérateurs de Hecke par les doubles classes est que l'on a une définition uniforme des $T(p)$, alors que la définition brutale en utilisant les décompositions ci-dessus (cf. **[A-L]**) oblige à une distinction a priori inexplicable en $p|N$ et $(p,N)=1$.

4. Il apparaît dans la décomposition (i) que $T(n)$ ne dépend pas explicitement du niveau N, sauf pour la condition de divisibilité. Par conséquent, si $N|M$ (donc $S_\lambda(N,\chi)\subset S_\lambda(M,\chi)$, où le second χ est en fait le caractère induit par χ modulo M), et si soit $n|N^\infty$, soit $(n,M)=1$, le diagramme suivant commute, où i est l'injection

$$\begin{array}{ccc} S_\lambda(N,\chi) & \xrightarrow{T(n)} & S_\lambda(N,\chi) \\ i\downarrow & & \downarrow i \\ S_\lambda(M,\chi) & \xrightarrow{T(n)} & S_\lambda(M,\chi) \end{array}$$

En tout cas, la partie (i) du lemme ci-dessus permet d'écrire explicitement l'action de $T(p)$ sur une fonction automorphe parabolique f dont le développement de Fourier à l'infini est donné par (3.4). Supposons $(p,N)=1$; on a alors par définition

$$f|T(p) = p^{-1/2}\left(\chi(p)\, f|\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{0\le d<p} f|\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & p \end{pmatrix}\right)$$

Comme $f|\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(z)=f(pz)=(py)^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|py)e(npx)$ et

$$\sum_{0\le d<p} f|\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & p \end{pmatrix}(z) = \sum_d f\left(\frac{z+d}{p}\right) = (y/p)^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|/py)\sum_d e(n(x+d)/p)$$

on obtient finalement grâce à l'orthogonalité des caractères additifs $e(kz/p)$

(4.3) $$f|T(p)= y^{1/2}\sum_{n\neq 0} b(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

avec $b(n)=\chi(p)a(n/p)+a(np)$, où on pose $a(r)=0$ si r est non entier

Pour $p|N$, on a $b(n)=a(np)$, et c'est encore valide si $p=-1$. Dans le cas holomorphe, il y a un facteur p^{k-1} parasite avec le $\chi(p)$.

Là encore, on pourrait définir les T(p) par cette formule; elle permet de vérifier assez facilement par récurrence une autre formule importante

$$\textbf{(4.4)} \qquad T(p)T(p^n)=T(p^{n-1})+T(p^{n+1}),\ (p,N)=1$$

$$T(p)T(p^n)=T(p^{n+1}),\ p|N$$

qui, associée à T(m)T(n)=T(mn)=T(n)T(m) si (n,m)=1, permet de calculer explicitement tout les T(n) et de vérifier que ce sont des polynômes en les T(p). Une conséquence capitale de ces formules, qui permet déjà de faire le lien avec la partie suivante, est l'expression de la série de Dirichlet formelle $\sum_{n\neq 0} T(n)|n|^{-s}$ par un produit eulérien, à savoir

$$\textbf{(4.5)} \qquad \sum_{n\neq 0} T(n)|n|^{-s}=(1+T(-1)) \prod_{(p,N)=1}(1-T(p)p^{-s}+\chi(p)p^{-2s})^{-1} \prod_{p|N}(1-T(p)p^{-s})^{-1}$$

Le résultat correspondant est dû à Hecke originellement dans le cas holomorphe, et fut adapté instantanément par Maaβ pour ses fonctions automorphes. Notons en passant qu'on a également

$$\sum_{n\neq 0} nT(n)|n|^{-s}=(1-T(-1)) \prod_{(p,N)=1}(1-pT(p)p^{-s}+p^2\chi(p)p^{-2s})^{-1} \prod_{p|N}(1-pT(p)p^{-s})^{-1}$$

On peut en déduire la formule (4.6) qui généralise (4.3) et (4.4): avec les mêmes notations qu'en (4.3), si ce n'est que n remplace p, on a pour tout $m\in Z$

$$\textbf{(4.6)} \qquad b(m)=\sum_{d|(n,m)} \chi(d)a(mn/d^2)$$

Pour tirer parti des opérateurs de Hecke, rappelons un théorème d'algèbre linéaire.

<u>Théorème 2</u>

Soit E un espace de Hilbert de dimension finie, H une sous-algèbre de End(E), commutative, et formée d'opérateurs normaux. Alors il existe une base de E formée de vecteurs qui sont vecteurs propres pour tout les éléments de H simultanément.

Ce résultat est une conséquence triviale du théorème spectrale pour les opérateurs symétriques en dimension finie.

On ne peut malheureusement pas appliquer brutalement ce résultat à H(N) et $S_\lambda(N,\chi)$ (muni du produit scalaire de Petersson), car les T(p) pour p|N ne sont pas normaux. Par contre, c'est le cas des T(n) si (n,N)=1, comme il découle de $(f|\Gamma_0(N)\gamma\Gamma_0(N),g)=(f,g|\Gamma_0(N)\gamma'\Gamma_0(N))$, où $\gamma'=(\det \gamma)\gamma^{-1}$, ce qu'on déduit directement de $(f|\gamma,g)=(f,g|\gamma')$ qui est immédiat (cf. **[Miy1]** p°136). Si χ est trivial, les T(n) sont mêmes auto-adjoints, et sinon on a $T^*(n)=\overline{\chi(n)}T(n)$. Bien sur, T(-1) est également normal et même unitaire; comme c'est une involution, ses valeurs propres sont 1 et -1. Si on applique le théorème 2 à l'algèbre engendrée par les T(p), (p,N)=1, et T(-1), on trouve en tout cas:

<u>Théorème 3</u> (Hecke, Maaβ)

Il existe une base de $S_\lambda(N,\chi)$ formée de fonctions propres de tout les opérateurs T(n), pour (n,N)=1 ($n\in\mathbf{Z}$).

Ce résultat est un peu décevant car ce sont les fonctions propres de tout les T(n) qui sont vraiment intéressantes: leurs coefficients de Fourier récupèrent automatiquement les relations existant entre les T(n).

<u>Théorème 4</u> (Hecke, Maaβ)

Soit $f(z)=y^{1/2}\sum\limits_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ une fonction propre non nulle de **tout** les T(n), avec $f|T(n)=\lambda(n)f$. On a alors $a(1)\neq 0$, et si a(1)=1 (ce qu'on peut alors supposer), il vient

$$\lambda(n)=a(n)$$

$$\begin{cases} a(np)-a(n)a(p)+\chi(p)a(n/p)=0 \\ \text{si } (p,N)=1 \\ a(np)-a(n)a(p)=0 \\ \text{si } p|N \end{cases}$$

$$a(mn)=a(m)a(n), \text{ si } (n,m)=1$$

$$\sum_{n\neq 0} a(n)|n|^{-s} = 2\prod_{(p,N)=1}(1-a(p)p^{-s}+\chi(p)p^{-2s})^{-1}\prod_{p|N}(1-a(p)p^{-s})^{-1} \quad \text{(si } \lambda(-1)=1) \tag{4.7}$$

$$\sum_{n\neq 0} na(n)|n|^{-s} = 2\prod_{(p,N)=1}(1-pa(p)p^{-s}+p^2\chi(p)p^{-2s})^{-1}\prod_{p|N}(1-pa(p)p^{-s})^{-1} \quad \text{(si } \lambda(-1)=-1)$$

plus généralement, les a(n) vérifient exactement les mêmes relations de récurrence et de multiplicativité que les T(n).

De plus, si $\lambda(-1)=1$, $\sum\limits_{n\neq 0} a(n)|n|^{-s}$ (=L(s;f), cf. la partie suivante) possède le premier produit eulérien donné par (4.7), pour une $f\in S_\lambda(N,\chi)$, si et seulement si f est fonction propre de **tout** les T(n) (ie de $\mathcal{H}(N)$). De même pour $\lambda(-1)=-1$, et le second produit eulérien.

<u>Preuve</u> (cf. **[Miy1]**)

On applique la formule (4.6) au premier coefficient de $f|T(n)=\lambda(n)f$: il vient pour tout n, $a(n)=\lambda(n)a(1)$. Si donc $a(1)=0$, il vient $a(n)=0$ pour tout n et $f=0$. On peut donc supposer $a(1)=1$, d'où $a(n)=\lambda(n)$; les autres formules sont alors immédiates en comparant les coefficients de $\lambda(n)f=a(n)f$ et de $f|T(n)$ (qui sont égaux par hypothèses).

Pour la réciproque, on montre que le produit eulérien implique les relations de multiplicativité pour les coefficients de Fourier de f, qui sont alors les mêmes que ceux de $f|T(m)$ pour tout m.

♦

Une application spectaculaire des opérateurs de Hecke est fournie (dans le cas holomorphe), en remarquant que dim $S_{12}(1)=1$ (on peut le montrer de façon élémentaire, cf. **[Ser]**), et que donc la fonction Δ de Jacobi définie par $\Delta(z)=q\prod(1-q^n)^{24}$ engendre cet espace. Comme les T(n) agissent dessus, il en découle que Δ est fonction propre de tout les T(n); en particulier la fonction τ telle que $\Delta=\sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n$ vérifie les relations (4.7) (modifiées pour le cas holomorphe, cf. **[Ser**]), comme Ramanujan l'avait conjecturé sur la base du calcul des premiers termes, et comme Mordell l'avait démontré avant Hecke, "à la main" (cf. **[Har]**, chap. X). S'il existe un exemple en mathématique du fait qu'il existe des "bonnes" et des "moins bonnes" démonstrations, c'est bien celui-ci.

Le problème de l'existence d'une base de $S_\lambda(N,\chi)$ formée de fonctions propre de tout les T(n), et non seulement des T(n) pour $(n,N)=1$, est le sujet de la théorie d'Atkin - Lehner, qui y apporte une solution satisfaisante. Ce sera le sujet de la dernière partie de ce rapport.

Correspondance de Hecke
Théorème de Weil

Dans cette (courte) seconde partie, nous allons énoncer et prouver le théorème de Hecke établissant une correspondance entre les formes modulaires et les séries de Dirichlet vérifiant certaines conditions. Ensuite, et bien que cela nous écarte un peu du sujet principal de ce rapport, nous ne résisterons pas à la tentation de mentionner le théorème de Weil qui généralise spectaculairement le résultat de Hecke, d'autant plus que c'est le seul moyen actuellement disponible pour exhiber des formes paraboliques.

Dans toute cette partie, nous allons considérer uniquement les fonctions automorphes de Maaβ, et adapter à ce cas les arguments de **[Miy1]**, §4.3.

1. **Correspondance de Hecke**

Les séries de Dirichlet, c'est à dire les séries de la forme $\sum\limits_{n>0} \frac{a_n}{n^s}$, $(a_n)\in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, sont d'une grande importance en théorie des nombres, en particulier dans tout les problèmes impliquant des propriétés de type multiplicatif (cf. **[H-W]** chapitre XVII). Depuis Riemann, on attend d'une série de Dirichlet à signification arithmétique importante certaines propriétés très particulières, bien résumées dans le

Théorème 1 (Euler, Riemann)
Soit $\zeta(s)=\sum\limits_{n>0} n^{-s}$, définie au départ sur Re(s)>1. La fonction ζ est aussi donnée sur ce domaine par le produit eulérien $\zeta(s)=\prod\limits_{p}(1-p^{-s})^{-1}$. De plus, si on pose $\Lambda(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, la fonction Λ peut se prolonger méromorphiquement sur $\mathbf{C}$ entier, $\Lambda(s)+1/s+1/(1-s)$ est entière et bornée sur toute bande $A<\mathrm{Re}(s)<B$, et on a l'équation fonctionnelle $\Lambda(s)=\Lambda(1-s)$.

L'extension de ce théorème à d'autres classes de séries de Dirichlet est l'un des grands problèmes de la théorie des nombres. Sa démonstration la plus satisfaisante actuellement est celle de Tate, cf. **[C-F]**.

A priori, il n'y a pas ici de formes automorphes, mais l'examen de la preuve de Riemann (plus exactement, de la seconde preuve de Riemann) montre l'intervention de la fonction ω

définie sur **R**, par $\omega(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, proche de la fonction θ classique. La correspondance de Hecke que nous présentons maintenant généralise cette observation.

On va considérer ici des fonctions f sur **H** dont on supposera seulement qu'elles sont fonctions propre de Δ pour la valeur propre λ=s'(1-s') - ici, s va être pris -, et 1-périodiques en x, avec un terme constant nul. Le raisonnement de **I** montre qu'elles possèdent un développement de la forme **I-**3.4, avec s' à la place de s, convergeant absolument et uniformément sur les compacts de **H**. On suppose que la suite (a(n)) vérifie $a(n)=O(n^r)$ pour un certain r>0.

Pour une telle fonction f, et un entier N>0 quelconque, on note alors

$$L(s;f)=\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{|n|^s}$$

$$\Lambda_N(s;f)=\frac{1}{4}N^{-1/4}\left(\frac{N^{1/2}}{\pi}\right)^s\Gamma\left(\frac{s+s'-1/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s'+1/2}{2}\right)L(s;f)$$

que l'on écrira aussi $\Lambda_N(s;f)=\rho_N(s)L(s;f)$.

De plus on posera $L_x(s;f)=L(s;\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial f}{\partial x})$, et $\Lambda_{N,x}(s;f)=\Lambda_N(s;\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial f}{\partial x})$, ce qui est autorisé car clairement $\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial f}{\partial x}$ admet un développement de la même forme que f, avec pour coefficients $na(n)=O(n^{r+1})$. La fonction L(.;f) est clairement holomorphe dans Re(s)>r+1, car $a(n)=O(n^r)$; $L_x(.;f)$ l'est dans Re(s)>r+2.

Finalement, soit $\omega_N=\begin{pmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{pmatrix}$; ω_N agit involutivement sur **H**, et normalise $\Gamma_0(N)$; on en déduit sans difficultés que l'action de ω_N induit un isomorphisme entre $S_\lambda(N,\chi)$ et $S_\lambda(N,\overline{\chi})$.

<u>Théorème 2</u> (Hecke, Maaβ)

Soient $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s'-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ et $g(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} b(n)K_{s'-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ des fonctions sur **H** comme ci-dessus. Soit de plus N un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(A) On a $g=f|\omega_N$

(B) Les fonctions $\Lambda_N(s;f)$, $\Lambda_N(s;g)$, $\Lambda_{N,x}(s;f)$ et $\Lambda_{N,x}(s;g)$ peuvent être prolongées holomorphiquement sur **C** entier, sont bornées sur toute bande verticale, et vérifient les équations fonctionnelles

$$\Lambda_N(s;f)=\Lambda_N(1-s;g)$$
$$\Lambda_{N,x}(s;f)=-\Lambda_{N,x}(3-s;g)$$

<u>Preuve</u>

(A)⇒(B): La preuve est directement inspirée de celle de Riemann. La principale différence est que le point de départ n'est plus $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-y}y^s dh$, mais la formule

$$\textbf{(1.1)} \qquad \int_0^\infty K_\nu(y)y^s dh = 2^{s-2}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)$$

qui fort heureusement (car on ne la trouve pas dans les tables standards) est aisément prouvée à l'aide de la représentation **I**-3.2 de la fonction de Bessel K, par le biais d'un changement de variable dans l'intégrale double qui représente alors le membre de gauche de la formule en question. Il en découle aussitôt

$$\rho_N(s)|n|^{-s} = N^{-1/4}\left(\frac{2\pi|n|}{\sqrt{N}}\right)^{-s}2^{s-2}\Gamma\left(\frac{s+s'-1/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s'+1/2}{2}\right) = \int_0^\infty y^{1/2}(\sqrt{N})^{-1/2}K_{s'-1/2}\left(\frac{2\pi|n|y}{\sqrt{N}}\right)y^{s-1/2}dh$$

Compte tenu de la décroissance exponentielle de K à l'infini, on peut sommer sur $n\neq 0$ et on trouve - il faut tenir compte du facteur $y^{1/2}$ dans le développement de f -

$$\Lambda_N(s;f) = \int_0^\infty f\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{s-1/2}dh$$

l'intégrale convergeant absolument pour Re(s)>r+1. Si maintenant on sépare le domaine d'intégration en [0,1] et]1,+∞[, et qu'on effectue le changement de variable y'=1/y dans le premier intervalle, il vient

$$\Lambda_N(s;f) = \int_1^\infty f\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{s-1/2}dh + \int_1^\infty f\left(\frac{-1}{iy\sqrt{N}}\right)y^{1/2-s}dh$$

ou, compte tenu de $g=f|\omega_N$,

$$\Lambda_N(s;f) = \int_1^\infty f\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{s-1/2}dh + \int_1^\infty g\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{1/2-s}dh$$

Mais maintenant, le point singulier (possible) de y^s étant hors du domaine d'intégration et les deux fonctions f et g décroissant exponentiellement à l'infini, le membre de droite de la formule ci-dessus définit une fonction entière de s, et donc par prolongement analytique Λ_N apparaît effectivement comme une fonction entière. Les intégrales convergeant uniformément sur toute bande verticale, on en déduit aussi que $\Lambda_N(.;f)$ est bornée sur toute bande verticale. De plus, échangeant f et g en observant que $g|\omega_N=f|(\omega_N)^2=f$, on a aussi

$$\Lambda_N(s;g) = \int_1^\infty g\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{s-1/2}dh + \int_1^\infty f\left(\frac{iy}{\sqrt{N}}\right)y^{1/2-s}dh$$

et par comparaison l'équation fonctionnelle annoncée est immédiate puisque (1-s)-1/2=-s+1/2 et -(1-s)+1/2=s-1/2.

Pour $\Lambda_{N,x}$, on procède suivant le même schéma, en notant seulement que la relation $g=f|\omega_N$ implique par dérivation partielle en x l'équation fonctionnelle $-y^2g_x(iy)=f_x(-1/iy)$. Cela provoque le "décalage" de la nouvelle équation fonctionnelle en 3-s.

Notons que l'on a réellement exprimé Λ_N comme "transformée de Mellin" de f; on peut faire remonter cette idée même plus loin que Riemann, à Dirichlet dans **[Dir]**; toutefois, Dirichlet employait pour la fonction Γ l'expression $\int_0^1(\ln(1/y))^{s-1}dy$.

(B)⇒(A): on doit cette fois-ci employer la formule d'inversion de Mellin, selon laquelle si $\lambda(s)=\int_0^\infty f(y)y^sdh$, on a $f(y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=\alpha}\lambda(s)y^{-s}ds$, pour tout α tel que $F(y)=f(e^y)e^{\alpha y}$ vérifie la formule d'inversion de Fourier (la transformée de Mellin est une transformée de Fourier déguisée).

Ici, on déduit de (1.1), pour tout $\alpha>0$, la formule

$$K_{s'-1/2}(2\pi|n|y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=\alpha}(\sqrt{N}|n|)^{-s}\rho_N(s)N^{1/4}y^{-s}ds.$$

Si $\alpha>r+1$, la série $L(\alpha+iy;f)$ converge absolument et est bornée, et quelques estimations de ρ_N à base de formule de Stirling permettent d'insérer cette formule dans le développement de f et d'inverser l'intégration et la sommation. Le résultat est

$$f(iy)=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=\alpha}(y\sqrt{N})^{1/2-s}\Lambda_N(s;f)ds$$

L'étape suivante est de procéder au déplacement du chemin d'intégration en un autre pour lequel on puisse utiliser l'équation fonctionnelle de Λ_N afin d'en obtenir une pour f. Pour cela notons d'abord que puisque L(.;f) est bornée sur Re(s)=α, on a pour tout m>0 (grâce à l'estimation de Stirling, cf. les Notations) $\Lambda_N(\alpha+i\tau;f)=O(|\tau|^{-m})$. De même, si $1-\beta>r+1$, on a $\Lambda_N(\beta+i\tau;f)=O(|\tau|^{-m})$ grâce à l'équation fonctionnelle de Λ_N. Mais alors une extension du principe du maximum dû à Phrägmen - Lindelöf permet, car Λ_N est bornée sur toute bande verticale, d'assurer la validité de $\Lambda_N(\sigma+i\tau;f)=O(|\tau|^{-m})$ uniformément pour $\alpha\leq\sigma\leq\beta$ (cf. **[Miy1]** p°118 pour l'énoncé précis). Soient donc $\alpha>r+1$, $1-\beta>r+1$; par le théorème de Cauchy appliqué à l'intégrale ci-dessus, il vient par conséquent

$$f(iy)=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=\beta}(y\sqrt{N})^{1/2-s}\Lambda_N(s;f)ds$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=\beta}(y\sqrt{N})^{1/2-s}\Lambda_N(1-s;g)ds$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{Re(s)=1-\beta}(y\sqrt{N})^{s-1/2}\Lambda_N(s;g)ds$$

$$=g(-1/iNy)$$

Dans le cas holomorphe, cette égalité valable pour tout y>0 suffirait à entraîner la conclusion désirée par prolongement analytique; ici, il est nécessaire de considérer de plus la dérivée par rapport à x.

En effet, la seconde équation fonctionnelle implique l'identité $-y^2g_x(iy)=f_x(-1/iy)$ pour tout y>0, de la même façon. Notant $h=f-g|\omega_N$, on en déduit donc que h vérifie le système

$$\begin{cases}(\Delta-\lambda)h=0\\ h|i\mathbf{R}^{+*}=0\\ h_x|i\mathbf{R}^{+*}=0\end{cases}$$

Il en découle aisément par des résultats classiques d'analyse que h=0; on peut le vérifier en exploitant le fait que h est analytique réelle, et en la développant en série entière autour de chaque point de l'axe imaginaire; on a $\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n}h\right)(iy)=\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x\partial y^n}h\right)(iy)=0$ par les conditions initiales, et l'équation $\Delta h=0$ entraîne alors $\left(\frac{\partial^{n+2}}{\partial x^2\partial y^n}h\right)(iy)=0$, etc... par "bootstrap", h=0 ♦

<u>N.B.</u> 1. L'obligation de considérer deux séries L et deux équations fonctionnelles est assez évidente si l'on remarque que pour peu que $f|T(-1)=-f$, on a L(s;f) identiquement nulle. Dans ce cas, cette série n'apporte strictement aucune information sur la fonction f. Mais si f est

fonction propre de T(-1), comme l'une des fonctions L est nulle, a posteriori il en suffit d'une pour conclure.

2. Un examen encore plus précis de la preuve de Riemann conduit à une troisième condition équivalente, à savoir une formule de sommation semblable à celle de Poisson (qui est l'outil permettant d'avoir l'équation fonctionnelle de la fonction théta). Pour plus de détails, cf. **[Iwa]** §15-2.

Dans le cas N=1, comme $\Gamma_0(1)=SL(2,\mathbf{Z})$ est engendré par la translation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ω_1, le théorème 2 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Dirichlet soit obtenue à partir d'une fonction automorphe de Maaβ. Cela ne reste plus vrai pour N>1, puisque ω_N n'est pas dans $\Gamma_0(N)$. Il existe pourtant encore une réciproque, plus subtile, au théorème de Hecke.

2. Théorème de Weil

Là encore, la motivation première de ce qui suit résulte des premières études des séries de Dirichlet. Dans **[Dir]**, pour prouver le théorème de la progression arithmétique (si (a,b)=1, il existe une infinité de nombres premiers p de la forme an+b), Dirichlet avait introduit ses séries L, généralisations de la fonction zéta (de Riemann; mais Riemann n'était pas encore intervenu), de la forme $L(s)=\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$, pour χ caractère de Dirichlet modulo a. Il s'était vite avéré que ces séries L vérifiaient un théorème tout à fait analogue au théorème 1-1 (prolongement & équation fonctionnelle). Ceci se généralise encore au cas des fonctions L de formes (fonctions) automorphes, et la réciproque du théorème de Hecke est obtenue en considérant des fonctions f dont les séries L ainsi modifiées vérifient les "bonnes" équations fonctionnelles pour un ensemble assez gros de caractères de Dirichlet. C'est ce résultat que nous allons discuter ici, en donnant des énoncés précis, mais sans plonger dans la démonstration, pour laquelle on réfère à **[Miy1]**.

Tout d'abord, si ψ est un caractère de Dirichlet primitif modulo m (ce qui est automatique si m est premier impair ou 4; on note $\mathcal{M}$ l'ensemble formé de ces éléments), et f une fonction sur **H** comme celles considérées au § précédent, on note

$$f_\psi(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} \psi(n)a(n)K_{s'-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

$$L(s;f,\psi)=L(s;f_\psi)$$

$$\Lambda_N(s;f;\psi)=\Lambda_{Nm^2}(s;f_\psi)$$

et de même pour $\frac{1}{2i\pi}\,\frac{\partial f}{\partial x}$. Le théorème 1-2 implique aussitôt pour deux fonctions f et g l'équivalence des deux conditions suivantes:

(A_ψ) On a $C_\psi g_{\overline{\psi}} = f_\psi|\omega_{Nm^2}$ où C_ψ désigne un nombre complexe quelconque

(B_ψ) Les fonctions $\Lambda_N(s;f,\psi)$, $\Lambda_N(s;g,\overline{\psi})$, $\Lambda_{N,x}(s;f,\psi)$ et $\Lambda_{N,x}(s;g,\overline{\psi})$ peuvent être prolongées holomorphiquement sur **C** entier, sont bornées sur toute bande verticale, et vérifient les équations fonctionnelles

$$\Lambda_N(s;f,\psi)=C_\psi\Lambda_N(1-s;g,\overline{\psi})$$
$$\Lambda_{N,x}(s;f,\psi)=-C_\psi\Lambda_{N,x}(3-s;g,\overline{\psi})$$

Or, en utilisant la formule rappelée dans les notations pour $\overline{\psi}(b)W(\psi)$, on obtient sans difficulté la formule $f_\psi=W(\overline{\psi})^{-1}\sum_{u=1}^{m}\overline{\psi}(u)f|\alpha(u/m)$, pour $\alpha(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$.

Supposons maintenant $f\in S_\lambda(N,\chi)$; par des calculs élémentaires de matrices, on a $\Gamma(Nm^2)\subset\alpha(u/m)^{-1}\Gamma_0(N)\alpha(u/m)$, et il en découle $f_\psi\in S_\lambda(\Gamma(Nm^2))$. Si M est le plus petit multiple commun de m^2 et N, on a même $f_\psi\in S_\lambda(Nm^2,\chi\psi^2)$, par un petit calcul de plus.

Pour m vérifiant de plus $(m,N)=1$, on montre alors que $f_\psi|\omega_{Nm^2}=C_\psi g_{\overline{\psi}}$, où $g=f|\omega_N$ et $C_\psi=\chi(m)\psi(N)W(\psi)/W(\overline{\psi})$. Par conséquent, $\Lambda_N(s;f,\psi)$ et $\Lambda_{N,x}(s;f,\psi)$ peuvent être prolongées en des fonctions entières bornées sur toute bande verticale et vérifient les équations fonctionnelles

$$\Lambda_N(s;f,\psi)=C_\psi\Lambda_N(1-s;f|\omega_N,\overline{\psi})$$
$$\Lambda_{N,x}(s;f,\psi)=-C_\psi\Lambda_{N,x}(3-s;f|\omega_N,\overline{\psi})$$

avec la constante C_ψ ci-dessus. Le théorème de Weil est alors la réciproque de ce fait.

Théorème (Weil)

Soient f et g des fonctions sur **H** comme en §1.

Alors on a $f\in S_\lambda(N,\chi)$ et $g=f|\omega_N$ si et seulement si les fonctions Λ_N et $\Lambda_{N,x}$ (resp. $\Lambda_N(.;\,,\psi)$ et $\Lambda_{N,x}(.;\,,\psi)$) associées à f et g (resp. à f_ψ et g_ψ pour tout caractère de Dirichlet ψ primitif modulo m pour $m\in M$ tel que $(m,N)=1$) vérifient les conditions (B) (resp. (B_ψ)) énoncées en §1 et ci-dessus (avec la bonne constante C_ψ).

Nous venons de montrer la partie directe (facile). Toute la subtilité réside dans la réciproque. Nous ne la développerons pas ici, mais mentionnerons juste en passant que le théorème de Dirichlet joue un rôle pour trouver des éléments de M dans des progressions arithmétiques.

Ce théorème concerne $S_\lambda(N,\chi)$, mais il est facile de rajouter (et de tester) une condition du type a(-n)=a(n) pour traiter le cas de $S_{\lambda,\pm}(N,\chi)$.

Le théorème de Weil est l'outil principal pour découvrir des formes modulaires dans des situations arithmétiques particulières. Mentionnons deux exemples. Le premier, date de Maaβ **[Maa]**, c'est à dire d'avant le théorème de Weil; mais on a vu que dans certains cas simples comme SL(2,**Z**), il découle facilement de celui de Hecke. Maaβ observa que certaines fonctions zéta associées à un caractère de Hecke d'un corps quadratique réel k vérifient l'hypothèse (W); il en découle donc que l'on obtient de cette façon des fonctions paraboliques de Maaβ. Ce sont pratiquement les plus explicites connues, et cela confirme que leur nature profonde est arithmétique. En se référant à la preuve "adélique" de l'équation fonctionnelle de la fonction zéta de Riemann (cf. la thèse de Tate dans **[C-F]** pour une introduction), on peut expliquer la présence des deux facteurs gamma dans la fonction Λ comme directement liée à celle de deux "places à l'infini" réelles pour k (ie de deux plongements de K dans **R**).

Le second exemple, dû à Shimura **[Shi]**, provient du cas holomorphe (pour lequel le théorème est essentiellement le même; les fonctions Λ n'ont qu'un seul facteur gamma, et il n'est pas nécessaire de considérer la dérivée par rapport à x, comme on l'a déjà mentionné dans la preuve du théorème de Hecke), et concerne les formes modulaires de poids demi-entier $\kappa/2$, κ entier positif impair. Sans préciser davantage les définitions, disons que Shimura parvient dans ce cadre à définir des opérateurs de Hecke T(n); ceux-ci s'avèrent être nuls sauf pour n carré. Si alors $f(z)=\sum_{n\geq 1} a(n)e(nz)$ est une fonction propre de tout les $T(p^2)$, pour des valeurs propres λ_p, il montre pour tout entier t sans facteur carré un produit eulérien

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(tn^2)}{n^s} = a(t) \prod_p \left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)^\lambda \left(\frac{t}{p}\right) p^{\lambda-1-s}\right) \prod_p (1-\lambda_p p^{\kappa-2-2s})^{-1}$$

où $\lambda=(\kappa-1)/2$, et $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est le symbole de Legendre ie $\left(\frac{n}{p}\right)=1$ si n carré modulo p et -1 sinon.

Il définit ensuite $F(z)=\sum_{n\geq 1} A(n)e(nz)$ par $\sum_{n\geq 1} \frac{A(n)}{n^s} = \prod_p (1-\lambda(p)p^{\kappa-2-2s})^{-1}$, et emploie le théorème de Weil pour montrer que F est une forme modulaire de poids entier (ie telle que définie dans le **I**-§2) κ, pour un certain groupe $\Gamma_0(N)$ (N étant déterminable explicitement). Cette correspondance de Shimura a depuis été très étudiée. On peut en trouver une introduction dans **[Kob]**.

<u>Théorie d'Atkin - Lehner</u>

Dans toute cette partie, on considère des formes paraboliques de Maaβ sur les sous-groupes $\Gamma_0(N)$, c'est à dire les espaces $S_\lambda(N,\chi)$, et l'algèbre de Hecke $H(N)$ correspondante (cf. **I**-4) - incluant donc l'opérateur T(-1) -.

On notera $\delta_d=\delta(d)=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d\in \mathbf{N}$.

1. <u>Introduction</u>

Nous avons vu à la fin de **I**-4 qu'une étude relativement élémentaire permettait d'assurer l'existence d'une base de $S_\lambda(N,\chi)$ formée de fonctions propres de tout les T(n), (n,N)=1. D'un autre côté, il est apparu des plus souhaitables de pouvoir diagonaliser tout les T(n) sans exceptions. Cela est-il possible? En général, la réponse est non.

L'origine de ce phénomène peut être aisément expliquée: si d|N et $f\in S_\lambda(N/d,\chi)$, alors $f|\delta_d\in S_\lambda(N,\chi)$. Or il s'avère que les opérateurs de Hecke T(n), (n,N)=1, sont compatibles avec l'action de δ_d, et donc si f est fonction propre des T(n), (n,N/d)=1, alors f et $f|\delta_d$ sont toutes deux fonctions propres des T(n), (n,N)=1, avec les <u>mêmes</u> valeurs propres. Par conséquent, les sous-espaces propres communs peuvent être de dimension >1; même si cela ne permet pas tout à fait de conclure, c'est un indice d'impossibilité de la diagonalisabilité, compte tenu du fait que celle-ci serait possible, eu égard à la commutativité de l'algèbre de Hecke, si les espaces propres communs aux T(n), (n,N)=1, étaient toujours de dimension 1.

Bien entendu, d'une certaine façon, $f|\delta_d$ n'est pas vraiment une forme de niveau N; elle est trop liée à la forme f de niveau N/d. L'idée de la théorie d'Atkin - Lehner est qu'en 'éliminant' ces formes provenant de niveaux inférieurs, alors la diagonalisation simultanée devient possible; de plus, les espaces propres communs sont effectivement de dimension un; on peut même prouver un (difficile) théorème de multiplicité un quand le niveau N n'est pas fixé.

Ce qui suit est l'adaptation (facile) au cas des formes paraboliques de Maaβ des arguments originaux de **[A-L]**, tels qu'ils sont présentés dans **[Miy1]**.

2. <u>Lemmes et théorème de représentation</u>

Nous allons d'abord prouver les faits élémentaires indiqués dans l'introduction.

Lemme 1

Soit $f \in S_\lambda(N,\chi)$, et $d \geq 1$ un entier. Alors $f|\delta_d \in S_\lambda(Nd,\chi)$; de plus, pour tout entier n tel que $(n,Nd)=1$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} S_\lambda(N,\chi) & \xrightarrow{T(n)} & S_\lambda(N,\chi) \\ \delta_d \downarrow & & \downarrow \delta_d \\ S_\lambda(Nd,\chi) & \xrightarrow{T(n)} & S_\lambda(Nd,\chi) \end{array}$$

et pour tout nombre premier p avec $(p,d)=1$, et pour j indiquant soit l'injection canonique, soit δ_d, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_\lambda(pN,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pN)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma_0(N)} & S_\lambda(N,\chi) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ S_\lambda(pNd,\chi) & \xrightarrow{\Gamma_0(pNd)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma_0(Nd)} & S_\lambda(Nd,\chi) \end{array}$$

Preuve

Un calcul matriciel explicite fournit l'inclusion $\Gamma_0(Nd) \subset \delta_d^{-1}\Gamma_0(N)\delta_d$, et on vérifie de plus $\chi(\delta_d^{-1}g\delta_d)=\chi(g)$, d'où la première assertion.

Pour la seconde, on peut se limiter au cas où $n=p$ est premier, $(p,Nd)=1$. Dans ce cas, on utilise la décomposition explicite de la double classe $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma_0(N)$ du lemme 1 de **I**-§3, et on exploite le fait que $\delta_d\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & dm \\ 0 & p \end{pmatrix}\delta_d$, et $\delta_d\delta_p=\delta_p\delta_d$, pour faire "commuter" δ_d et les représentants en question; les nouvelles matrices continuent (car $(d,p)=1$) à former un ensemble de représentants pour la double classe, d'où le résultat.

Le cas de l'opérateur T(-1) se traite séparément et ne pose aucune difficulté.

Quand au second diagramme (qui en recouvre en fait deux), la preuve est essentiellement similaire, si ce n'est que les formules exactes utilisées diffèrent; pour que tout soit aussi facile que possible, avoir une grande latitude dans le choix des représentants de la double classe (comme fournie par le lemme de décomposition de **I**-§4) est très utile.

♦

Les remarques de l'introduction montrent qu'il est illusoire d'espérer un résultat de multiplicité un dans un sous-espace de $S_\lambda(N,\chi)$ contenant des $f|\delta_d$, $f \in S_\lambda(N/d,\chi)$, ou des combinaisons linéaires de tels éléments. Or, une fonction cette forme, c'est à dire $f=\sum f_d|\delta_d$, quand on l'exprime dans un développement de la forme **I**-3.4, vérifie $a(n)=0$ si n n'est pas multiple du ppcm des d. Le premier résultat important d'Atkin - Lehner est une réciproque de ce fait, qui permettra de bien cerner les fonctions à éliminer pour obtenir de bonnes propriétés vis à vis des opérateurs de Hecke. Le lemme suivant, dû à Hecke, est alors fondamental.

Lemme 2 (Hecke)

Soit $f \in S_\lambda(N,\chi)$, p un nombre premier tel que $(p,N)=1$. Si on a $f|\delta_p \in S_\lambda(N,\chi)$, alors $f=0$.

Preuve

Notons $\alpha=\delta_p$. On vérifie tout d'abord que pour $g=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix}$, on a $\alpha g \alpha^{-1} \notin \Gamma_0(N)$. Par une extension du théorème des diviseurs élémentaires, on peut trouver des éléments γ_1 et γ_2 de $\Gamma_0(N)$ tels que $\gamma_1(p\alpha g\alpha^{-1})\gamma_2=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, avec u|v, u et v>0 (**[Miy1]** lemme 4.5.2). De plus, $u \neq v$ car sinon $\alpha g \alpha^{-1}=\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \in \Gamma_0(N)$. Or on a

$$f|\gamma_1(p\alpha g\alpha^{-1})\gamma_2=\chi(\gamma_1)f|(p\alpha g\alpha^{-1})\gamma_2=\chi(\gamma_1)\ \{ (f|\alpha)\ |g\alpha^{-1}\gamma_2\}$$

ce qui est aussi, par hypothèse

$$=\chi(\gamma_1)\chi(g)(f|\alpha)|\alpha^{-1}\gamma_2=\chi(\gamma_1)\chi(g)\chi(\gamma_2)f|\gamma_2=Cf$$

c'est à dire qu'on doit avoir $Cf(z)=f(z/h)$, pour $h=v/u>1$. C'est clairement impossible.

♦

Lemme 3

Soit $d \geq 1$ un entier. Soit f une fonction définie sur **H** à valeurs dans **C**, non nulle, et telle que $f(z+1)=f(z)$ pour tout z, et de plus $f|\delta_d \in S_\lambda(N,\chi)$. On a alors $dm_\chi|N$, et $f \in S_\lambda(N/d,\chi)$ - ici m_χ désigne le conducteur de χ -.

Preuve

En raisonnant par récurrence sur les facteurs premiers de d on se ramène au cas d=p premier. Soit $h=f|\delta_p$; on note $\Gamma'=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid b \equiv 0\ (p)\right\}$. Commençant (encore) par des calculs explicites de matrices, on voit que $\delta_p^{-1}\Gamma'\delta_p \subset \Gamma_0(N)$. Si donc $g \in \Gamma'$, $h|\delta_p^{-1}g\delta_p=\chi(g)h$, donc $(f|g)|\delta_p=(\chi(g)f)|\delta_p$, d'où $f|g=\chi(g)f$. On montre alors que le sous-groupe de $\Gamma_0(N)$ engendré par Γ' et la translation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à $\Gamma_0(N)$, ce qui se fait sans difficultés. On a donc par conséquent $f \in S_\lambda(N,\chi)$. Si on avait $(p,N)=1$, le lemme 2 donnerait f=0, contrairement à l'hypothèse; donc p|N.

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N/p & 1 \end{pmatrix}=\delta_p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix}\delta_p^{-1}$, et donc $f|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N/p & 1 \end{pmatrix}=f$; or cet élément engendre $\Gamma_0(N/p)$ modulo $\Gamma_0(N)$, donc il vient bien $f \in S_\lambda(N/p,\chi)$. Si χ est trivial, c'est tout ce qu'il faut montrer; dans le cas contraire quelques manipulations supplémentaires de matrices sont requises pour s'assurer que χ est défini modulo N/p, et donc que $pm_\chi \mid N$

♦

On est maintenant en mesure de s'attaquer au théorème de représentation. En voilà l'énoncé.

<u>Théorème 1</u> (Atkin - Lehner)

Soit $f\in S_\lambda(N,\chi)$, et $d\geq 1$ un entier. Supposons $f\neq 0$. Alors si dans le développement **I**-3.4 de f on a $a(n)=0$ pour $(n,d)=1$, on a $d_1=(d,N/m\chi)\neq 1$ et on peut écrire

$$f=\sum_{p|d_1} f_p|\delta_p$$

avec pour tout p divisant d' une forme $f_p\in S_\lambda(N/p,\chi)$. La réciproque est trivialement vraie.

Avant de démontrer ce théorème proprement dit, quelques lemmes préliminaires. Le premier permet d'amorcer les preuves par récurrence qui suivront.

<u>Lemme 4</u>

Soit $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ un élément de $S_\lambda(N,\chi)$, $d\geq 1$ un entier. Notons g(z)=$y^{1/2}$\I\SU((n,d)=1,, a(n)$K_{s-1/2}$(2π|n|y)e(nx)). On a alors $g\in S_\lambda(M,\chi)$, avec M=N\I\PR(p|(d,N),, p) \I\PR(p|d,p\O(|,/)N,, p); en particulier, on a $g\in S_\lambda(Nd^2,\chi)$.

<u>Preuve</u>

Là encore, en opérant successivement sur les diviseurs premiers de d, on se ramène au cas d=p premier. Dans ce cas, si N'=N ou Np suivant que p|N ou non, on a toujours p|N', et $f\in S_\lambda(N',\chi)$; par conséquent, $f|T(p)\in S_\lambda(N',\chi)$, où l'opérateur T(p) est pris dans $H(N')$. Or, les calculs faits en **I**-4 montrent que

$$(f|T(p))(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(np)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

et par conséquent g s'écrit $g=f-(f|T(p))|\delta_p \in S_\lambda(N'p,\chi)$, par le lemme 1; ceci donne le résultat.

♦

<u>Lemme 5</u>

Soit $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ un élément de $S_\lambda(N,\chi)$, et $d\geq 1$ un entier sans facteur carré, tel que $a(n)=0$ si $(n,d)=1$. On peut alors écrire $f=\sum_{p|d} g_p|\delta_p$, pour des $g_p\in S_\lambda(Nd^2,\chi)$; si d|N, on peut même prendre $g_p\in S_\lambda(Nd,\chi)$.

<u>Preuve</u>

On procède par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de d. Si d=p premier, l'hypothèse implique que $f_p(z)=f(z/p)$ est 1-périodique, et $f_p|\delta_p=f\in S_\lambda(N,\chi)$, donc le lemme 3 donne exactement le résultat voulu.

Supposons maintenant que le lemme est vrai pour tout diviseur propre de d, et soit p un diviseur premier de d et d'=p/d. On décompose alors f=g+h, où

$$g(z)=y^{1/2}\sum_{(n,p)\neq 1} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

$$h(z)=y^{1/2}\sum_{(n,p)=1} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

Le lemme 4 permet d'affirmer que $h\in S_\lambda(Np^2,\chi)$, et donc $g\in S_\lambda(Np^2,\chi)$ également. De plus, si (n,p)=1, le n-ème coefficient de Fourier de g est nul, et par conséquent le même raisonnement que ci-dessus entraîne $g_p(z)=g(z/p)\in S_\lambda(Np,\chi)$. Finalement, h vérifie clairement les hypothèses du lemme pour Np^2 et d' à la place de N et d; comme $Np^2d'^2=Nd^2$, il en découle que l'égalité $f=g+h=g_p|\delta_p+h$ suffit à prouver le résultat par récurrence.

♦

Preuve du théorème 1

L'hypothèse du théorème ne dépendant que du plus grand diviseur sans facteur carré de d, $\prod_{p|d} p$, on peut supposer d sans facteur carré. On procède encore une fois par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de d. Si d=p premier, le lemme 3 suffit à conclure. Supposons donc le résultat vrai pour tout diviseur propre de d et soit p premier divisant d et d'=d/p.

On écrit cette fois f=g+h avec

$$g(z)=y^{1/2}\sum_{(n,d')=1} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

$$h(z)=y^{1/2}\sum_{(n,d')\neq 1} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$$

et, encore grâce au lemme 4, g et h sont dans $S_\lambda(Nd'^2,\chi)$.

Si pm_χ ne divise pas N, pm_χ ne divise pas non plus Nd'^2, et comme le n-ème coefficient de g est nul si (n,p)=1, le lemme 3 implique g=0, ie f=h, qui vérifie les hypothèses du théorème avec d' à la place de d; par récurrence le théorème est alors prouvé dans ce cas.

Si $pm_\chi \mid N$, soit $g_p(z)=g(z/p)$; le lemme 3 implique $g_p\in S_\lambda(Nd'^2/p,\chi)$. Soient γ_i, $1\leq i\leq k$, des représentants de la double classe $T=\Gamma_0(Nd'^2)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(Nd'^2/p)$. On a $\gamma_i\in\Gamma_0(Nd'^2/p)$, et donc puisque $g_p\in S_\lambda(Nd'^2/p,\chi)$ il vient

$$g|T = p^{-1/2}\sum\overline{\chi(\gamma_i)}g|\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\gamma_i = p^{-1/2}\sum\overline{\chi(\gamma_i)}g_p|\gamma_i = kp^{-1/2}g_p$$

d'où $g_p(z)=\frac{p^{1/2}}{k}(g|T)(z)$.

On définit alors une fonction f_p par $f_p(z)=\frac{p^{1/2}}{k}(f|T')(z)$, où $T'=\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(N/p)$, de sorte que $f_p\in S_\lambda(N/p,\chi)$ par définition de T'. Le lemme 1 montre qu'on peut remplacer T' par T dans l'expression de f_p.

On a, par définition de g

$$f(z)-f_p(pz) = f(z)-f_p(pz)-g(z)+g_p(pz) = h(z) - \frac{p^{1/2}}{k}(h|T)(pz) \tag{2.1}$$

Comme le n-ème coefficient de h est nul si (n,d')=1, le lemme 5 (la deuxième partie), permet d'écrire $h=\sum_{q|d'}h_q|\delta_q$ pour des $h_q\in S_\lambda(Nd'^3,\chi)$. Pour tout diviseur premier q de d', le lemme 1 permet d'écrire $h|T=h|T_q$ - puisque (p,d')=1 - , où cette fois on pose

$$T_q=\Gamma_0(Nd'^3q)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(Nd'^3q/p)$$

Toujours grâce au lemme 1 on peut permuter les T_q et δ_q, d'où

$$(h|T)(z)=(\sum_{q|d'}h_q|\delta_q)|T=\sum_{q|d'}h_q|\delta_q|T_q=\sum_{q|d'}\left(h_q|\Gamma_0(Nd'^3)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma_0(Nd'^3/p)\right)|\delta_q$$

Ceci entraîne en particulier que le n-ème coefficient de Fourier de h|T est nul si (n,d')=1. Comme c'est aussi le cas pour h, (2.1) implique que $f-f_p$ vérifie les hypothèses du théorème avec d' à la place de d, et par récurrence on en déduit aussitôt la validité générale du résultat; il faut faire attention pour vérifier que l'on ne somme effectivement que sur les diviseurs de d_1.

♦

3. <u>Formes primitives et théorème de multiplicité un</u>

On note $S_\lambda\overline{(N},\chi)$ le sous-espace de $S_\lambda(N,\chi)$ engendré par les $f|\delta_d$, où $f\in S_\lambda(M,\chi)$, pour tout entier M tel que $m_\chi|M$, M|N, et M≠N, et tout d est diviseur de N/M (1 ou N/M inclus). Soit alors $S_\lambda^+(N,\chi)$ l'orthogonal de $S_\lambda\overline{(N},\chi)$ par rapport au produit scalaire de Petersson; c'est dans cet espace que l'on pourra diagonaliser simultanément les T(n). La définition et le paragraphe précédent permettent de voir facilement les faits suivants:

1. Si f satisfait les hypothèses du théorème 1-1, alors $f\in S_\lambda\overline{(N},\chi)$
2. Si χ est primitif, ie $m_\chi=N$, on a $S_\lambda(N,\chi)=S_\lambda^+(N,\chi)$
3. Si $m_\chi|M|N$, M≠N, alors $S_\lambda(M,\chi)\subset S_\lambda\overline{(N},\chi)$

4. $S_\lambda(N,\chi)$ est engendré par les fonctions de la forme $f|\delta_d$, pour $f\in S_\lambda^+(M,\chi)$, avec $m_\chi|M|N$ (M=N possible), et d|N/M

Le lemme suivant est, bien sur, sous-entendu.

Lemme 1

Les sous-espaces $S_\lambda^-(N,\chi)$ et $S_\lambda^+(N,\chi)$ sont invariants par l'action des T(n) pour (n,N)=1.

Preuve

Pour $f|\delta_d$ avec f et d comme décrits dans la définition de $S_\lambda^-(N,\chi)$, on a (n,dN)=1, donc le lemme 1-1 montre que δ_d et T(n) commutent et T(n) envoie $S_\lambda^-(N,\chi)$ dans $S_\lambda^-(N,\chi)$. Comme l'adjoint de T(n) est $\overline{\chi(n)}T(n)$, il est alors clair que T(n) envoie $S_\lambda^+(N,\chi)$ dans $S_\lambda^+(N,\chi)$.

♦

Ce lemme entraîne en particulier, par le même raisonnement que pour $S_\lambda(N,\chi)$, que les sous-espaces $S_\lambda^-(N,\chi)$ et $S_\lambda^+(N,\chi)$ possèdent des bases formées d'éléments qui sont fonctions propres de tout les T(n), pour (n,N)=1.

Lemme 2

Soit $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ un élément de $S_\lambda^+(N,\chi)$, et L un entier positif tel que est f est fonction propre de tout les T(n) pour (n,L)=1, avec les valeurs propres λ_n. On a alors f=0 si et seulement si a(1)=0.

Preuve

Si a(1)=0, la formule **I**-§4-6 appliquée à f et T(n) pour m=1 fournit l'égalité $a(n)=\lambda_n a(1)=0$, pour tout n tel que (n,L)=1. D'après le théorème 1-1, il vient alors $f\in S_\lambda^-(N,\chi)$, donc f=0.

♦

Lemme 3

Soit L un entier positif, $f\in S_\lambda(N,\chi)$ une fonction propre de tout les T(n), (n,L)=1, avec les valeurs propres λ_n. Il existe alors un diviseur M de N vérifiant $m_\chi|M$, et $g\in S_\lambda^+(M,\chi)$ telle que $g|T(n)=\lambda_n g$ pour tout n tel que (n,L)=1.

Preuve

Si $f\in S_\lambda^+(N,\chi)$, g=f convient; sinon soit $f_1=\sum h_d|\delta_d$ la projection (non nulle) de f sur $S_\lambda^-(N,\chi)$, avec (cf. les remarques après la définition) $h_d\in S_\lambda^+(N_d,\chi)$; par le lemme 1, f_1 est encore fonction propre des T(n) avec les mêmes valeurs propres. On peut - en vertu de la remarque après le lemme 1 - supposer que les h_d sont fonctions propres de tout les T(n), (n,N)=1. Des fonctions propres correspondant à des valeurs propres de T(n) différentes étant linéairement indépendantes, il s'ensuit que dans l'expression de f les sommes partielles sur les h_d dont la valeur propre pour T(n) est différente de λ_n doit être nulle. Donc on obtient une telle expression de f_1 où toutes les h_d vérifient $h_d|T(n)=\lambda_n h_d$, (n,N)=1, et alors on peut prendre pour g l'une quelconque de ces fonctions h_d.

♦

Lemme 4

Soit $f\in S_\lambda^+(N,\chi)$, $f\neq 0$, et $g\in S_\lambda(N,\chi)$ des formes de Maaβ qui sont toutes deux fonctions propres des T(n), (n,L)=1, avec les mêmes valeurs propres. Alors g est proportionnelle à f.

Preuve

Tout d'abord, on peut supposer que N|L en remplaçant si nécessaire L par NL - par exemple -. Le lemme 2 permet en outre de supposer que a(1)=1, où a(n) est le n-ème coefficient de Fourier de f.

Ecrivons $g=g^+ + g^-$, avec $g^*\in S_\lambda^*(N,\chi)$ fonction propre des T(n), (n,L)=1, avec les mêmes valeurs propres que g. Si $g^-\neq 0$, soit g_1 une fonction obtenue en appliquant le lemme 3 à g^-, $g_1\in S_\lambda^+(M,\chi)$. Soit $g_1(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} c(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ son développement de Fourier; on a $c(1)\neq 0$ par le lemme 2. La formule **I**-§4-6 montre que, pour (n,L)=1, le n-ème coefficient de Fourier de g_1-c(1)f est nul, et donc $g_1-c(1)f\in S_\lambda^-(N,\chi)$ en appliquant le théorème 1-1; comme f est supposée être non nulle et dans $S_\lambda^+(N,\chi)$, ceci est exclu, et donc $g^-=0$. On a alors $g=g^+\in S_\lambda^+(N,\chi)$. Notons b(1) le premier coefficient de Fourier de g; exactement le même raisonnement que ci-dessus donne cette fois $b(1)f-g\in S_\lambda^-(N,\chi)$, et donc g=b(1)f.

♦

On peut maintenant conclure à la diagonalisabilité simultanée de tout $\mathcal{H}(N)$ dans $S_\lambda^+(N,\chi)$.

Définition

Soit $f\in S_\lambda(N,\chi)$. On dit que f est une forme primitive si on a $f\in S_\lambda^+(N,\chi)$, et si f est fonction propre de tout les T(n), (n,N)=1, normalisée dans le sens que le premier coefficient de Fourier de f est égal à 1.

N.B. 1. Dans **[A-L]**, la terminologie adoptée affuble une telle forme du nom de "new-form"; le nom "primitif" que l'on trouve dans **[Miy1]** semble beaucoup plus satisfaisant (c'est en tout cas l'avis d'Iwaniec), compte tenu de la deuxième remarque après la définition de $S_\lambda^-(N,\chi)$.

2. D'après les formules de **I**-4, les valeurs propres de T(n) pour une forme primitive sont exactement ses coefficients de Fourier.

Quoi qu'il en soit, il est maintenant facile d'obtenir un premier théorème important.

Théorème 1

Toute forme primitive f est fonction propre de $\mathcal{H}(N)$ et de l'algèbre $\mathcal{H}^*(N)$ formée des adjoints de $\mathcal{H}(N)$. Il en découle que $S_\lambda^+(N,\chi)$ possède une base formée de formes primitives, et donc de fonctions propres de tout les T(n).

Preuve

Soit f une forme primitive, avec $f|T(n)=a(n)f$, pour $(n,N)=1$. Soit $T\in\mathcal{H}(N)$; comme $\mathcal{H}(N)$ est commutative, $f|T$ est encore fonction propre des T(n), $(n,N)=1$, avec les mêmes valeurs propres. Par le lemme 4, on a donc $f|T=cf$ pour un certain $c\in\mathbf{C}$. Pour $\mathcal{H}^*(N)$, on utilise l'expression $T(n)^*=\overline{\chi(n)}T(n)$ pour aboutir à la même conclusion. La dernière affirmation est immédiate d'après le lemme 2.

♦

L'étape suivante va être de prouver le théorème de multiplicité un. Enonçons le d'abord:

Théorème 2

Soit $f\in S_\lambda^+(N,\chi)$, $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ une forme primitive, et soit $g\in S_\lambda(M,\chi)$, $g(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} b(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$. On suppose que g est une fonction propre de $\mathcal{H}(N)$ et de $\mathcal{H}^*(N)$, que $b(1)=1=a(1)$, et qu'il existe un entier positif L vérifiant $b(n)=a(n)$ pour tout n tel que $(n,L)=1$. Alors on a $N=M$ et $f=g$.

La preuve de ce théorème n'est pas facile et fait appel à des estimations non triviales de l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier des formes de Maaβ, estimations que nous ne prouverons que dans la prochaine partie.

Nous allons démontrer le théorème 2 dans le cas où χ est le caractère trivial, $\chi(n)=1$ pour $(n,N)=1$. C'est également ce qui est fait dans **[A-L]**, et le cas général (traité dans **[Miy1]**) nécessite quelques lemmes matriciels assez élémentaires mais un peu long.

Tout d'abord, il est possible d'obtenir le module exact des coefficients de Fourier a_q, où q est un nombre premier tel que $q|N$.

Théorème 3

Soit $f\in S_\lambda^+(N)$ une forme primitive, $q|N$ un nombre premier. On note v_q la q-valuation de N, ie le plus grand m tel que $q^m|N$. On a alors

1. Si $v_q=1$, alors $a_q^2=q^{-1}$
2. Si $v_q\geq 2$, alors $a_q=0$

Preuve

Notons encore $T=\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\Gamma_0(N/q)$.

Dans le premier cas de l'énoncé, le lemme **I**-§4-1 permet de constater que l'on a

$$T=T(q)\perp\!\!\perp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\gamma_q$$

où γ_q est tout élément tel que décrit en **I**-§4-1, et on vérifie à cette occasion que si γ convient, son inverse également.

On a $g=f|T\in S_\lambda(N/q)$; or $T(n)$ pour $(n,N)=1$ commute avec $T(q)$ et avec γ_q (petit lemme à vérifier comme les précédents lemmes matriciels), donc g est fonction propre des $T(n)$, $(n,N)=1$, avec les mêmes valeurs propres que f; le lemme 4 implique que g est proportionnelle à f, mais comme $g\in S_\lambda(N/q)$, cela n'est possible que si $g=0$.

On a donc $f|\gamma_q=-q^{1/2}f|T(q)=-q^{1/2}a_qf$. On fait alors agir γ_q^{-1} à droite, et grâce à la remarque ci-dessus il vient $f=qa_q^2f$, et donc $a_q^2=q^{-1}$.

Pour le second point, on a cette fois (toujours grâce au lemme **I**-4-1), $T=T(q)$; il en découle donc $a_qf=f|T\in S_\lambda(N/q)$, et donc $a_qf=0$ ie $a_q=0$.

♦

Dans le cas où le caractère χ n'est pas trivial, c'est à ce niveau qu'il faut travailler un peu plus (dans le même esprit) pour pouvoir discuter d'autres cas.

Preuve du théorème 2

Remplaçant si besoin est L par NML, on peut se ramener au cas où N et M divisent L. Pour pouvoir appliquer le lemme 4, ce qui suffira à conclure, nous allons montrer $M|N$.

Pour cela la méthode est analytique. Distinguons deux cas suivant que la valeur propre de f pour $T(-1)$ est 1 ou -1; la condition $(n,L)=1$ incluant $n=-1$, on a la même valeur propre pour g. Si celle ci est égale à 1, appliquons la première équation fonctionnelle du théorème **II**-2 à f et g, et faisons le quotient; on obtient l'égalité entre fonctions méromorphes sur **H**:

$$\frac{\Lambda_N(s;f)}{\Lambda_M(s;g)}=\frac{\Lambda_N(1-s;f|\omega_N)}{\Lambda_M(1-s;g|\omega_N)} \tag{3.1}$$

D'après le théorème **I**-§4-4, $L(s;f)$ et $L(s;g)$ possèdent des développements en produit eulérien, valables pour $Re(s)$ assez grand. Si $(p,L)=1$, c'est à dire pour tout les nombres premiers p sauf un nombre fini, le facteur correspondant à p est le même dans les deux développements. Le quotient $\frac{L(s;f)}{L(s;g)}$ apparaît donc dans ce domaine comme fraction rationnelle en les p^{-s}, $p|L$; par prolongement analytique, cette expression reste valide pour tout $s\in\mathbf{C}$. On en déduit, avec $\varepsilon_k(p)=1$ si $(p,k)=1$, et 0 sinon

$$\frac{\Lambda_N(s;f)}{\Lambda_M(s;g)} = (N/M)^{s/2-1/4}\prod_{p|L}\frac{1-b(p)p^{-s}+\varepsilon_M(p)p^{-2s}}{1-a(p)p^{-s}+\varepsilon_N(p)p^{-2s}}$$

De plus, toujours les mêmes manipulations matricielles permettent de s'assurer que les $T(n)$ commutent avec ω_N; il en découle que $f|\omega_N$ et $g|\omega_M$ sont fonctions propres des $T(n)$ avec les mêmes valeurs propres, et ont également un développement en produit eulérien, d'où

$$\frac{\Lambda_N(1-s;f|\omega_N)}{\Lambda_M(1-s;g|\omega_M)} = c(N/M)^{(1-s)/2-1/4}\prod_{p|L}\frac{1-b(p)p^{s-1}+\varepsilon_M(p)p^{2s-2}}{1-a(p)p^{s-1}+\varepsilon_N(p)p^{2s-2}}$$

pour une constante $c\in\mathbf{C}$. Par (3.1) il vient donc l'égalité

$$(N/M)^{s}\prod_{p|L}\frac{1-b(p)p^{-s}+\varepsilon_M(p)p^{-2s}}{1-a(p)p^{-s}+\varepsilon_N(p)p^{-2s}} = c(N/M)^{1/2}\prod_{p|L}\frac{1-b(p)p^{s-1}+\varepsilon_M(p)p^{2s-2}}{1-a(p)p^{s-1}+\varepsilon_N(p)p^{2s-2}}$$

D'après le théorème d'unicité du développement en série de Dirichlet, on a pour tout $p|L$, avec N_p (resp. M_p) la p-composante de N (resp. M) l'égalité

$$\textbf{(3.2)}\qquad (N_p/M_p)^{s}\frac{1-b(p)p^{-s}+\varepsilon_M(p)p^{-2s}}{1-a(p)p^{-s}+\varepsilon_N(p)p^{-2s}} = c_p\frac{1-b(p)p^{s-1}+\varepsilon_M(p)p^{2s-2}}{1-a(p)p^{s-1}+\varepsilon_N(p)p^{2s-2}}$$

c_p étant une autre constante.

On note alors u (resp. v) le degré de $1-a(p)X+\varepsilon_N(p)X^2$ (resp. de $1-b(p)X+\varepsilon_M(p)X^2$), donc $u,v\in\{0,1,2\}$. De plus, on pose $M_p/N_p=p^e$; (3.2) équivaut à l'égalité entre fractions rationnelles

$$\textbf{(3.3)}\qquad X^{e}\frac{1-b(p)X+\varepsilon_M(p)X^2}{1-a(p)X+\varepsilon_N(p)X^2} = c_p\frac{1-b(p)p^{-1}X^{-1}+\varepsilon_M(p)p^{-2}X^{-2}}{1-a(p)p^{-1}X^{-1}+\varepsilon_N(p)p^{-2}X^{-2}}$$

<u>Cas 1</u>. Si $u=v$, (3.3) entraîne directement $e=0$ en comparant les degrés, ie $N_p=M_p$.

<u>Cas 2</u>. Si $u=1$ et $v=0$, (3.3) est $c_p(1-a(p)X)=X^e(1-a(p)p^{-1}X^{-1})$, et $a(p)\neq 0$; comparant les zéros des deux côtés, il vient $|a(p)|^2=p$; comme $u=1$ implique $p|N$, ceci contredit le théorème 3.

<u>Cas 3.</u> Si $u=2$ et $v=0$, (3.3) est $c_p(1-a(p)X+X^2)=X^e(1-a(p)p^{-1}X^{-1}+p^{-2}X^{-2})$; donc $e=2$ et en comparant les coefficients de degré 0 et 2, $c_p=p^{-2}$ et $c_p=1$...

<u>Cas 4</u>. Si $u=2$ et $v=1$ (le cas difficile), (3.3) s'écrit encore

$$c_p \frac{1-a(p)X+X^2}{1-b(p)X} = X^e \frac{1-a(p)p^{-1}X^{-1}+p^{-2}X^{-2}}{1-b(p)p^{-1}X^{-1}}$$

Si α et β sont les racines de $1-a(p)X+X^2$, on a $\alpha\beta=1$, et on voit que $p\alpha$ et $p\beta$ sont racines de $p^2-pa(p)X+X^2$. Mais, on observe que l'un des deux zéros de $1-a(p)X+X^2$, disons α, doit être un zéro de $p^2-pa(p)X+X^2$, pour que l'identité soit possible. Comme $p\alpha=\alpha$ est exclu, on a donc $p\alpha=\beta$, or $\alpha=1/\beta$, et il vient donc $\alpha^2=p$. D'un autre côté, la relation de récurrence **I**-4.7 appliquée à p^n montre que l'on a $a(p^n)=\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ (récurrence linéaire double; u=2 implique (p,N)=1). Nous en déduisons donc l'inégalité $|a(p^n)|>>p^{n/2}$. Ceci, bien que n'étant pas en contradiction avec l'estimation triviale $a(n)=O(n^{1/2})$, est impossible compte tenu des raffinements de cette estimation, de la forme

<u>Théorème</u>. Il existe $\delta>0$ tel que si $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ est une forme parabolique de Maaβ, alors on a $a(n)=O(n^{1/2-\delta})$.

De tels résultats ne sont pas aisés à obtenir; les méthodes les plus simples semblent être celle de Rankin - Selberg, où celle liée aux premières estimations non triviales de sommes de Kloosterman (par Kloosterman, 1928). En 1987, le meilleur résultat était $a(n)=O(n^{1/5}d(n))$ - Serre, Moreno, Shahidi, Murty -. Dans la prochaine partie nous démontrerons un tel résultat par la méthode de Rankin - Selberg. Quoi qu'il en soit, ceci étant admis, la contradiction est immédiate et ce cas est exclu.

<u>Cas 5</u>. Si u=0 et v=2, (3.3) est $c_p(1-b(p)p^{-1}X^{-1}+p^{-2}X^{-2})=X^e(1-b(p)X+X^2)$, d'où e=-2 en comparant les degrés, donc $M_p|N_p$. Si u=0 et v=1 ou u=1 et v=2, on trouve de la même façon $M_p|N_p$.

Ces résultats étant valides pour tout p|L, donc tout p|M, on a bien montré M|N (rappelons qu'on a supposé N,M | L). On a déjà vu que cela suffit pour avoir le théorème.

Reste à traiter le cas où $f|T(-1)=-f$; comme alors L(s;f) est identiquement nulle, on ne peut espérer en tirer quelque information que ce soit. Dans ce cas, il faut utiliser la seconde équation fonctionnelle du théorème **II**-2, et le second produit eulérien du théorème **I**-§4-4; on déroule alors les mêmes calculs et à une constante près, il apparaît que l'on peut se ramener au cas ci-dessus en faisant simplement le changement de variable s'=1-s.

♦

<u>N.B.</u> Remarquons qu'idéalement, dans le cas difficile ci-dessus, l'argument doit être plus simple, la conjecture de Ramanujan donnant exactement le module de α et β, et il est alors

immédiat qu'il y a contradiction dans (3.3). Dans le cas holomorphe, on peut employer cet argument grâce à Deligne, mais bien sur la sophistication de la preuve de la conjecture de Ramanujan rend son emploi quelque peu spécieux. Ceci ne change rien au fait, par ailleurs, que le résultat obtenu est très profond.

Du théorème 2 et des résultats précédents (lemme 3 en particulier) on peut déduire sans difficultés les faits suivants qui complètent l'étude des opérateurs de Hecke sur $\Gamma_0(N)$, et permettent d'avoir une caractérisation algébrique des formes primitives:

1. Soit $f\in S_\lambda(N,\chi)$ une fonction propre non nulle des $T(n)$ pour $(n,N)=1$. Il existe alors un unique entier $M|N$, et une (unique) forme primitive $g\in S_\lambda^+(M,\chi)$ possédant les mêmes valeurs propres que f pour les $T(n)$, $(n,N)=1$.

2. Soit $f\in S_\lambda(N,\chi)$ non nulle dont le premier coefficient de Fourier est égal à 1; alors f est primitive si et seulement si f est fonction propre commune de $H(N)$ et $H^*(N)$. Par conséquent, d'après le théorème **I**-§4-4, f est primitive si et seulement si $L(s;f)$ et $L(s;f|\omega_N)$ (resp. $L_x(s;f)$ et $L_x(s;f|\omega_N)$ si $f|T(-1)=-f$) possèdent un développement en produit eulérien de la forme **I**-4.7.

Le dernier corollaire implique, dans de nombreux cas où l'on utilise le théorème de Weil pour construire des formes automorphes, que l'on obtient une forme primitive. Il en est par exemple ainsi dans le cas des fonctions L de courbes elliptiques, à ceci près que l'on ne sait pas encore prouver qu'elles vérifient les hypothèses du théorème de Weil! L'un des intérêts de la théorie est qu'elle permet de s'assurer de la bonne définition de la fonction zéta locale d'une courbe elliptique en un nombre premier p où la courbe à mauvaise réduction (ie la réduction modulo p est singulière): c'est le facteur correspondant du produit eulérien.

Un dernier résultat permet de préciser un peu la théorie et de mieux appréhender l'opérateur T(-1).

Théorème 3

Soit $f\in S_\lambda^+(N,\chi)$, $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ une forme primitive, et soit $g\in S_\lambda(M,\chi)$, $g(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} b(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$. On suppose que g est une fonction propre de $H(N)$ et de $H^*(N)$, que $b(1)=1=a(1)$, et qu'il existe un entier positif L vérifiant $b(n)=a(n)$ pour tout n **positif** tel que $(n,L)=1$. Alors on a $N=M$ et $f=g$.

N.B. La différence avec le théorème 2 réside dans le fait que l'on ne demande pas que f et g aient même valeur propre pour T(-1); je ne sais pas si ce théorème peut vraiment être amené à servir en pratique, mais il est bon de le connaître.

Preuve

On suppose f|T(-1)=f et g|T(-1)=-g; l'autre cas est similaire. On réalise en fait la même démonstration que pour le théorème 2; simplement on utilise la première série L pour f et la seconde pour g, et on fait le quotient

$$\backslash F(\Lambda_N(s-1;f),\Lambda_{M,x}(s;g))$$

et on aboutit en suivant les calculs au même raisonnement.

♦

Estimation des coefficients de Fourier des formes paraboliques de Maaβ

Dans toute cette partie, on considère des formes paraboliques de Maaβ sur les groupes de congruence. L'objectif est d'aboutir au théorème suivant, dû à Rankin essentiellement:

Théorème (Rankin, Selberg)

Soit $f\in S_\lambda(N,\chi)$, $f(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq 0} a(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e(nx)$ une forme parabolique de Maaβ pour $\Gamma_0(N)$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a l'estimation $a(n)=O(n^{3/10+\varepsilon})$.

Ce théorème est suffisant pour conclure les arguments dans la partie précédente. Sa preuve nécessite l'emploi des séries d'Eisenstein et fournit donc une excuse pour en présenter quelques propriétés importantes.

1. Les séries d'Eisenstein

Rappelons la définition originelle: soit $\mathbf{a}$ une pointe de $\Gamma_0(N)$, $g\in SL(2,\mathbf{R})$ tel que $g\mathbf{a}=\infty$. On pose pour $\mathrm{Re}(s)>1$

$$E_{\mathbf{a}}(z;s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{a}}\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(g\gamma z))^s$$

$E_{\mathbf{a}}$ vérifie $\Delta E_{\mathbf{a}} = s(1-s)E_{\mathbf{a}}$, mais n'est pas dans L^2 (évidemment puisque $s(1-s)$ n'est pas positif réel!). En tant que fonction de s, $E_{\mathbf{a}}$ est holomorphe dans $\mathrm{Re}(s)>1$. Pour obtenir le spectre continu de Δ, il faut prolonger $E_{\mathbf{a}}$ méromorphiquement de façon à disposer de fonctions $E_{1/2+it}$ plus aptes à intervenir dans la décomposition spectrale de Δ. Il s'agit d'un résultat important et difficile.

Pour l'énoncer proprement, quelques notations. Soit $E={}^t(E_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a}\text{ pointe}}$ le vecteur colonne des séries d'Eisenstein. Si $\mathbf{b}$ est une pointe de $\Gamma_0(N)$, le terme constant du développement de Fourier de $E_{\mathbf{a}}$ en $\mathbf{b}$ est de la forme

$$\delta_{\mathbf{ab}}\, y^s + \varphi_{\mathbf{ab}}(s)\, y^{1-s}$$

avec $\delta_{\mathbf{ab}} = 0$ si $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$ et 1 sinon; la fonction $\varphi_{\mathbf{ab}}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s)>1$.

Soit enfin $\Phi(s)=(\varphi_{\mathbf{ab}}(s))_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ la matrice de 'scattering' formé à partir des termes constants. Le résultat précis que l'on obtient est

Théorème (Selberg, cf. **[D-I]**)

Pour toute pointe **a** de $\Gamma_0(N)$, la série d'Eisenstein $E_{\mathbf{a}}(.,s)$ admet un prolongement méromorphe (par rapport à s) sur tout **C**, avec un unique pôle en s=1 de résidu (constant) égal à $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbf{H})^{-1}$. De plus, on a les équations fonctionnelles

$$\Phi(s)\Phi(1-s)=\mathrm{Id}$$

$$E(z,s)=\Phi(s)E(z,1-s)$$

La preuve générale est assez complexe (cf. **[Kub]**); dans le cas modulaire on peut d'une certaine façon la simplifier en explicitant le développement de Fourier de $E_{\mathbf{a}}$ et en identifiant les $\varphi_{\mathbf{ab}}$ à des fonctions pour lesquelles le prolongement est connu (typiquement, une fonction zéta d'un corps de nombre, cf. **[Iwa2]**). Nous allons ici donner au moins les grandes lignes d'une preuve récente de Colin de Verdière (**[CdV]**) dans le cas de SL(2,**Z**); cette restriction n'est pas ici réellement rédhibitoire au niveau des idées car le passage au cas général demande surtout un travail au niveau des notations, pour lequel on pourra consulter **[Lan]**.

On pose $\Gamma=SL(2,\mathbf{Z})$, et on identifie $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ au domaine fondamental $\{z \mid |\mathrm{Re}(z)|<1/2, |z|>1\}$ (avec les identifications au bord). La première étape est de trouver une définition intrinsèque des séries d'Eisenstein, par des conditions d'analyse fonctionnelle. Pour cela, quelques préliminaires: on notera Δ le laplacien agissant sur $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ au sens des distributions, Δ_∞ l'unique prolongement autoadjoint de Δ (agissant sur les fonctions C^∞ à support compact) dans L^2. Soit Ω l'ensemble des $s\in\mathbf{C}$ tels que Re(s)>1/2 et s(1-s) n'est pas dans le spectre de Δ_∞. Soit h_0 une fonction C^∞ sur $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ valant 0 pour Im(z)<b, et 1 pour Im(z)>b' (avec b'>b>1), h indépendante de x.Cette fonction h_0 permet d'isoler la pointe du reste de $\Gamma\backslash\mathbf{H}$. On note $h(z,s)=h_0(z)y^s$.

Théorème

Pour $s\in\Omega$, il existe une unique fonction E(.,s) sur $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ telle que

$$(\Delta-s(1-s))\, E(.,s) = 0$$

$$E(.,s)-h(.,s) \in L^2$$

E(z,s) est holomorphe en s sur Ω.

En effet, si on cherche une fonction F(z,s) vérifiant ces conditions, en appliquant Δ-s(1-s) à F=h+g, $g\in L^2$, on trouve que g est déterminé par $g(z,s)=-(\Delta_\infty-s(1-s))^{-1}(H(z,s))$, où on a posé $H=(\Delta-s(1-s))h$; g existe car s(1-s) n'est pas dans le spectre de Δ_∞, et H est C^∞ à support compact. La résolvante est holomorphe en s, et donc g est holomorphe en s puis E aussi.

Cette fonction E correspond aux séries d'Eisenstein comme on le vérifie tout de suite.

On voit que c'est l'holomorphie de la résolvante qui donne celle de E dans Ω; pour avoir E globalement méromorphe il suffirait que la résolvante de Δ_∞ le soit, ce qui serait le cas par exemple si elle était compacte. Ceci est faux, bien entendu, mais l'idée va être de faire intervenir un nouvel opérateur (un 'pseudo-laplacien') à résolvante compacte et de l'exploiter pour retrouver E à partir de l'assertion d'unicité du théorème ci-dessus.

On choisit pour cela un a>b', et on considère le sous-espace H_a de L^2 formé des éléments dont le terme constant du développement de Fourier par rapport à x est nul pour $y \geq a$. Par un procédé d'analyse fonctionnelle, on peut construire un opérateur autoadjoint positif Δ_a sur H_a, dont le domaine est formé par les f telles qu'il existe $c \in \mathbf{C}$ avec $\Delta f = g + cT_a$ (T_a est la distribution telle que $\langle T_a, f \rangle = f_0(a)$, f_0 étant le terme constant du développement de Fourier) avec $g \in L^2$; on a alors $\Delta_a f = g$. Cet opérateur Δ_a est à résolvante compacte parce que l'injection du domaine dans L^2 est compacte. En particulier, cette résolvante est méromorphe sur $\mathbf{C}$.

Pour prolonger E(z,s) méromorphiquement, une première tentative est de prendre la définition ci-dessus et de remplacer ∞ par a, donc de poser

$$F(z,s)=h(z,s)+(s(1-s)-\Delta_a)^{-1}H(z,s)$$

Cette fonction F est bien parfaitement méromorphe sur $\mathbf{C}$, et $F-h \in L^2$, mais on a pas (de peu) $(\Delta-s(1-s))F(.,s)=0$. Plus exactement, F-h est dans le domaine de Δ_a, donc $\Delta(F-h)=g+cT_a$, avec $g \in L^2$, et même $g=\Delta_a(F-h)$, par définition de Δ_a. Par conséquent on a

$$(\Delta-s(1-s))(F-h)=(\Delta_a-s(1-s))(F-h)+cTa=H+cT_a$$

et vu l'expression de H ceci donne $(\Delta-s(1-s))F=cT_a$.

Donc il s'en faut de peu, et en particulier seul le coefficient constant n'est pas bon. Si on a une fonction W indépendante de x telle que $(\Delta-s(1-s))W=cT_a$, en posant K=F-W on aura directement $(\Delta-s(1-s))K=cT_a-cT_a=0$, et si W est en plus holomorphe en s et a le bon terme constant on pourra conclure.

Pour construire W, écrivons le terme constant (continu) de F sous la forme

$$F_0(z,s)=A(s)y^s+B(s)y^{1-s} \text{ pour } y<a$$
$$F_0(z,s)=y^s \text{ pour } y>a$$

Maintenant, on vérifie que $W=\chi_{[a,+\infty[}(y^s-A(s)y^s-B(s)y^{1-s})$ convient. On en déduit que pour Re(s)>1/2 on a K(z,s)=A(s)E(z,s), et pour Re(s)<1/2, K(z,s)=B(s)E(z,1-s), donc avec $\varphi=A/B$, l'équation fonctionnelle $E(z,s)=\varphi(s)E(z,1-s)$. On a aussitôt également $\varphi(s)\varphi(1-s)=1$, et on peut analyser les pôles de E sur Re(s)≥1 sans difficultés. On peut aussi déterminer que E n'a pas de pôles sur Re(s)=1/2 à l'aide des relations de Maaβ-Selberg (cf. **[CdV]**, **[Kub]**).

Voilà donc pour l'esquisse de la preuve du théorème. Notons que même dans le cas de SL(2,**Z**), un calcul de développement de Fourier permet de voir que le terme constant de E est la fonction zéta de Riemann à peu de choses près, et d'avoir donc une preuve de son prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle.

Avant de conclure ce paragraphe, indiquons la décomposition spectrale finale du laplacien Δ_∞ sur $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ (cf. **[Kub]**, **[Lan]**). Le spectre de Δ_∞ consiste en un spectre discret et un spectre continu. Le spectre discret est constitué d'une part par l'espace engendré (au sens hilbertien) par les formes paraboliques de Maaβ - dont le théorème 2 de **I**-3 donne l'essentiel de ce qui est connu en général -, et d'autre part de celui engendré par un nombre fini de fonctions propres exceptionnelles non paraboliques (qui sont les résidus des séries d'Eisenstein là où elles ont des pôles); dans le cas des sous-groupes de congruence, on n'a que les constantes dans cet espace. Le spectre continu couvre l'intervalle [1/4,+∞[avec multiplicité constante égale au nombre de pointes, et il est isomorphe à une intégrale directe continue engendrée par les séries d'Eisenstein $E_{\mathbf{a}}(1/2+it)$, pour **a** pointe de Γ et $t\in\mathbf{R}$. On a une formule de décomposition explicite

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} \langle f,u_j\rangle u_j + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbf{R}} \langle f,E_{\mathbf{a}}(.,1/2+it)\rangle E_{\mathbf{a}}(z,1/2+it)\, dt$$

où les u_j forment une base pour le spectre discret.

Un dernier mot: une autre définition intrinsèque des séries d'Eisenstein est que ce sont des formes automorphes non paraboliques qui sont fonctions propres de tout les opérateurs de Hecke, au moins dans le cas de SL(2,**Z**) (pour $\Gamma_0(N)$, c'est le vecteur colonne qui est vecteur propre); on peut montrer directement que la définition donnée ici implique cette propriété, cf. **[Iwa1]** §16.

2. Méthode de Rankin - Selberg

La méthode de Rankin - Selberg pour obtenir des estimations des coefficients de Fourier de formes paraboliques f est assez subtile; elle consiste à prouver qu'une série de Dirichlet constituée à partir de f (différente de celles considérées en **II**) est une 'bonne' série de Dirichlet: elle est prolongeable méromorphiquement et vérifie une équation fonctionnelle. A partir de là, des arguments taubériens assurent l'estimation voulue, et donnent même un résultat un peu meilleur.

Comme au paragraphe précédent, nous allons présenter les notations et les résultats pour $\Gamma=\Gamma_0(N)$, mais nous limiterons en partie les preuves au cas de $SL(2,\mathbf{Z})$; il faut cependant dire que ceci est dans ce cas un peu plus dommageable, l'argument qui fait marcher le cas $SL(2,\mathbf{Z})$ ne pouvant pas s'adapter aussi bien qu'au §1 pour plusieurs pointes.

Nous référons à **[Iwa]** §15.3-15.4, et à **[Bum]** pour une présentation générale de la méthode de Rankin - Selberg.

On commence avec deux formes paraboliques f et g, $f\in S_\lambda(N,\chi)$ et $g\in S_\mu(N,\chi)$ (avec $\lambda=s'(1-s')$ et $\mu=s''(1-s'')$). Soit $\mathbf{c}$ une pointe de Γ, $\tau\in SL(2,\mathbf{R})$ tel que $\tau\mathbf{c}=\infty$. On note $a_{\mathbf{c}}(n)$ et $b_{\mathbf{c}}(n)$ les coefficients de Fourier de f et g en $\mathbf{c}$ (respectivement) dans le développement **I**-3.4. On définit alors la fonction zéta de Rankin - Selberg en $\mathbf{c}$ pour f et g par

$$R_{fg\mathbf{c}}(s)=\sum_{n\neq 0} a_{\mathbf{c}}(n)\overline{b_{\mathbf{c}}(n)}|n|^{-s}$$

et le vecteur colonne $R_{fg}(s)=\zeta(2s)^t(R_{fg\mathbf{c}})_{\mathbf{c}}$. Par l'estimation triviale $a(n)=O(n^{1/2})$, les séries R convergent pour $Re(s)>1$. On pose aussi

$$\Theta_{\lambda\mu}(s)=\pi^{-2s}\Gamma\left(\frac{s+s'+s''-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+s'-s''}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s'+s''}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s'-s''+1}{2}\right)$$

et on peut énoncer le premier résultat:

Théorème 1

Pour $Re(s)>1$, on a l'égalité

$$\Theta_{\lambda\mu}(s)R_{fg\mathbf{c}}(s)=8\Gamma(s)\pi^{-s}\int_{\Gamma\backslash\mathbf{H}} f(z)\overline{g(z)}E_{\mathbf{c}}(z,s)d\mu(z)$$

Preuve

Notons que f et g étant paraboliques donc à décroissance exponentielle et E à croissance modérée, l'intégrale existe. Notons F un domaine fondamental pour $\Gamma\backslash\mathbf{H}$

On développe l'intégrale en utilisant la définition de $E_{\mathbf{c}}$ par la série et en inversant l'ordre de sommation; cette intégrale vaut donc

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{c}}\backslash\Gamma}\int_F f(z)\overline{g(z)}Im(\tau^{-1}\gamma w)^s d\mu(z)$$
$$=\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{c}}\backslash\Gamma}\int_{\tau^{-1}\gamma F} f(\tau z)\overline{g(\tau z)}y^s d\mu(z)$$

$$= \int_0^\infty y^{s-2} \int_0^1 f(\tau z)\overline{g(\tau z)}dxdy$$

car la réunion sur $\gamma\in \Gamma_{\mathbf{c}}\backslash\Gamma$ des $\tau^{-1}\gamma F$ est un domaine fondamental pour $\tau^{-1}\Gamma_{\mathbf{c}}=\Gamma_\infty$ donc est équivalent à la bande $0<\mathrm{Re}(z)<1$.

Maintenant on développe l'intégrale sur x à l'aide de la formule de Parseval, et donc l'intégrale originale est égale à

$$\sum_{n\neq 0} a_{\mathbf{c}}(n)\overline{b_{\mathbf{c}}}(n) \int_{\mathbf{R}^+} K_{s'-1/2}(2\pi|n|y)K_{s''-1/2}(2\pi|n|y)y^{s-1}dy$$

Un dernier changement de variable montre que ceci est

$$(2\pi)^{-s} R_{fg\mathbf{c}}(s) \int_{\mathbf{R}^+} K_{s'-1/2}(y)K_{s''-1/2}(y)y^{s-1}dy$$

et il ne reste plus (!) qu'à évaluer la dernière intégrale; en multipliant par $\Gamma(s)$ et en écrivant le tout comme une intégrale quadruple (via l'expression donnée en **I**-3.2 de K) avant de procéder à un changement de variable astucieux, on doit trouver

$$\int_{\mathbf{R}^+} K_\alpha(y)K_\beta(y)y^{s-1}dy=\frac{2^{s-3}}{\Gamma(s)} \prod \Gamma(\frac{s\pm\alpha\pm\beta}{2})$$

qui permet de conclure ♦

Ce théorème élémentaire accomplit tout le travail, compte tenu de la connaissance des séries d'Eisenstein acquise dans le premier paragraphe de cette partie.

Théorème 2

Les fonctions $R_{fg\mathbf{c}}$ admettent un prolongement méromorphe à tout le plan complexe.Dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2$, leurs seuls pôles sont parmi ceux de $E_{\mathbf{c}}$, donc ils sont simples et situés sur le segment [1/2,1]. En s=1 on a

$$\mathrm{Res}\ R_{fg\mathbf{c}}(s)=\frac{8}{\pi}\frac{\sin \pi s'}{\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathbf{H})} <f,g>$$

En particulier, $R_{fg\mathbf{c}}$ est holomorphe en 1 si et seulement f est orthogonale à g. De plus, le vecteur R_{fg} vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(s)\Theta_{\lambda\mu}(s)R_{fg}(s)=\Phi(s)\Theta_{\lambda\mu}(1-s)R_{fg}(1-s)$$

où φ est la matrice (fonction) de scattering pour $SL(2,\mathbf{Z})$ et Φ celle pour Γ.

Preuve

Le théorème implique immédiatement le caractère méromorphe de $R_{fg\mathbf{c}}$, et la localisation des pôles. L'équation fonctionnelle s'explique par celle du vecteur colonne E des séries d'Eisenstein $E(z,s)=\Phi(s)E(z,1-s)$, par la présence du facteur normalisateur $\zeta(2s)$ dans la définition de R, par l'équation fonctionnelle de la fonction ζ, et enfin par l'expression de φ, $\varphi(s)=\pi^{1/2}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}$, cf. **[Iwa]** §5. Quand au résidu en 1, il s'obtient par un calcul élémentaire et les relations $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$ et $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}$ ♦

Nous allons maintenant, dans le cas de $SL(2,\mathbf{Z})$, montrer comment ce théorème entraîne les estimations voulues. Soit donc $f\in S_\lambda(N,\chi)$, $\lambda=s'(1-s')$. Comme il n'y a qu'une pointe à l'infini, le vecteur R se réduit en $R(s)=\zeta(2s)\sum_{n\neq 0}|a(n)|^2|n|^{-s}$, et son équation fonctionnelle à

$$\Theta(s)R(s)=\Theta(1-s)R(1-s)$$
$$\Theta(s)=\pi^{-2s}\Gamma(\tfrac{s}{2})^2\Gamma(\tfrac{s+2s'-1}{2})\Gamma(\tfrac{s-2s'+1}{2})$$

Le deus ex-machina est fourni par un lemme tout à fait ad-hoc de Landau:

<u>Lemme</u>

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ n'ayant qu'un pôle simple en s=1 dans le demi-plan $Re(s)\geq 1/2$ avec résidu C, et qui pour $Re(s)>1$ admet l'expression $f(s)=\sum_{n\geq 1}a(n)n^{-s}$, avec $a(n)\geq 0$ pour tout n. Si f vérifie de plus une équation fonctionnelle de la forme

$$\Theta(s)R(s)=\Theta(1-s)R(1-s)$$
$$\Theta(s)=A^s\prod_{l}\Gamma(\alpha_l s+\beta_l)$$

avec $\alpha_l\leq 0$, alors on a pour tout $\varepsilon>0$ l'estimation $\sum_{n\leq x}a(n)=Cx+O(x^{\alpha+\varepsilon})$, pour $\alpha=\sum\alpha_l$.

Cependant, remarquons que le facteur $\zeta(2s)$ devant R empêche de faire simplement appel à ce lemme pour avoir (avec $C=24\zeta(2)\pi^{-2}\sin(\pi s')||f||^2=4\sin(\pi s')||f||^2$)

$$\sum_{n\leq x}|a(n)|^2 = Cx+O(x^{3/5+\varepsilon})$$

Mais on a $\zeta(2s)\sum_{n\neq 0}|a(n)|^2|n|^{-s}=\sum_{n\neq 0}a_1(n)|n|^{-s}$, avec $a_1=\zeta_2 * |a|^2$, $*$ désignant la convolution de Dirichlet (cf. **[H-W]**), et ζ_2 la fonction caractéristique des carrés. La fonction arithmétique a_1 vérifie bien les hypothèses du lemme, d'où l'estimation

$$\sum_{n\leq x} a_1(n) = Cx+O(x^{3/5+\varepsilon})$$

Mais pour la convolution de Dirichlet, ζ_2 est inversible car $\zeta_2(1)\neq 0$; soit μ_2 son inverse, et remarquons que $\sum_{n\geq 1}\mu_2(n)n^{-s}=1/\zeta(2s)$. Il vient aussitôt

$$\sum_{d}\mu_2(d) \sum_{n\leq x/d} a_1(n) = C \sum_{d}\mu_2(d)\frac{x}{d} + O(x^{3/5+\varepsilon} \sum_{d}\mu_2(d)d^{-3/5-\varepsilon})$$

Echangeant à gauche l'ordre de sommation il vient

$$\sum_{k\leq x} \sum_{nd=k} \mu_2(d)a_1(n) = \frac{C}{\zeta(2)} x + O(x^{3/5+\varepsilon})$$

$$\text{ie } \sum_{k\leq x} \mu_2 * a_1(k) = \frac{C}{\zeta(2)} x + O(x^{3/5+\varepsilon})$$

ce qui est exactement ce qu'on recherche, à savoir

$$\sum_{k\leq x} |a(k)|^2 = \frac{C}{\zeta(2)} x + O(x^{3/5+\varepsilon})$$

En effet, cette dernière inégalité implique trivialement $|a(n)|^2=O(x^{3/5+\varepsilon})$ qui donne le théorème.

Dans le cas de $\Gamma_0(N)$, on n'a pas de résultat aussi simple que le lemme de Landau, et il faut un peu plus de travail, cf. **[Iwa]** §15-4.

Pour conclure, il peut être utile de remarquer que si l'on recherche seulement la preuve du théorème de multiplicité un dans la théorie d'Atkin - Lehner, on peut aussi se contenter de montrer $a(n)=o(n^{1/2})$, ce qui découle du théorème 2 plus simplement en faisant appel au théorème taubérien d'Ikehara qui donne $\sum_{k\leq x} |a(k)|^2 = Cx+o(x)$.

Introduction aux représentations automorphes

Comme il n'est pas possible de prétendre présenter les faits importants de la théorie des représentations automorphes en quelque pages (cf. **[Gel1]**, **[Gel2]** pour deux tentatives méritoires), nous devrons dans cette partie supposer connues les définitions essentielles et en particulier la théorie de Hecke développée par Jacquet - Langlands (**[J-L]**, **[Gel2]** § 6). Nous tenterons quand même d'expliquer les motivations de ce nouveau point de vue dans un premier paragraphe, et rappelerons les définitions globales, avant d'examiner comment la théorie d'Atkin - Lehner s'y développe (**[Cas]**, **[Miy2]**).

1. Ebauche de motivations

Nous avons dans les premières parties développé la théorie des formes automorphes de Maaβ; nous avons vu comment il était possible de définir ces formes pour tout sous-groupe discret de $SL_{\pm}(2,\mathbf{R})$. Mais nous avons aussi mentionné que le cas des sous-groupes de congruence était (probablement) très différent du cas général, mettant ainsi en valeur la nature arithmétique des formes automorphes correspondantes. On peut se demander s'il existe un moyen de distinguer plus avant ce cas arithmétique.

Un autre défaut de l'étude de la première partie est qu'il y a deux théories: le versant holomorphe (que nous avons essentiellement passé sous silence), et le versant Maaβ. A part en matière de constructions explicites, il y a pratiquement identité entre ces deux théories (comme le montre l'adaptation quasi-instantanée de **[Miy1]** au cas Maaβ); il serait bon d'avoir un cadre permettant de traiter simultanément ces deux cas.

De même, on a vu dans la théorie d'Atkin - Lehner que les formes sur $\Gamma_0(N)$ pour des N différents possédaient des liens; il serait bon de disposer d'un espace contenant tout les $S_\lambda(N,\chi)$ de façon naturelle.

Enfin, une autre idée directrice, qui indique le chemin, est la volonté de comprendre la théorie de Hecke et en particulier la forme des séries L, ceci en référence à la thèse de Tate (**[C-F]**) qui interprétait les fonctions zéta classiques de corps de nombres dans ce sens.

D'une certaine façon, l'avant-dernière remarque peut expliquer aisément le recours aux méthodes adéliques, puisque (cf. **[GGPS]** p°352) on montre que la limite inductive des

$L^2(\Gamma(N)\backslash\mathbf{H})$ est isomorphe à l'espace $L^2(SL(2,\mathbf{Q})\backslash SL(2,\mathbf{A}))$ qui est essentiellement celui que l'on considère dans le cadre des représentations automorphes. Ce nouveau point de vue, dégagé par Jacquet - Langlands vers 1970, répond aux trois exigences ci-dessus; remarquons que l'idée de traiter les formes automorphes du point de vue de la théorie des représentations (de dimension infinie) de groupes est due à Gelfand et Fomin en 1952.

2. Représentations automorphes de GL(2,A)

Commençons par définir l'anneau des adèles de **Q**; pour cela rappelons qu'une valuation de **Q** est une application $|.| : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés fondamentales de la valeur absolue ordinaire, c'est à dire $|x|=0$ si et seulement si $x=0$, $|x+y|\leq|x|+|y|$, et $|xy|=|x||y|$. Il est bien connu (cf. **[C-F]**) que les valuations (aussi appelées places) de **Q** (convenablement normalisées) sont la valeur absolue ordinaire (notée $|.|$ ou bien $|.|_\infty$) et les valeurs absolues p-adiques, définies par $|x|_p=p^{-v_p(x)}$. Ces dernières valuations sont non-archimédiennes, ie $|x+y|\leq\mathrm{Max}(|x|,|y|)$. Chaque valuation munit **Q** d'une topologie, et on considère les complétés de **Q** pour ces valuations, que l'on notera respectivement **R** (ou $\mathbf{Q}_\infty$) et $\mathbf{Q}_p$; chacun de ces complétés est muni du prolongement unique de la valuation originale. On dit que les $\mathbf{Q}_v$ ($v=p$ ou ∞) sont des corps locaux, et que **Q** est un corps global. Pour p premier, on note $\mathbf{Z}_p=\{x\in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p\leq 1\}$; $|.|_p$ étant non-archimédienne, c'est un anneau, dont l'unique idéal maximal est $\mathbf{m}_p=\{x\in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p<1\}$. On dira qu'une propriété est vraie pour presque toute place si elle est vraie pour toutes sauf un nombre fini d'entre elles.

Définition

L'anneau **A** des adèles de **Q** est le sous-anneau de l'anneau produit des $\mathbf{Q}_v$ (v valuation de **Q**), formé par les (x_v) tels que $x_p\in \mathbf{Z}_p$ pour presque tout p premier; **A** est muni de la topologie produit. On note **A*** et on appelle groupe des idèles de **Q** le groupe des unités de **A**; pour $a\in \mathbf{A}^*$, on note $|a|=\prod|a_v|_v$, qui existe bien car $|a_v|_v=1$ pour presque tout v.

N.B. On peut se demander pourquoi ne pas considérer simplement l'anneau produit; une bonne raison est que ce dernier n'est pas localement compact, au contraire de **A** (cf. **[C-F]**). Cette propriété assure que **A** possède une mesure de Haar et permet donc de faire de l'analyse sans trop de difficultés. Remarquons que cette raison a priori excellente est historiquement absurde, les adèles (ou plus exactement les idèles) ayant été introduits par Chevalley pour éliminer l'analyse de la théorie du corps de classe.

On notera $G_\mathbf{A}$ le groupe (également localement compact) GL(2,**A**), et $G_\mathbf{Q}$ son sous-groupe GL(2,**Q**), injecté diagonalement ($\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}_v$ pour tout v); celui-ci est discret dans $G_\mathbf{A}$. $G_\mathbf{A}$ peut être décrit comme le sous-groupe du produit des $GL(2,\mathbf{Q}_v)$ formé des éléments (g_v) où $g_p\in K_p=GL(2,\mathbf{Z}_p)$ pour presque tout p. Les représentations automorphes GL(2,**Q**), qui sont la généralisation cherchée des formes automorphes, sont essentiellement les représentations de $G_{\mathbf{A}}$ qui apparaissent dans la représentation naturelle ρ de $G_{\mathbf{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}})$ (par translation à droite: $\rho(g)\phi(x)=\phi(xg)$).

Plus précisément, notons $K_\infty=O(2,\mathbf{R})$, de sorte que pour tout place v le sous-groupe K_v est un sous-groupe compact maximal de $G_v=GL(2,\mathbf{Q}_v)$. On dit qu'une représentation irréductible unitaire π de $G_{\mathbf{A}}$ sur un espace de Hilbert H est admissible si dans la restriction de π au sous-groupe compact $\prod_v K_v$, toute représentation irréductible σ de $\prod_v K_v$ n'apparaît qu'un nombre fini de fois. Cette notion d'admissibilité est essentiellement due à Langlands. Son intérêt est qu'une représentation admissible est factorisable, c'est à dire peut se décomposer en composantes locales: si π est admissible il existe pour toute place v une unique représentation π_v (qui est également admissible avec la définition ad-hoc) de G_v sur un espace de Hilbert H_v, tel que l'on puisse écrire

$$\pi = \otimes\, \pi_v$$

ce produit tensoriel étant en fait un produit tensoriel restreint, terme que nous ne définirons pas (cf. **[Gel2]** p°75, et **[J-L]** §9 pour la démonstration). Ce résultat est l'analogue de la relation $\psi=\prod_v \psi_v$ pour ψ caractère unitaire de $\mathbf{A}^*$. Bien sur, cette décomposition est d'autant plus utile que les représentations irréductibles admissibles des G_v sont bien connues, et cette théorie locale est le préliminaire indispensable à l'étude globale (cf. **[J-L]** §1 à 8).

Ainsi, toute représentation globale (ie de $G_{\mathbf{A}}$) admissible est un produit de représentations locales (ie de G_v). Comme déjà indiqué, on appelle représentation automorphe (pour $GL(2,\mathbf{Q})$) une représentation irréductible admissible π de $G_{\mathbf{A}}$ apparaissant dans la décomposition de la représentation régulière droite ρ de $G_{\mathbf{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}})$.

Une telle représentation étant irréductible, le lemme de Schur montre que les éléments du centre $Z_{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^*$ de $G_{\mathbf{A}}$ doivent agir comme des scalaires et donc on a $\pi(aI)f=\psi(a)f$, pour ψ caractère de $\mathbf{A}^*$ trivial sur $\mathbf{Q}^*$ (appelé caractère central de π). On note alors $L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$ l'espace des fonctions $f\in L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}})$ telles que $f(gz)=\psi(z)f(g)$ pour tout $z\in Z_{\mathbf{A}}$ et $\int_{Z_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}}} |f(g)|^2dg <\infty$; la représentation ρ agit sur $L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$.

On définit également un espace $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$ par une condition de parabolicité similaire à la condition classique de nullité du terme constant dans le développement de Fourier. Si π apparaît dans $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$, on dit que la représentation automorphe π est parabolique; un résultat de Jacquet - Langlands montre qu'alors π n'apparaît **que** dans $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$, et donc la définition est correcte.

Maintenant, on peut construire une théorie de Hecke pour les représentations automorphes dans l'esprit de celle de Tate (cf. **[Gel2]** §6, **[J-L]** §11). Celui-ci, en effet, attache une fonction L aux caractères de $\mathbf{A}^*=GL(1,\mathbf{A})$ triviaux sur $\mathbf{Q}^*$, c'est à dire exactement aux représentations irréductibles de $\mathbf{A}^*$ apparaissant dans la représentation naturelle de $\mathbf{A}^*$ dans $L^2(GL(1,\mathbf{A})/GL(1,\mathbf{Q}))$; l'analogie est flagrante.

Pour GL(2), on définit de même des fonctions $L(s,\pi_v)$ locales pour toute représentation admissible π_v de G_v (et toute place v; ces fonctions sont des fractions rationnelles en p^{-s} si v=p premier, et pour $v=\infty$ on trouve les fameux facteurs gamma classiques), et l'on établit des équations fonctionnelles locales, qui font intervenir un terme constant local $\varepsilon(\pi_v,s)$. Pour cela, une bonne connaissance des représentations admissibles locales est indispensable, de même que les résultats de Tate analogues pour GL(1).

Pour une représentation globale $\pi=\otimes\pi_v$, on pose ensuite naturellement $\varepsilon(\pi,s)=\prod\varepsilon(\pi_v,s)$, et $L(s,\pi)=\prod L(s,\pi_v)$. La généralisation de la théorie de Hecke par Jacquet - Langlands est que **dans le cas où la représentation $\pi=\otimes\pi_v$ est automorphe parabolique**, la fonction L globale s'étend en une fonction entière bornée sur toute bande verticale et vérifie une équation fonctionnelle (reliant $L(s,\pi)$ à $L(s,\psi^{-1}\otimes\pi)$). De plus, le théorème de Weil se généralise également naturellement par la simple observation que si χ est un caractère de $\mathbf{A}^*$ trivial sur $\mathbf{Q}^*$, $\pi\otimes\chi$ est encore une représentation admissible de $G_{\mathbf{A}}$ et l'énoncé devient simplement que si les $L(s,\pi\otimes\chi)$ sont entières (bornées...) et vérifient les bonnes équations fonctionnelles (globales), alors π est une représentation automorphe parabolique ie apparaît dans $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$.

Ce théorème a même alors un analogue local, qui dit qu'une représentation locale π_v de Gv est déterminée par ces facteurs locaux $\varepsilon(s,\pi_v\otimes\chi_v)$ et $L(s,\pi_v\otimes\chi_v)$ pour tout χ_v caractère de $\mathbf{Q}_v^*$ et leurs équations fonctionnelles,cf. la paragraphe suivant.

Nous allons expliquer davantage comment la théorie ci-dessus englobe la théorie classique (cf. **[Gel2]** §3). Soit f une forme parabolique de Maaβ, $f\in S_\lambda(N,\chi)$. On peut prolonger naturellement le caractère de Dirichlet χ en un caractère de $\mathbf{A}^*$ trivial sur $\mathbf{Q}^*$. Pour tout p premier, notons $K_p(N)$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans K_p avec $c\equiv 0$ (N) - en particulier, $K_p(N)=K_p$ si (N,p)=1 car alors N est inversible dans $\mathbf{Z}_p$ -, et $K_0(N)=\prod K_p(N)$; alors un théorème d'approximation permet d'affirmer que

$$G_{\mathbf{A}}=G_{\mathbf{Q}}GL^+(2,\mathbf{R})K_0(N)$$

et cela permet de définir une fonction ϕ sur $G_{\mathbf{A}}$ par $\phi(g)=f(g_\infty.i)\chi(k_0)$, si $g=\gamma g_\infty k_0$. Cette fonction est bien définie parce que $f\in S_\lambda(N,\chi)$ et parce que l'on a

$$G_{\mathbf{Q}}\cap GL^+(2,\mathbf{R})K_0(N)=\Gamma_0(N)$$

Comme $GL^+(2,\mathbf{R})$ agit transitivement sur le demi-plan de Poincaré, il est trivial que $\phi=0$ si et seulement si $f=0$. L'application qui à f associe ϕ permet donc d'identifier $S_\lambda(N,\chi)$ à un sous-espace des fonctions sur $G_{\mathbf{A}}$. Son image peut être identifiée: elle consiste en l'ensemble des fonctions ϕ telles que

(i) $\phi(\gamma g)=\phi(g)$ pour tout $\gamma\in G_{\mathbf{Q}}$
(ii) $\phi(gk_0)=\phi(g)\psi(k_0)$ pour tout $k_0\in K_0(N)$
(iii) $\phi\left(g\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=\phi(g)$ pour tout θ
(iv) $\phi(zg)=\psi(z)\phi(g)$ pour tout $z\in Z_{\mathbf{A}}$
(v) $\Delta\phi=\frac{1-s^2}{4}\phi$, où ϕ est considérée comme fonction de $GL^+(2,\mathbf{R})$ seul, et où Δ est l'opérateur de Casimir de $GL^+(2,\mathbf{R})$ (pratiquement le laplacien)
(vi) ϕ est à croissance modérée, c'est à dire que pour tout $C>0$ et tout Ω compact dans $G_{\mathbf{A}}$, il existe A tel que pour tout $g\in\Omega$ et $a\in\mathbf{A}^*$, tel que $|a|>c$, on a $\left|\phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\right|<<|a|^T$
(vii) ϕ est parabolique

Ceci ne doit pas paraître très étonnant, et se démontre sans trop de difficultés (cf. **[Del]**). Si l'on remplace le membre de droite de (iii) par $e^{-ik\theta}\phi(g)$ et celui de (v) par $-\frac{k}{2}(\frac{k}{2}-1)\phi$, l'espace que l'on trouve sera isomorphe à $S_k(N,\chi)$, et on voit comment on unit formes holomorphes et formes de Maaβ.

Les conditions d'invariance (i) à (iv) permettent d'affirmer que ϕ peut être considérée comme élément de $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$, et on obtient donc ainsi une injection de $S_\lambda(N,\chi)$ dans cet espace. Pour justifier pleinement la définition des représentations automorphes, il suffit de démontrer (ce qui n'est pas très difficile après une étude raisonnable des représentations admissibles des G_v et de $G_{\mathbf{A}}$, cf. **[Gel2]** p°93) que si $f\in S_\lambda(N,\chi)$ est une fonction propre de tout les $T(n)$, $(n,N)=1$, alors l'espace (invariant par ρ) engendré par ϕ dans $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$ est irréductible, c'est à dire détermine une représentation automorphe. Notons qu'à ce point, nous n'affirmons rien sur l'injectivité de cette association.

On peut également remarquer ici que les opérateurs T(n) peuvent également se définir au niveau de $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$ (**[Gel2]** §3-B): les T(p) par exemple correspondent simplement à la convolution par la fonction caractéristique de la double classe $K_p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}K_p$.

3. La théorie d'Atkin - Lehner

Nous serons ici aussi brefs et flous.

La théorie d'Atkin - Lehner a très vite après **[A-L]** été transcrite dans le langage des représentations automorphes; on peut citer **[Miy2]**, qui suit les arguments de **[A-L]**, **[Del]** et **[Cas]** qui utilisent davantage les représentations de groupes.

Dans son expression la plus compacte (**[Cas]**), on peut résumer cette nouvelle théorie par le seul théorème suivant:

Théorème (Casselman)
Soient $\pi=\otimes\pi_v$ et $\rho=\otimes\rho_v$ des représentations automorphes, telles que $\pi_v=\rho_v$ pour presque toute place v, et pour $v=\infty$. Alors on a $\pi_v=\rho_v$ pour tout v, et donc $\pi=\rho$.

Preuve (idée)
Tout d'abord, des théorèmes d'approximation (cf. celui utilisé pour définit ϕ au paragraphe précédent) permettent à partir de $\pi_v=\rho_v$ pour presque tout v et pour $v=\infty$ de conclure que π et ρ ont même caractère central $\psi=\prod\psi_v$.

Notons S l'ensemble fini des places exceptionnelles.

Pour toute place v, on va démontrer $\pi_v=\rho_v$ à l'aide du théorème de Weil local de Jacquet - Langlands: $\pi_v=\rho_v$ si et seulement si pour tout caractère χ_v de $\mathbf{Q}_v^*$, on a l'équation fonctionnelle

$$\frac{L(1-s,\chi_v^{-1}\otimes\tilde{\rho}_v)\varepsilon(s,\chi_v\otimes\rho_v)}{L(s;\chi_v\otimes\rho_v)} = \frac{L(1-s,\chi_v^{-1}\otimes\tilde{\pi}_v)\varepsilon(s,\chi_v\otimes\pi_v)}{L(s;\chi_v\otimes\pi_v)}$$

($\tilde{\rho}_v$ désigne la représentation contragrédiente de ρ_v, essentiellement la représentation agissant sur le dual de l'espace de ρ_v par la transposée de l'inverse; on montre que $\tilde{\rho}_v=\rho_v\otimes\psi_v^{-1}$).

Pour pouvoir appliquer ce critère **local**, on utilise l'équation fonctionnelle **globale** qui est à notre disposition puisque π et ρ sont des représentations automorphes: pour tout caractère χ de $\mathbf{A}^*$ trivial sur $\mathbf{Q}^*$, on a

$$L(s,\chi\otimes\rho)=\varepsilon(s,\chi\otimes\rho)L(1-s,\chi^{-1}\otimes\tilde{\rho})$$

$$L(s,\chi\otimes\pi)=\varepsilon(s,\chi\otimes\pi)L(1-s,\chi^{-1}\otimes\tilde{\pi})$$

où $\tilde{\rho}$ est la contragrédiente de ρ; on a aussi $\tilde{\rho}=\rho\otimes\psi^{-1}$.

On fait maintenant comme dans la preuve du théorème de multiplicité un dans la troisième partie, c'est à dire qu'on utilise l'expression des fonctions L (et facteurs constants ε) globales comme produit des fonctions L (resp. facteurs ε) locaux, on l'insère dans les équations globales qu'on divise entre elles, obtenant ainsi

$$\prod_{v\in S}\frac{L(1-s,\chi_v^{-1}\otimes\tilde{\rho}_v)\varepsilon(s,\chi_v\otimes\rho_v)}{L(s;\chi_v\otimes\rho_v)}=\prod_{v\in S}\frac{L(1-s,\chi_v^{-1}\otimes\tilde{\pi}_v)\varepsilon(s,\chi_v\otimes\pi_v)}{L(s;\chi_v\otimes\pi_v)}$$

Ensuite on a deux résultats magiques qui résultent de l'étude locale de **[J-L]**:

(i) si χ_v a un conducteur assez grand, alors $L(s,\chi_v\otimes\rho_v)=1$ et $\varepsilon(s,\chi_v\otimes\rho_v)=\varepsilon(s,\chi_v\psi_v)$ $\varepsilon(s,\chi_v)$, où les deux derniers ε sont les facteurs de la théorie GL(1) (ie de la thèse de Tate), et ceci vaut pour toute représentation ρ_v admissible de $\mathbf{Q}_v$ ayant ψ_v comme caractère central

(ii) v étant fixée, il existe un caractère global χ dont χ_v est la v-ème composante, et dont les composantes pour $w\in S$, $w\neq v$, possèdent un conducteur arbitrairement grand fixé à l'avant (c'est là le seul point où S fini semble intervenir)

Dés lors tout est clair: soit $v\in S$ fixée; pour tout caractère χ_v, en choisissant un caractère global par (ii) on peut faire en sorte, grâce à (i), que dans l'équation ci-dessus tout les facteurs **sauf celui pour v** soient égaux à 1. On obtient bien ainsi le critère de Weil local désiré, et donc le théorème est prouvé

♦

On voit que cette approche, qui donne un théorème de multiplicité un sensiblement équivalent à celui de la troisième partie, est conceptuellement très séduisante; on peut mesurer à cela l'intérêt de la généralisation des formes automorphes aux représentations automorphes. Mentionnons au passage un autre résultat de multiplicité un de **[J-L]**: toute représentation automorphe parabolique n'apparaît qu'une seule fois dans $L^2_0(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}},\psi)$; ceci est à comparer au lemme **III**-3-4.

Le lien exact entre la théorie classique de **[A-L]** et ce point de vue des représentations automorphes est expliqué dans **[Gel2]**, §5 (th. 5.19): l'application qui à une forme automorphe f associe la représentation automorphe parabolique associée, comme au paragraphe précédent, est injective quand elle est restreinte aux formes primitives au sens de **III**.

Quelques dernières remarques: la première concerne la fameuse isométrie oubliée σ; on ne l'a pas vu apparaître ici (ni dans **[Gel2]** ou **[J-L]**), alors que les représentations automorphes englobent les formes de Maaβ. Pourtant, on peut encore rajouter l'élément σ formellement à $G_{\mathbf{A}}$ avec les mêmes relations qu'en **I**-1, et faire agir σ sur $L^2(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}})$ par $\sigma.\phi(g)=\phi(\iota(g))$, ce qui correspond à T(-1) pour une f forme automorphe de Maaβ associée à ϕ.

La raison la plus évidente à cette disparition de σ est fournie en examinant la preuve du théorème 5.14 de **[Gel2]**, qui identifie une forme automorphe (plus exactement, la fonction ϕ associée) dans l'espace d'une représentation automorphe parabolique (pour prouver le théorème ci-dessus à l'aide de celui de la partie **III**); cette fonction est caractérisée à un scalaire près par la propriété

$$\phi(gr(\theta)k_0)=\tau(r(\theta))\psi(k_0)\phi(g)$$

pour tout $g\in G_{\mathbf{A}}$, $r(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $k_0\in K_0(N)$ - où N est déterminé préalablement -, et τ est la (on montre qu'il n'y en a qu'une) représentation de $O(2,\mathbf{R})$ contenue dans π_∞. Il se trouve que si la représentation automorphe correspond à une forme de Maaβ, on a $\tau=1$ (représentation triviale), et donc il s'ensuit que la fonction ϕ ainsi isolée est fonction propre de σ; ainsi, la forme automorphe de Maaβ correspondant à ϕ est fonction propre de T(-1), et est effectivement une forme primitive au sens de la définition de **III**.

L'étape naturelle suivante de cette analyse serait d'étudier localement l'action de σ et de tenter de déterminer en fonction des composantes locales de π la valeur propre pour σ. Un autre objectif serait de pouvoir interpréter effectivement σ comme un opérateur de Hecke, ce que nous avons été en mesure de faire dans le cas classique par le biais de l'introduction de $GL_{\pm}(2,\mathbf{R})$. Pour cela la solution immédiate est de considérer un $GL_{\pm}(2,\mathbf{A})$ et ses représentations irréductibles, d'établir une correspondance entre celles-ci et certaines représentations de $G_{\mathbf{A}}$, qui seraient alors naturellement des représentations 'paires' ou 'impaires'. Je dois confesser que je n'ai pas (encore ?) eu le temps de procéder à ces investigations assez naturelles. Et puis je ne peux m'empêcher de soulever une question: que se passe-t-il si dans le théorème de multiplicité un on remplace l'hypothèse 'pour presque toute place' par 'pour toute place dans un ensemble de densité (de Dirichlet: il s'agit de nombres premiers) un', ou autre hypothèse de ce style?

Références

[A-L] Atkin A.O. et Lehner J., "Hecke operators on $\Gamma_0(m)$", Mathematische Annalen **185**, 134-160

[Bum] Bump D., "The Rankin - Selberg method: a survey", dans "Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups", Academic Press 1989

[Cas] Casselman W., "On some results of Atkin and Lehner", Mathematische Annalen **201**, 301-314

[CdV] Colin de Verdière Y., "Pseudo-laplaciens II", Annales de l'Institut Fourier, **33**, 2, 87-113

[C-F] Cassels J.W.S et Fröhlich A. (éditeurs), "Algebraic Number Theory", Academic Press 1990

[Del] Deligne P., "Formes modulaires et représentations de GL(2)", dans "Modular functions of one variable II", Springer Lecture Notes 349, 1973

[Dir] Lejeune - Dirichlet, P. G., "Beweis des Satzes dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", Ab. der Köninglich Preussischen Akademie der Wissenschaften von **1837**, 45-81

[D-I] Deshouillers J.M. et Iwaniec H., "Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms", Inventionnes Mathematicae **70**, 219-288

[Gel1] Gelbart S., "An elementary introduction to Langlands' program", Bulletin (new series) of the American Mathematical Society , vol. **10** n°**2**, 177-219

[Gel2] Gelbart S., "Automorphic forms on adele groups", Princeton University Press, New-Jersey 1975

[GGPS] Gel'fand I.M., Graev M.I., Pyatetskii-Shapiro I.I.,"Representation theory and automorphic functions", Academic Press 1990

[Har] Hardy G.H., "Ramanujan", Chelsea N.Y., 1978

[H-W] Hardy G.H. et Wright E., "An introduction to the theory of numbers", 5ème édition, Oxford 1978

[I-R] Ireland K. et Rosen M., "A classical introduction to modern number theory", 2nde édition, Springer Verlag GTM 84, 1990

[Iwa] Iwaniec H., "Spectral theory of automorphic functions", cours à Rutgers University, 1987 (non publié)

[Iwa2] Iwaniec H., "Spectral theory of automorphic functions and recent developpements in analytic number theory", ICM Berkeley 1986 Proceedings, 444-456

[J-L] Jacquet H. et Langlands R.P., "Automorphic forms on GL(2)", Lecture Notes in Mathematics 114, Springer Verlag 1970

[Kob] Koblitz N., "Introduction to elliptic curves and modular forms", Springer Verlag GTM 97, 1984

[Kub] Kubota T., "Elementary theory of Eisenstein series", Halsted Press, 1973

[Lan] Lang S., "$SL_2(\mathbf{R})$", Springer Verlag GTM 105, 1986

[Leb] Lebedeev, "Special functions and their applications", Prentice Hall, 1965

[Maa] Maaβ H., "Über ein neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen", Mathematische Annalen **121**, 141-183

[Miy1] Miyake T., "Modular forms", Springer Verlag 1989

[Miy2] Miyake T., "On automorphic forms on GL(2) and Hecke operators", Annals of Mathematics **94**, 174-189

[Neu] Neukirch J., "Class field theory", Grundlehren der math. Wissenschaften 280, Springer Verlag

[Sar] Sarnak, "Some applications of modular forms", Cambridge University Press, 1990

[Ser] Serre J.P. "Cours d'arithmétique", P.U.F 1965

[Shi] Shimura G., "On modular forms of half integral weight", Annals of Mathematics, **73**, 440-481