SOMMES DE DEUX CARRÉS SUCCESSIFS QUI SONT DES CARRÉS

E. KOWALSKI

Il s'agit de montrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ tels que $n^2 + (n+1)^2$ soit un carré.*

S'ils sont ordonnés en une suite croissante

$$n_1 = 3,\ n_2 = 20,\ n_3 = 119,\ n_4 = 696,\ n_5 = 4059,\ n_6 = 23660,\ n_7 = 137903, \ldots,$$
$$n_k < n_{k+1}$$

on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 3 + 2\sqrt{2} = 5.8284271247461900976033774\,48\ldots$$

Lemma 2. *Les solutions entières (a, b, c), $a, b, c \geqslant 1$, de l'équation de Pythagore*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

telles que a et b soient premiers entre eux sont paramétrèes par

$$a = (x^2 - y^2), \quad b = 2xy, \quad c = (x^2 + y^2)$$

avec x, $y \geqslant 1$. Le couple (a, b) est normalisé de sorte que b soit pair et a impair.

La correspondance ainsi décrite est bijective si (x, y) vérifient $x > y$ et x et y sont premiers entre eux.

Démonstration. Dans toutes les bonnes crémeries... □

Comme n et $n+1$ sont premiers entre eux, la somme $n^2 + (n+1)^2$ est donc un carré si et seulement si il existe x, $y \geqslant 1$, $x > y$, tels que

$$n = 2xy, \quad n + 1 = x^2 - y^2$$

si n est pair et

$$n = x^2 - y^2, \quad n + 1 = 2xy$$

si n est impair.

Dans le premier cas on trouve

$$x^2 - y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow (x - y)^2 - 2y^2 = 1,$$

et dans le second on trouve

$$2xy - (x^2 - y^2) = 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2x^2 = 1.$$

Lemma 3. *Les solutions entières (p, q), $p, q \geqslant 1$, $(p, q) \neq (1, 0)$ de l'équation de Pell-Fermat*

$$p^2 - 2q^2 = 1$$

sont données exactement par

$$p + q\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k \tag{1}$$

avec $k \geqslant 1$ entier.

Démonstration. En notant que

$$(p + q\sqrt{2})(p - q\sqrt{2}) = p^2 - 2q^2$$

et que $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 2 \cdot 4 = 1$, il est clair que les entiers p, q définis par la relation (1) vérifient l'équation.

Pour la réciproque, on commence par montrer :

(2) si α, $\beta \in \mathbf{Z}$, si $\alpha^2 - 2\beta^2 = 1$ et $1 \leqslant \alpha + 2\beta\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$, alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Admettant cela, et supposant que $(p, q) \neq (1, 0)$ est une solution de

$$p^2 - 2q^2 = 1,$$

comme $p+q\sqrt{2} \geqslant \sqrt{2}$ il existe $k \geqslant 0$ entier tel que

$$(1+\sqrt{2})^k \leqslant p+q\sqrt{2} < (1+\sqrt{2})^{k+1}.$$

Alors le nombre

$$\gamma = (p+q\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{-k} = (-1)^k(p+q\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^k$$

est de la forme $\alpha+\beta\sqrt{2}$ avec α, β entiers relatifs, vérifie $\alpha^2-2\beta^2=1$, et

$$1 \leqslant \gamma < 1+\sqrt{2},$$

de sorte que $\gamma = 1$ d'après le fait admis ci-dessus. Cela donne

$$p+q\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^k.$$

Comme $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$, $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$, les solutions de

$$p^2-2q^2 = 1$$

correspondent aux valeurs paires de k.

Pour finir, démontrons (2). On a

$$\alpha^2-2\beta^2 = \pm 1,$$
$$1 \leqslant \alpha+\beta\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}.$$

Donc

$$|\alpha-\beta\sqrt{2}| = \frac{1}{|\alpha+\beta\sqrt{2}|} \leqslant 1.$$

En ajoutant $-1 \leqslant \alpha-\beta\sqrt{2} \leqslant 1$ et $1 \leqslant \alpha+\beta\sqrt{2} < 1+\sqrt{2}$, on trouve

$$0 \leqslant 2\alpha < 2+\sqrt{2} < 4.$$

Donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Le premier cas est impossible ($2\beta^2 = \pm 1$ n'a pas de solution), le second donne $\beta = 0$ qui convient ($1^2-2\beta^2 = 1$) ou bien $\beta = -1$ ($1^2-2\beta^2 = -1$), mais ce dernier cas ne vérifie pas l'inégalité $\alpha+\beta\sqrt{2} \geqslant 1$. □

Cela étant, revenant au problème initial, si n est pair on a donc

$$(x-y)+y\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^k,$$

et si n est impair on a

$$x+y+x\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^k.$$

Pour un k donné, cela nous donne réciproquement deux solutions n telles que $n^2+(n+1)^2$ soit un carré : posant

$$(3+2\sqrt{2})^k = p_k+q_k\sqrt{2},$$

on peut prendre

$$n' = 2q_k(p_k+q_k)$$

(pair) ou bien

$$n'' = q_k^2-(p_k-q_k)^2 = 2p_kq_k-p_k^2 = p_k(2q_k-p_k),$$

(impair ; il faut vérifier que p_k est toujours impair, ce qui vient de la récurrence $p_{k+1} = 3p_k+4q_k$, et du démarrage $p_1 = 3$).

Pour k fixé toujours, il est clair que $n' > n''$. De plus, en passant de k à $k+1$, on a $n''_{k+1} > n'_k$.

Donc le quotient de deux entiers successifs tels que $n^2+(n+1)^2$ soit un carré peut être, alternativement, un quotient n''_k/n'_k pour le même k ; ou un quotient n'_{k+1}/n''_k.

Lemma 4. *Les solutions (p_k, q_k) ci-dessus de $p_k^2-2q_k^2 = 1$ vérifient*

$$p_k \sim \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^k, \quad q_k \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^k$$

quand $k \to +\infty$.

Démonstration. On vérifie que

$$p_k = \frac{1}{2}\Big((3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k\Big)$$

et

$$q_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k\Big)$$

(similaires aux formules pour les parties réelles et imaginaires d'un complexe). Comme $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$, cela donne le résultat. $\square$

Le quotient dans le premier cas n''_k/n'_k est donc

$$\frac{2q_k(p_k+q_k)}{p_k(2q_k-p_k)} \sim \frac{(3+2\sqrt{2})^{2k}}{(3+2\sqrt{2})^{2k}} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)} \to \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 3+2\sqrt{2}.$$

Dans le second cas n''_{k+1}/n'_k, on a

$$\frac{p_{k+1}(2q_{k+1}-p_{k+1})}{2q_k(p_k+q_k)} \sim \frac{(3+2\sqrt{2})^{2k+2}}{(3+2\sqrt{2})^{2k}} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \to (3+2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})^{-1} = 3+2\sqrt{2}.$$

La limite étant la même pour les deux sous suites, la proposition est démontrée.
(En fait, on a même une paramétrisation des solutions...)