Ya.M. Barzdin et A.N. Kolmogorov
Les graphes, un autre univers en expansion

E. Kowalski

École Polytechnique Fédérale de Zürich

Bibliothèque Nationale de France
«Un texte, un mathématicien»
20 Février 2019

Plan

1. Kolmogorov
2. L'article de Barzdin et Kolmogorov
3. Graphes
4. Navigation et robustesse
5. Graphes expanseurs, graphes magiques
6. Applications des expanseurs

Andreĭ Nikolaevich Kolmogorov

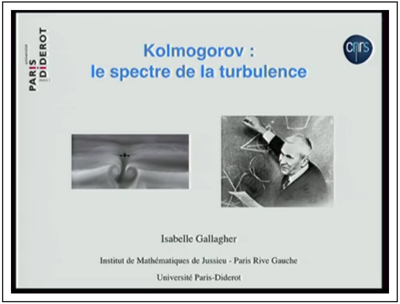
A.N. Kolmogorov en 1964

Kolmogorov

- Né en 1903, mort en 1987.

Kolmogorov

- Né en 1903, mort en 1987.
- Voir l'exposé d'Isabelle Gallagher, «Kolmogorov : le spectre de la turbulence», en 2015, `https://vimeo.com/125125807`



Kolmogorov

- Né en 1903, mort en 1987.
- Voir l’exposé d’Isabelle Gallagher, «Kolmogorov : le spectre de la turbulence», en 2015, `https://vimeo.com/125125807`
- Mathématicien presque universel.

Kolmogorov comme professeur

Souvenirs de V.I. Arnold :

> *Andreĭ Nikolaevich considérait toujours que la personne avec laquelle il parlait était son égal intellectuellement (...) C'est probablement la raison pour laquelle ses merveilleux exposés étaient tellement incompréhensibles pour la plupart des étudiants.*

La complexité de Kolmogorov, illustrée

Kolmogorov directions

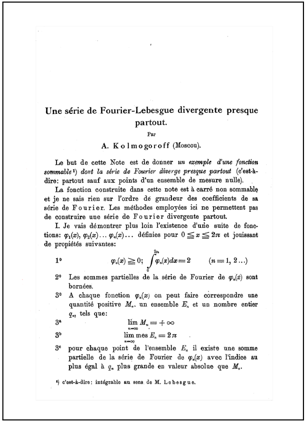
`https://xkcd.com/1155/`

«Comment est-ce que je viens chez toi depuis Lexington ?» «Hum... À partir de ton garage, tourne à gauche sauf si cela t'amène dans une avenue numérotée par un nombre premier ou une rue portant le nom d'un président.»

Quand on me demande des indications pas à pas, j'ai peur qu'il y ait trop d'étapes dont il faille se souvenir, alors j'essaye de les présenter de la manière la plus concise possible.

Quelques travaux de Kolmogorov

- «Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout», Fundamenta Mathematica 4 (1923).



Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Le but de cette Note est de donner *un exemple d'une fonction sommable*[1]) *dont la série de Fourier diverge presque partout* (c'est-à-dire: partout sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle).

La fonction construite dans cette note est à carré non sommable et je ne sais rien sur l'ordre de grandeur des coefficients de sa série de Fourier. Les méthodes employées ici ne permettent pas de construire une série de Fourier divergente partout.

I. Je vais démontrer plus loin l'existence d'une suite de fonctions: $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ définies pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$ et jouissant de propiétés suivantes:

1° $$\varphi_n(x) \geqq 0; \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2 \qquad (n = 1, 2 \dots)$$

2° Les sommes partielles de la série de Fourier de $\varphi_n(x)$ sont bornées.

3° A chaque fonction $\varphi_n(x)$ on peut faire correspondre une quantité positive M_n. un ensemble E_n et un nombre entier q_n, tels que:

3ᵃ $$\lim_{n=\infty} M_n = +\infty$$

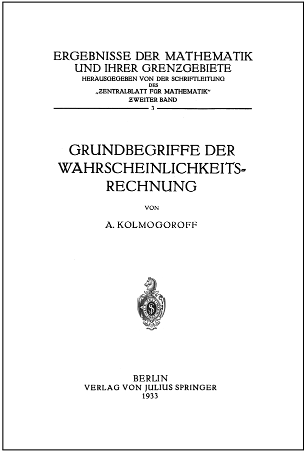
3ᵇ $$\lim_{n=\infty} \text{mes } E_n = 2\pi$$

3ᶜ pour chaque point de l'ensemble E_n il existe une somme partielle de la série de Fourier de $\varphi_n(x)$ avec l'indice au plus égal à q_n plus grande en valeur absolue que M_n.

[1]) c'est-à-dire: intégrable au sens de M. Lebesgue.

Quelques travaux de Kolmogorov

- «Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout», Fundamenta Mathematica 4 (1923).
- «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung», Springer-Verlag (1933).


ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

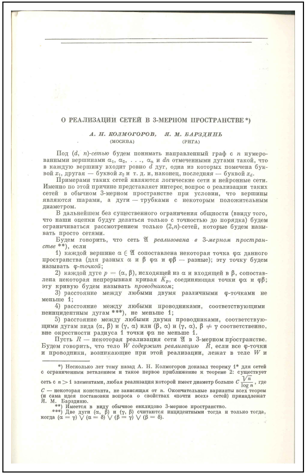
VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Quelques travaux de Kolmogorov

- «Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout», Fundamenta Mathematica 4 (1923).
- «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung», Springer-Verlag (1933).
- «О реализации сетей 3-мерном пространстве», Проблемы кибернетики 19 (1967) (avec Ya. M. Barzdin).



О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В 3-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

А. Н. КОЛМОГОРОВ, (МОСКВА) *Я. М. БАРЗДИНЬ* (РИГА)

Под (d, n)-*сетью* будем понимать направленный граф с n нумерованными вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и dn отмеченными дугами такой, что в каждую вершину входит ровно d дуг, одна из которых помечена буквой x_1, другая — буквой x_2 и т. д. и, наконец, последняя — буквой x_d.

Примерами таких сетей являются логические сети и нейронные сети. Именно по этой причине представляет интерес вопрос о реализации таких сетей в обычном 3-мерном пространстве при условии, что вершины являются шарами, а дуги — трубками с некоторым положительным диаметром.

В дальнейшем без существенного ограничения общности (ввиду того, что наши оценки будут делаться только с точностью до порядка) будем ограничиваться рассмотрением только $(2,n)$-сетей, которые будем называть просто сетями.

Будем говорить, что сеть $\mathfrak{A}$ *реализована в 3-мерном пространстве* **), если

1) каждой вершине $\alpha \in \mathfrak{A}$ сопоставлена некоторая точка $\varphi\alpha$ данного пространства (для разных α и β $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$ — разные); эту точку будем называть φ-*точкой*;

2) каждой дуге $p = (\alpha, \beta)$, исходящей из α и входящей в β, сопоставлена некоторая непрерывная кривая K_p, соединяющая точки $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$; эту кривую будем называть *проводником*;

3) расстояние между любыми двумя различными φ-точками не меньше 1;

4) расстояние между любыми проводниками, соответствующими неинцидентным дугам ***), не меньше 1;

5) расстояние между любыми двумя проводниками, соответствующими дугам вида (α, β) и (γ, α) или (β, α) и (γ, α), $\beta \neq \gamma$ соответственно, вне окрестности радиуса 1 точки $\varphi\alpha$ не меньше 1.

Пусть R — некоторая реализация сети $\mathfrak{A}$ в 3-мерном пространстве. Будем говорить, что тело W *содержит реализацию* R, если все φ-точки и проводники, возникающие при этой реализации, лежат в теле W и

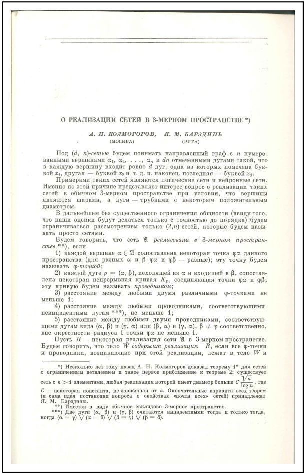
) Несколько лет тому назад А. Н. Колмогоров доказал теорему 1 для сетей с ограниченным ветвлением и такое первое приближение к теореме 2: существует сеть с $n > 1$ элементами, любая реализация которой имеет диаметр больше $C\frac{\sqrt{n}}{\log n}$, где C — некоторая константа, не зависящая от n. Окончательные варианты всех теорем (и сама идея постановки вопроса о свойствах «почти всех» сетей) принадлежат Я. М. Барздиню.

**) Имеется в виду обычное евклидово 3-мерное пространство.

***) Две дуги (α, β) и (γ, β) считаются инцидентными тогда и только тогда, когда $(\alpha = \gamma) \vee (\alpha = \delta) \vee (\beta = \gamma) \vee (\beta = \delta)$.

Quelques travaux de Kolmogorov

- «Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout», Fundamenta Mathematica 4 (1923).
- «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung», Springer-Verlag (1933).
- «О реализации сетей 3-мерном пространстве», Проблемы кибернетики 19 (1967) (avec Ya. M. Barzdin).
- ... et beaucoup d'autres (y compris des articles en anglais et en italien, des articles de poétique, etc).



О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В 3-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

А. Н. КОЛМОГОРОВ, (МОСКВА) *Я. М. БАРЗДИНЬ* (РИГА)

Под (d, n)-*сетью* будем понимать направленный граф с n нумерованными вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и dn отмеченными дугами такой, что в каждую вершину входит ровно d дуг, одна из которых помечена буквой x_1, другая — буквой x_2 и т. д. и, наконец, последняя — буквой x_d.

Примерами таких сетей являются логические сети и нейронные сети. Именно по этой причине представляет интерес вопрос о реализации таких сетей в обычном 3-мерном пространстве при условии, что вершины являются шарами, а дуги — трубками с некоторым положительным диаметром.

В дальнейшем без существенного ограничения общности (ввиду того, что наши оценки будут делаться только с точностью до порядка) будем ограничиваться рассмотрением только $(2,n)$-сетей, которые будем называть просто сетями.

Будем говорить, что сеть $\mathfrak{A}$ *реализована в 3-мерном пространстве* **), если

1) каждой вершине $\alpha \in \mathfrak{A}$ сопоставлена некоторая точка $\varphi\alpha$ данного пространства (для разных α и β $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$ — разные); эту точку будем называть φ-*точкой*;

2) каждой дуге $p = (\alpha, \beta)$, исходящей из α и входящей в β, сопоставлена некоторая непрерывная кривая K_p, соединяющая точки $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$; эту кривую будем называть *проводником*;

3) расстояние между любыми двумя различными φ-точками не меньше 1;

4) расстояние между любыми проводниками, соответствующими неинцидентным дугам ***), не меньше 1;

5) расстояние между любыми двумя проводниками, соответствующими дугам вида (α, β) и (γ, α) или (β, α) и (γ, α), $\beta \neq \gamma$ соответственно, вне окрестности радиуса 1 точки $\varphi\alpha$ не меньше 1.

Пусть R — некоторая реализация сети $\mathfrak{A}$ в 3-мерном пространстве. Будем говорить, что тело W *содержит реализацию* R, если все φ-точки и проводники, возникающие при этой реализации, лежат в теле W и

) Несколько лет тому назад А. Н. Колмогоров доказал теорему 1 для сетей с ограниченным ветвлением и такое первое приближение к теореме 2: существует сеть с $n > 1$ элементами, любая реализация которой имеет диаметр больше $C\frac{\sqrt{n}}{\log n}$, где C — некоторая константа, не зависящая от n. Окончательные варианты всех теорем (и сама идея постановки вопроса о свойствах «почти всех» сетей) принадлежат Я. М. Барздиню.

**) Имеется в виду обычное евклидово 3-мерное пространство.

***) Две дуги (α, β) и (γ, β) считаются инцидентными тогда и только тогда, когда $(\alpha = \gamma) \vee (\alpha = \delta) \vee (\beta = \gamma) \vee (\beta = \delta)$.

«Réalisation de réseaux dans l'espace à 3 dimensions»

О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В 3-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

А. Н. КОЛМОГОРОВ, *Я. М. БАРЗДИНЬ*
(МОСКВА) (РИГА)

Под (d, n)-*сетью* будем понимать направленный граф с n нумерованными вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и dn отмеченными дугами такой, что в каждую вершину входит ровно d дуг, одна из которых помечена буквой x_1, другая — буквой x_2 и т. д. и, наконец, последняя — буквой x_d.

Примерами таких сетей являются логические сети и нейронные сети. Именно по этой причине представляет интерес вопрос о реализации таких сетей в обычном 3-мерном пространстве при условии, что вершины являются шарами, а дуги — трубками с некоторым положительным диаметром.

В дальнейшем без существенного ограничения общности (ввиду того, что наши оценки будут делаться только с точностью до порядка) будем ограничиваться рассмотрением только $(2,n)$-сетей, которые будем называть просто сетями.

Будем говорить, что сеть $\mathfrak{A}$ *реализована в 3-мерном пространстве* **), если

1) каждой вершине $\alpha \in \mathfrak{A}$ сопоставлена некоторая точка $\varphi\alpha$ данного пространства (для разных α и β $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$ — разные); эту точку будем называть φ-*точкой*;

2) каждой дуге $p = (\alpha, \beta)$, исходящей из α и входящей в β, сопоставлена некоторая непрерывная кривая K_p, соединяющая точки $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$; эту кривую будем называть *проводником*;

3) расстояние между любыми двумя различными φ-точками не меньше 1;

4) расстояние между любыми проводниками, соответствующими неинцидентным дугам ***), не меньше 1;

5) расстояние между любыми двумя проводниками, соответствующими дугам вида (α, β) и (γ, α) или (β, α) и (γ, α), $\beta \neq \gamma$ соответственно, вне окрестности радиуса 1 точки $\varphi\alpha$ не меньше 1.

Пусть R — некоторая реализация сети $\mathfrak{A}$ в 3-мерном пространстве. Будем говорить, что тело W *содержит реализацию* R, если все φ-точки и проводники, возникающие при этой реализации, лежат в теле W и

) Несколько лет тому назад А. Н. Колмогоров доказал теорему 1 для сетей с ограниченным ветвлением и такое первое приближение к теореме 2: существует сеть с $n > 1$ элементами, любая реализация которой имеет диаметр больше $C\frac{\sqrt{n}}{\log n}$, где C — некоторая константа, не зависящая от n. Окончательные варианты всех теорем (и сама идея постановки вопроса о свойствах «почти всех» сетей) принадлежат Я. М. Барздиню.

**) Имеется в виду обычное евклидово 3-мерное пространство.

***) Две дуги (α, β) и (γ, β) считаются инцидентными тогда и только тогда, когда $(\alpha = \gamma) \vee (\alpha = \delta) \vee (\beta = \gamma) \vee (\beta = \delta)$.

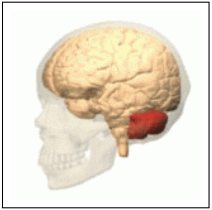
Le début de l'article de Barzdin et Kolmogorov

La question de Kolmogorov

Barzdin :

> *Je ne me rappelle pas en quelle occasion Andreĭ Nikolaevich avait mentionné ces résultats pour la première fois (je n'étais pas présent à cette occasion). Je sais seulement que le sujet qui était discuté était d'expliquer le fait que le cerveau (par exemple celui d'un être humain) est construit de manière que sa plus grande partie est occupée par des fibres nerveuses (axons) tandis que les neurones sont seulement placés à la surface....*

(D'après Azevedo *et al.* (2009), le cerveau humain comporte environ 85 milliards de neurones, dont environ 80 % sont situés dans le cervelet, et chacun peut être connecté à des milliers d'autres.)



La question de Kolmogorov

Barzdin :

> *Je ne me rappelle pas en quelle occasion Andreĭ Nikolaevich avait mentionné ces résultats pour la première fois (je n'étais pas présent à cette occasion). Je sais seulement que le sujet qui était discuté était d'expliquer le fait que le cerveau (par exemple celui d'un être humain) est construit de manière que sa plus grande partie est occupée par des fibres nerveuses (axons) tandis que les neurones sont seulement placés à la surface....*

Souvenir de V.I. Arnold :

> *Le dernier travail mathématique dont Kolmogorov m'a parlé (probablement en 1964) avait une origine «biologique». It s'agissait du plus petit cube assez grand pour contenir un «cerveau» ou «ordinateur» de N éléments («neurones») (...) Bien entendu, Kolmogorov savait parfaitement que ses théorèmes n'avait pas grand chose à voir avec la structure d'un cerveau biologique.*

La question de Kolmogorov

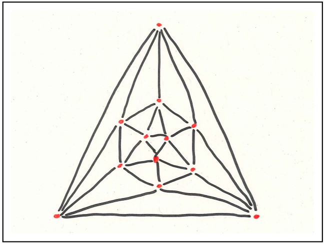
Quelle est la manière la plus efficace (utilisant le plus petit volume possible) pour réaliser «physiquement» dans l'espace un graphe où chaque sommet est relié au plus à 6 autres, si l'on représente les sommets par des billes (de rayon fixé, 1cm, par exemple), et les arêtes par des tubes flexibles (du même rayon).

La question de Kolmogorov

Quelle est la manière la plus efficace (utilisant le plus petit volume possible) pour réaliser «physiquement» dans l'espace un graphe où chaque sommet est relié au plus à 6 autres, si l'on représente les sommets par des billes (de rayon fixé, 1cm, par exemple), et les arêtes par des tubes flexibles (du même rayon).

Autrement dit :

Aller de là...

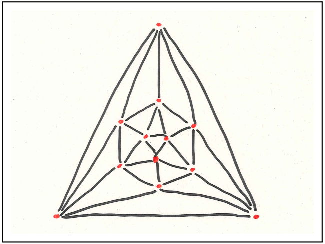


La question de Kolmogorov

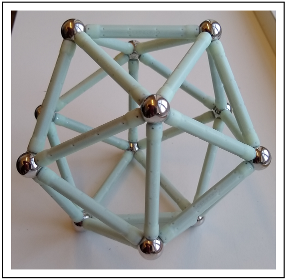
Quelle est la manière la plus efficace (utilisant le plus petit volume possible) pour réaliser «physiquement» dans l'espace un graphe où chaque sommet est relié au plus à 6 autres, si l'on représente les sommets par des billes (de rayon fixé, 1cm, par exemple), et les arêtes par des tubes flexibles (du même rayon).

Autrement dit :

Aller de là...



... à là...



Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

Disons qu'on a N sommets (par exemple, pour se fixer les idées, qu'on a 10000 sommets).

Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

Disons qu'on a N sommets (par exemple, pour se fixer les idées, qu'on a 10000 sommets).

- Il est possible de réaliser le graphe dans une sphère de rayon $\sqrt{N}$ cm environ (par exemple, pour 10000 sommets, dans une sphère de un mètre de rayon).

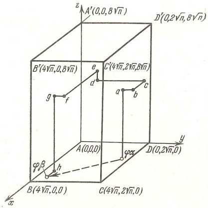


Рис. 1.

Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

Disons qu'on a N sommets (par exemple, pour se fixer les idées, qu'on a 10000 sommets).

- Il est possible de réaliser le graphe dans une sphère de rayon $\sqrt{N}$ cm environ (par exemple, pour 10000 sommets, dans une sphère de un mètre de rayon).
- Si le graphe est «très connecté», il n'est *pas* possible de le faire dans une sphère de rayon (beaucoup) plus petit que $\sqrt{N}$ cm.

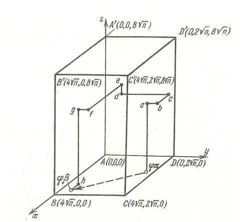


Рис. 1.

Les résultats de Barzdin et Kolmogorov

Disons qu'on a N sommets (par exemple, pour se fixer les idées, qu'on a 10000 sommets).

- Il est possible de réaliser le graphe dans une sphère de rayon $\sqrt{N}$ cm environ (par exemple, pour 10000 sommets, dans une sphère de un mètre de rayon).
- Si le graphe est «très connecté», il n'est *pas* possible de le faire dans une sphère de rayon (beaucoup) plus petit que $\sqrt{N}$ cm.
- Et si on prend un graphe «au hasard», il sera «très connecté».

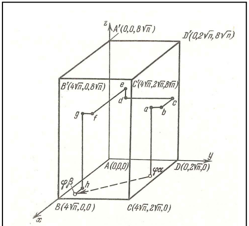
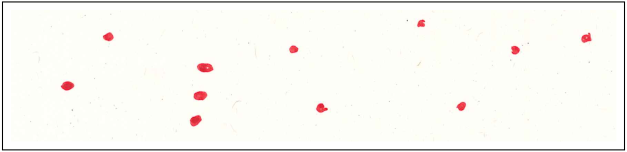


Рис. 1.

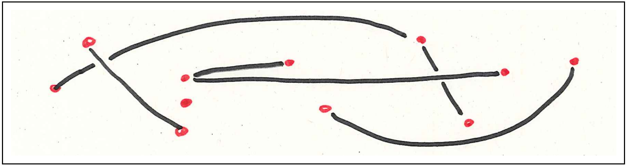
Qu'est-ce qu'un graphe ?

- Des sommets (qui peuvent être ce qu'on veut) ;



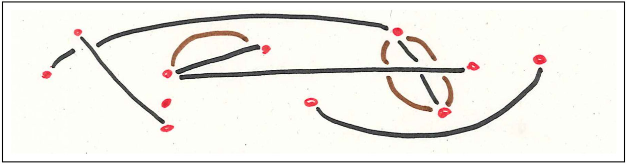
Qu'est-ce qu'un graphe ?

- Des sommets (qui peuvent être ce qu'on veut) ;
- Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;



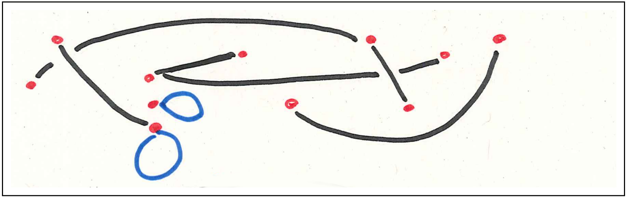
Qu'est-ce qu'un graphe ?

- Des sommets (qui peuvent être ce qu'on veut) ;
- Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- Parfois avec des arêtes multiples ;



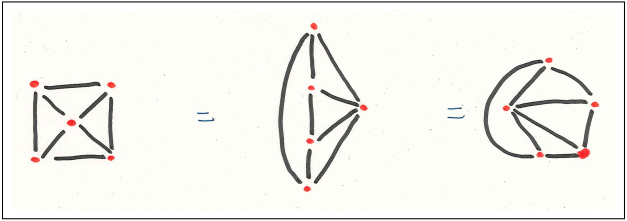
Qu'est-ce qu'un graphe ?

- Des sommets (qui peuvent être ce qu'on veut) ;
- Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- Parfois avec des arêtes multiples ;
- Parfois avec des boucles.



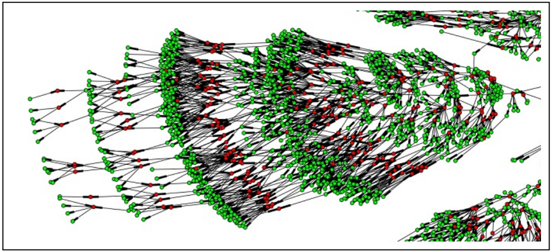
Qu'est-ce qu'un graphe ?

- Des sommets (qui peuvent être ce qu'on veut) ;
- Et des arêtes qui joignent certaines paires de sommets ;
- Parfois avec des arêtes multiples ;
- Parfois avec des boucles.
- La seule chose qui compte pour une arête, ce sont ses extrémités !



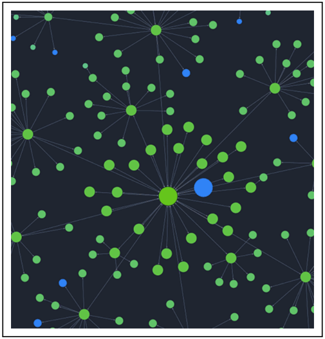
Exemples de graphes

- Un arbre généalogique.



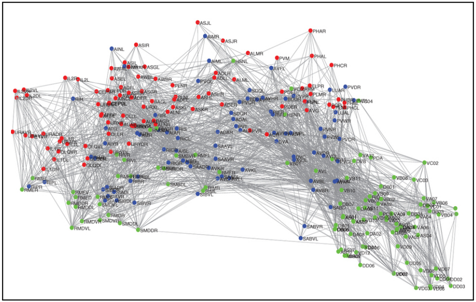
Exemples de graphes

- Un arbre généalogique.
- Les pages d'un site internet et les liens qui les relient.



Exemples de graphes

- Un arbre généalogique.
- Les pages d'un site internet et les liens qui les relient.
- Le système nerveux de *Caenorhabditis Elegans* (`http://openworm.org/`).

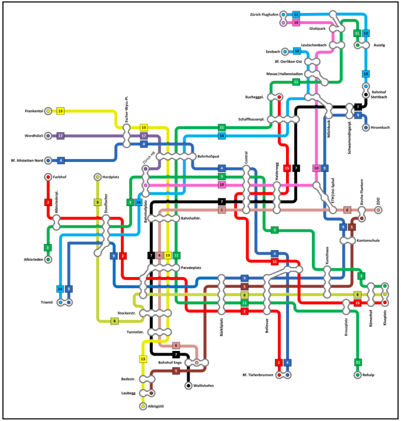


White, Southgate, Thomson, Brenner (1986),

corrigé et représenté par Varshney, Chen, Paniagua, Hall, Chklovskii (2011)

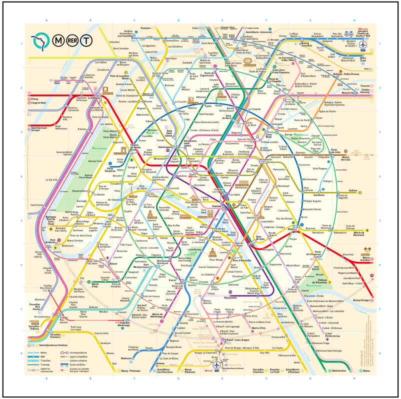
Exemples de graphes

- Le réseau de tramway de Zürich.



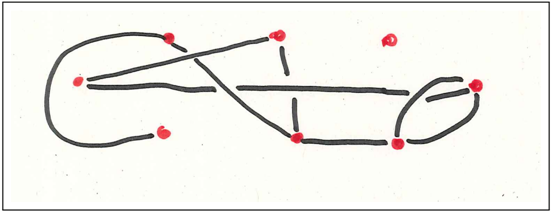
Exemples de graphes

- Le réseau de tramway de Zürich.
- Le métro de Paris.



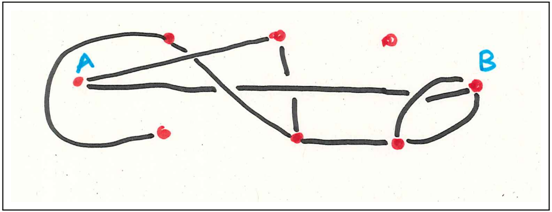
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.



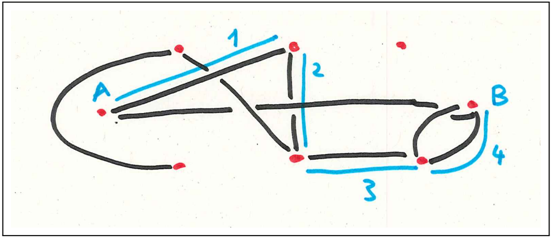
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.



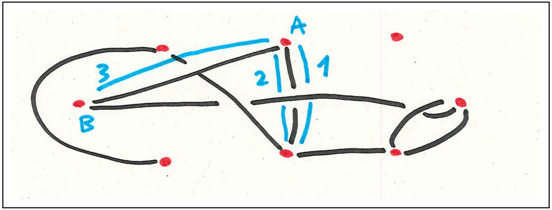
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.
- Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues.



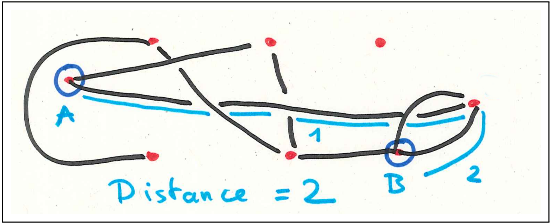
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.
- Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. On peut revenir en arrière.



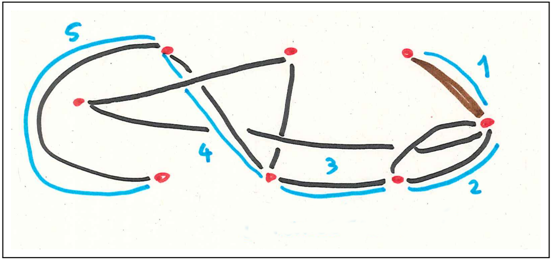
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.
- Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. On peut revenir en arrière.
- La *distance* entre deux sommets est la longueur du plus petit chemin qui les relie, s'il en existe.



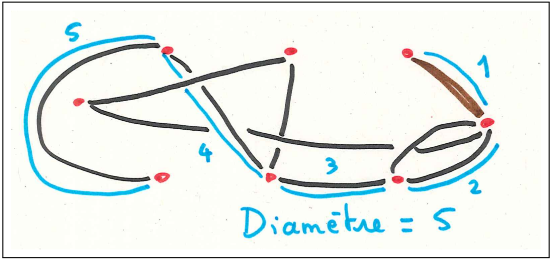
Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.
- Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. On peut revenir en arrière.
- La *distance* entre deux sommets est la longueur du plus petit chemin qui les relie, s'il en existe.
- Le graphe est *en un seul morceau* s'il existe *au moins* un chemin entre n'importe quelle paire de sommets.



Navigation

- On veut utiliser les arêtes pour aller d'un sommet A à un sommet B.
- Un *chemin* est une suite d'arêtes successives, et sa *longueur* est le nombre d'arêtes parcourues. On peut revenir en arrière.
- La *distance* entre deux sommets est la longueur du plus petit chemin qui les relie, s'il en existe.
- Le graphe est *en un seul morceau* s'il existe *au moins* un chemin entre n'importe quelle paire de sommets.
- Le *diamètre* est la plus grande distance entre deux sommets.

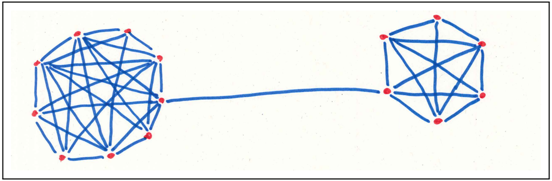


Navigation efficace

- Bien sûr, on veut un petit diamètre pour avoir un réseau de communication efficace.

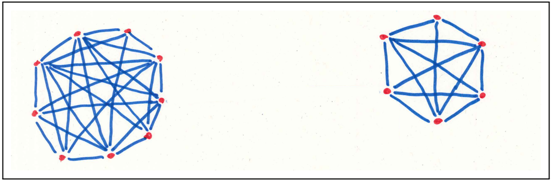
Navigation efficace

- Bien sûr, on veut un petit diamètre pour avoir un réseau de communication efficace.
- Mais cela ne suffit pas forcément, s'il y a un goulot d'étranglement....



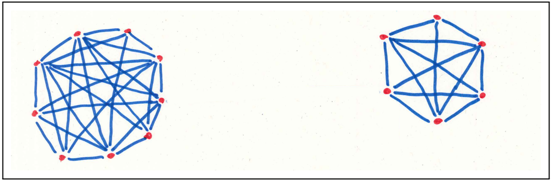
Navigation efficace

- Bien sûr, on veut un petit diamètre pour avoir un réseau de communication efficace.
- Mais cela ne suffit pas forcément, s'il y a un goulot d'étranglement....
- ... où un accident suffit à couper le réseau en deux.



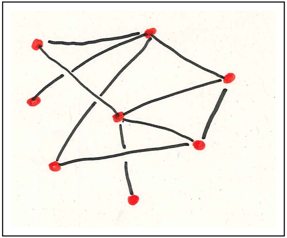
Navigation efficace

- Bien sûr, on veut un petit diamètre pour avoir un réseau de communication efficace.
- Mais cela ne suffit pas forcément, s'il y a un goulot d'étranglement....
- ... où un accident suffit à couper le réseau en deux.
- Ce sont les graphes «robustes», qui n'ont pas de tel problème, qui apparaissent dans l'article de Barzdin et Kolmogorov.



Le nombre de Cheeger

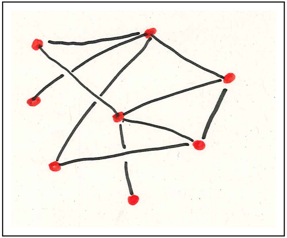
Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

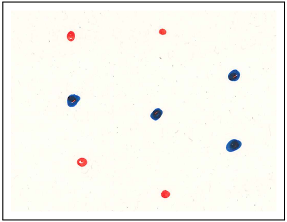


Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.

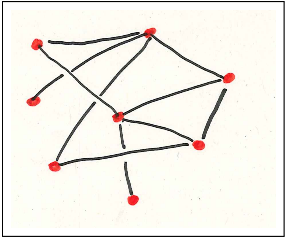


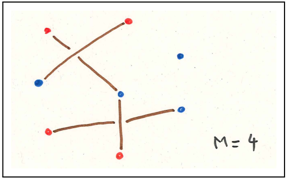


Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.

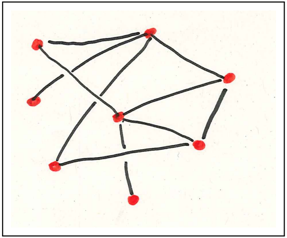


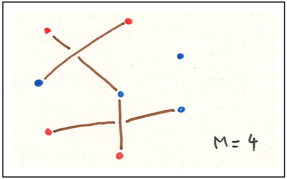


Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.
- On calcule le quotient $\frac{M}{N}$.



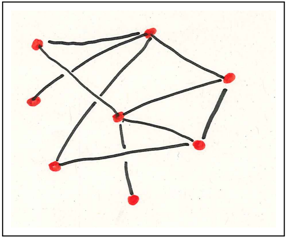


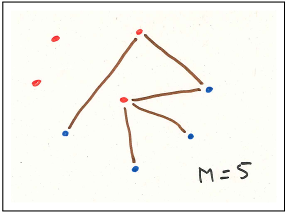
$M/N = 1/2$

Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.
- On calcule le quotient $\frac{M}{N}$.
- On répète pour tout les coloriages possibles d'une moitié des sommets.



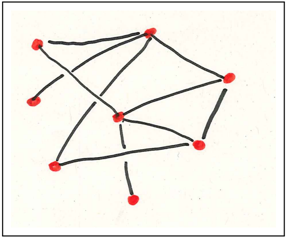


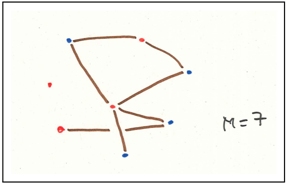
$M/N = 5/8$

Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.
- On calcule le quotient $\frac{M}{N}$.
- On répète pour tout les coloriages possibles d'une moitié des sommets.



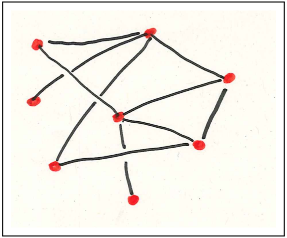


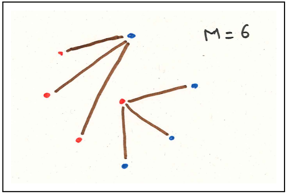
$M/N = 7/8$

Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.
- On calcule le quotient $\frac{M}{N}$.
- On répète pour tout les coloriages possibles d'une moitié des sommets.



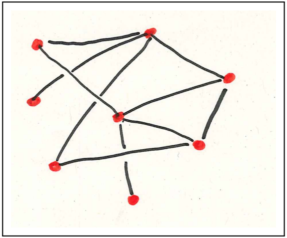


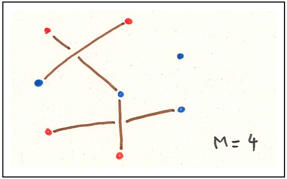
$M/N = 3/4$

Le nombre de Cheeger

Disons que le graphe à N sommets (par exemple, 10000 sommets).

- On colorie en rouge une moitié des sommets (n'importe quelle moitié !), les autres en bleu.
- On compte le nombre d'arêtes qui relient un sommet bleu à un sommet rouge ; disons qu'on en trouve M.
- On calcule le quotient $\frac{M}{N}$.
- On répète pour tout les coloriages possibles d'une moitié des sommets.
- Le *plus petit* des quotients M/N est le *nombre de Cheeger* du graphe.





$M/N = 1/2$

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.
- Donc il faut enlever toutes les arêtes qui ont une extrémité de chaque couleur.

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.
- Donc il faut enlever toutes les arêtes qui ont une extrémité de chaque couleur.
- Leur nombre est M ; le quotient $M/10000$ est au moins le nombre de Cheeger, qui est 1/2, donc M est au moins 5000.

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.
- Donc il faut enlever toutes les arêtes qui ont une extrémité de chaque couleur.
- Leur nombre est M ; le quotient $M/10000$ est au moins le nombre de Cheeger, qui est $1/2$, donc M est au moins 5000.

On dit qu'un graphe est «1/2-expanseur» si son nombre de Cheeger est au moins 1/2,

Interprétation

Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.
- Donc il faut enlever toutes les arêtes qui ont une extrémité de chaque couleur.
- Leur nombre est M ; le quotient $M/10000$ est au moins le nombre de Cheeger, qui est 1/2, donc M est au moins 5000.

On dit qu'un graphe est «1/2-expanseur» si son nombre de Cheeger est au moins 1/2, si son nombre de sommet peut être arbitrairement grand,

Interprétation

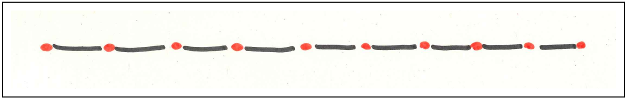
Supposons qu'on a 10000 sommets, 30000 arêtes, et que le nombre de Cheeger est 1/2. Le graphe est alors très robuste :

- Peignons la moitié des sommets en rouge, l'autre en bleu.
- On veut éliminer toute communication entre les sommets rouges et les sommets bleus.
- Donc il faut enlever toutes les arêtes qui ont une extrémité de chaque couleur.
- Leur nombre est M ; le quotient $M/10000$ est au moins le nombre de Cheeger, qui est 1/2, donc M est au moins 5000.

On dit qu'un graphe est «1/2-expanseur» si son nombre de Cheeger est au moins 1/2, si son nombre de sommet peut être arbitrairement grand, et si chaque sommet a moins que 6 voisins.

Exemples

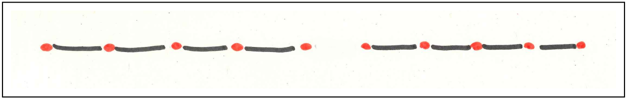
- Un chemin linéaire



N sommets, diamètre $N - 1$

Exemples

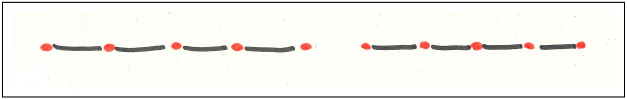
- Un chemin linéaire



N sommets, diamètre $N-1$, $M = 1$, $M/N = 1/N$

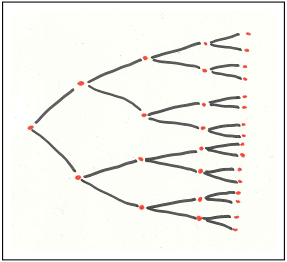
Exemples

- Un chemin linéaire



N sommets, diamètre $N-1$, $M=1$, $M/N=1/N$

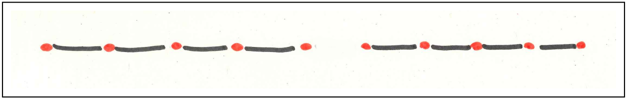
- Un arbre



2^d-1 sommets, diamètre $2d-2$

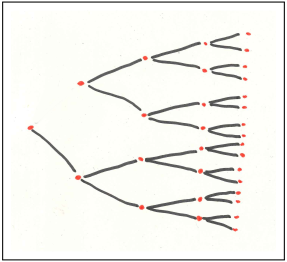
Exemples

- Un chemin linéaire



N sommets, diamètre $N-1$, $M=1$, $M/N=1/N$

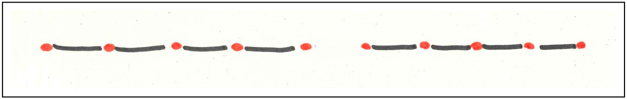
- Un arbre



2^d-1 sommets, diamètre $2d-2$, $M=1$, $M/N=1/(2^d-1)$

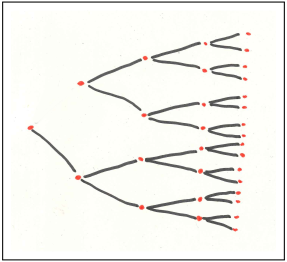
Exemples

- Un chemin linéaire



N sommets, diamètre $N-1$, $M=1$, $M/N=1/N$

- Un arbre



2^d-1 sommets, diamètre $2d-2$, $M=1$, $M/N=1/(2^d-1)$

Ces graphes ne sont pas expanseurs lorsqu'ils ont beaucoup de sommets !

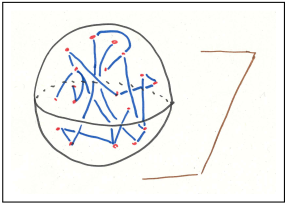
Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

Supposons qu'on ait représenté dans l'espace un graphe dont le nombre de Cheeger est au moins 1/2, avec N sommets, dans une sphère de rayon r cm, ou chaque sommet a 6 voisins et pas plus.

Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

Supposons qu'on ait représenté dans l'espace un graphe dont le nombre de Cheeger est au moins $1/2$, avec N sommets, dans une sphère de rayon r cm, ou chaque sommet a 6 voisins et pas plus.

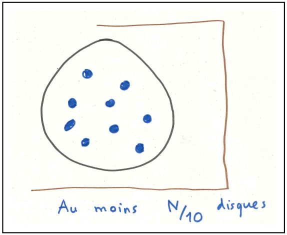
- On coupe l'espace par un plan horizontal choisi de sorte qu'une moitié des sommets (rouges) est au-dessus, et une moitié (bleus) en-dessous.



Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

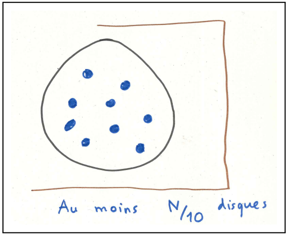
Supposons qu'on ait représenté dans l'espace un graphe dont le nombre de Cheeger est au moins $1/2$, avec N sommets, dans une sphère de rayon r cm, ou chaque sommet a 6 voisins et pas plus.

- On coupe l'espace par un plan horizontal choisi de sorte qu'une moitié des sommets (rouges) est au-dessus, et une moitié (bleus) en-dessous.
- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.



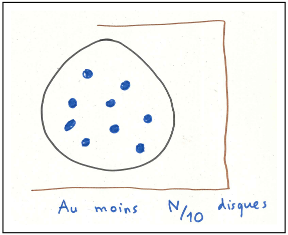
Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.



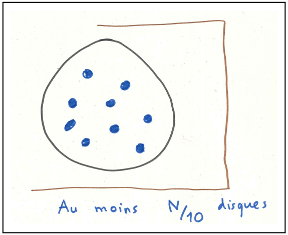
Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.
- Chaque arête occupe π cm^2 d'aire.



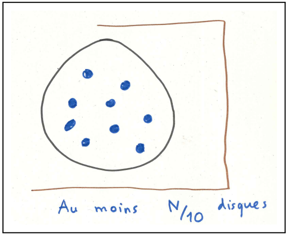
Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.
- Chaque arête occupe π cm^2 d'aire.
- Donc les arêtes occupent au moins $\pi N/2$ cm^2 d'aire.



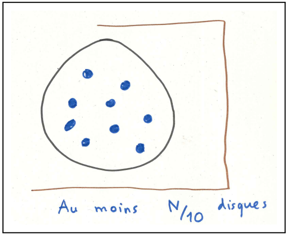
Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.
- Chaque arête occupe π cm^2 d'aire.
- Donc les arêtes occupent au moins $\pi N/2$ cm^2 d'aire.
- Mais si on coupe une sphère de rayon r par un plan horizontal, on obtient un disque de rayon au plus r, qui occupe au plus πr^2 cm^2.



Pourquoi les graphes «expanseurs» ont-ils besoin d'espace ?

- Puisque le nombre de Cheeger est $\geq 1/2$, on voit sur ce plan la trace d'au moins $M \geq N/2$ arêtes qui joignent un sommet rouge et un sommet bleu.
- Chaque arête occupe π cm^2 d'aire.
- Donc les arêtes occupent au moins $\pi N/2$ cm^2 d'aire.
- Mais si on coupe une sphère de rayon r par un plan horizontal, on obtient un disque de rayon au plus r, qui occupe au plus πr^2 cm^2.
- Mais alors $N/2 \leq r^2$, donc $r \geq (N/2)^{1/2}$.



Graphes expanseurs

Ce raisonnement a l'air magique ; si on est pessimiste, on peut soupçonner qu'il signifie seulement qu'il n'existe pas de graphe expanseur du tout ! Mais ce n'est pas le cas...

Graphes expanseurs

Ce raisonnement a l'air magique ; si on est pessimiste, on peut soupçonner qu'il signifie seulement qu'il n'existe pas de graphe expanseur du tout ! Mais ce n'est pas le cas...

- [†] **1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm.

[†] «Un concept auxiliaire est introduit.»

Graphes expanseurs

Ce raisonnement a l'air magique ; si on est pessimiste, on peut soupçonner qu'il signifie seulement qu'il n'existe pas de graphe expanseur du tout ! Mais ce n'est pas le cas...

- †**1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm.
- **1973**, G.A. Margulis, «Явные конструкции расширители» ("Constructions explicites d'expanseurs").

† «Un concept auxiliaire est introduit.»

Graphes expanseurs

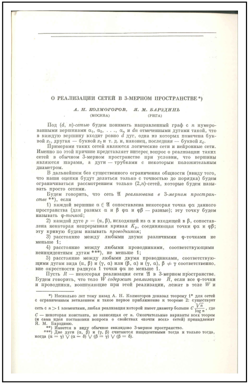
Ce raisonnement a l'air magique ; si on est pessimiste, on peut soupçonner qu'il signifie seulement qu'il n'existe pas de graphe expanseur du tout ! Mais ce n'est pas le cas...

- ‡**1967**, Ya. M. Barzdin et A.N. Kolmogorov, «О реализации сетей 3-мерном пространстве» ("Réalisation de réseaux dans l'espace à 3 dimensions").
- †**1973**, M. S. Pinsker, « On the complexity of a concentrator », 7th International Teletraffic Conference, Stockholm.
- **1973**, G.A. Margulis, «Явные конструкции расширители» ("Constructions explicites d'expanseurs").

† «Un concept auxiliaire est introduit.»
‡ Noté par L. Guth (2010), d'après les souvenirs d'Arnold !

Comment montrer qu'ils existent ?

- Barzdin et Kolmogorov, puis Pinsker, utilisent la «méthode probabiliste».



О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В 3-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

А. Н. КОЛМОГОРОВ, Я. М. БАРЗДИНЬ
(МОСКВА) (РИГА)

Под (d, n)-*сетью* будем понимать направленный граф с n нумерованными вершинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и dn отмеченными дугами такой, что в каждую вершину входит ровно d дуг, одна из которых помечена буквой x_1, другая — буквой x_2 и т. д. и, наконец, последняя — буквой x_d.

Примерами таких сетей являются логические сети и нейронные сети. Именно по этой причине представляет интерес вопрос о реализации таких сетей в обычном 3-мерном пространстве при условии, что вершины являются шарами, а дуги — трубками с некоторым положительным диаметром.

В дальнейшем без существенного ограничения общности (ввиду того, что наши оценки будут делаться только с точностью до порядка) будем ограничиваться рассмотрением только $(2,n)$-сетей, которые будем называть просто сетями.

Будем говорить, что сеть $\mathfrak{A}$ *реализована в 3-мерном пространстве* **), если

1) каждой вершине $\alpha \in \mathfrak{A}$ сопоставлена некоторая точка $\varphi\alpha$ данного пространства (для разных α и β $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$ — разные); эту точку будем называть φ-*точкой*;

2) каждой дуге $p = (\alpha, \beta)$, исходящей из α и входящей в β, сопоставлена некоторая непрерывная кривая K_p, соединяющая точки $\varphi\alpha$ и $\varphi\beta$; эту кривую будем называть *проводником*;

3) расстояние между любыми двумя различными φ-точками не меньше 1;

4) расстояние между любыми проводниками, соответствующими неинцидентным дугам ***), не меньше 1;

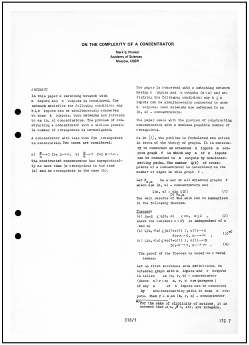
5) расстояние между любыми двумя проводниками, соответствующими дугам вида (α, β) и (γ, α) или (β, α) и (γ, α), $\beta \neq \gamma$ соответственно, вне окрестности радиуса 1 точки $\varphi\alpha$ не меньше 1.

Пусть R — некоторая реализация сети $\mathfrak{A}$ в 3-мерном пространстве. Будем говорить, что тело W *содержит реализацию* R, если все φ-точки и проводники, возникающие при этой реализации, лежат в теле W и

) Несколько лет тому назад А. Н. Колмогоров доказал теорему 1 для сетей с ограниченным ветвлением и такое первое приближение к теореме 2: существует сеть с $n > 1$ элементами, любая реализация которой имеет диаметр больше $C\frac{\sqrt{n}}{\log n}$, где C — некоторая константа, не зависящая от n. Окончательные варианты всех теорем (и сама идея постановки вопроса о свойствах «почти всех» сетей) принадлежат Я. М. Барздиню.

**) Имеется в виду обычное евклидово 3-мерное пространство.

***) Две дуги (α, β) и (γ, β) считаются инцидентными тогда и только тогда, когда $(\alpha = \gamma) \vee (\alpha = \delta) \vee (\beta = \gamma) \vee (\beta = \delta)$.



ON THE COMPLEXITY OF A CONCENTRATOR

Mark S. Pinsker
Academy of Sciences
Moscow, USSR

ABSTRACT

In this paper a switching network with n inputs and m outputs is considered. The network satisfies the following condition: any $k \leqslant m$ inputs can be simultaneously connected to some k outputs. Such networks are referred to as (n, m) concentrators. The problem of constructing a concentrator with a minimum possible number of crosspoints is investigated.

A concentrator with less than 29n crosspoints is constructed. Two cases are considered:

a) $\frac{m}{n} \to 0$ for $n \to \infty$, b) $\frac{m}{n} \to 1$ for $n \to \infty$.

The constructed concentrator has asymptotically no more than 3n crosspoints in the case (a) and 4n crosspoints in the case (b).

The paper is concerned with a switching network having n inputs and m outputs ($m < n$) and satisfying the following condition: any $k \leqslant m$ inputs can be simultaneously connected to some k outputs. Such networks are referred to as (n, m) - concentrators.

The paper deals with the problem of constructing concentrators with a minimum possible number of crosspoints.

As in [1], the problem is formulated and solved in terms of the theory of graphs. It is necessary to construct an oriented n inputs m outputs graph f in which any m of n inputs can be connected to m outputs by non-intersecting paths. The number Q(f) of crosspoints of a concentrator is determined as the number of edges in this graph f .

Let $F_{n,m}$ be a set of all oriented graphs f which are (n, m) - concentrators and

$$Q(n, m) = \min_{f \in F_{n,m}} Q(f) \qquad (1)$$

The main results of the work can be summarized in the following theorem.

Theorem:

(a) $2n-2 \leqslant Q(n, m) < cn, \ m \geqslant 2$, (2)
where the constant $c < 29$ is independent of n and m;

(b) $Q(n, \alpha n) \leqslant 3n(1+o(1))$, $o(1) \to 0$ for $\alpha \to 0$, $n \to \infty$, (3)*)

(c) $Q(n, \alpha n) \leqslant 4n(1+o(1))$, $o(1) \to 0$ for $\alpha \to 1$, $n \to \infty$. (4)

The proof of the Theorem is based on several lemmas.

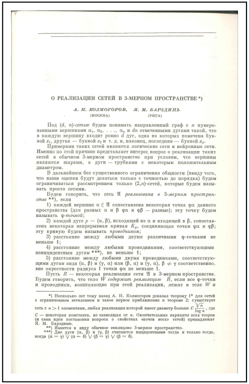
Let us first introduce some definitions. An oriented graph with n inputs and r outputs is called an (n, r, m) - concentrator (where $n > r > m$; n, r, m are integers) if any m of n inputs can be connected by non-intersecting paths to some m outputs. When r = m an (n, r, m) - concentrator

*) For the sake of simplicity of notions, it is assumed that αn, βn, etc. are integers.

318/1 ITC 7

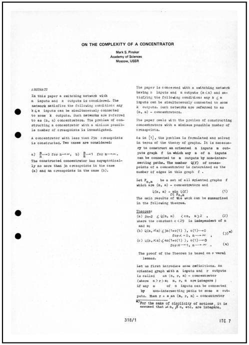
Comment montrer qu'ils existent ?

- Barzdin et Kolmogorov, puis Pinsker, utilisent la «méthode probabiliste».
- Margulis donne une construction explicite... mais pas évidente du tout !



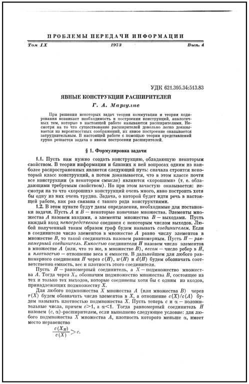
О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В 3-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

А. Н. КОЛМОГОРОВ, Я. М. БАРЗДИНЬ
(МОСКВА) (РИГА)



ON THE COMPLEXITY OF A CONCENTRATOR

Mark S. Pinsker
Academy of Sciences
Moscow, USSR



ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том IX 1973 Вып. 4

УДК 621.395.34:513.83

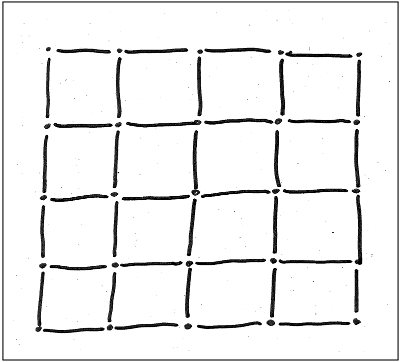
ЯВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ РАСШИРИТЕЛЕЙ

Г. А. Маргулис

§ 1. Формулировка задачи

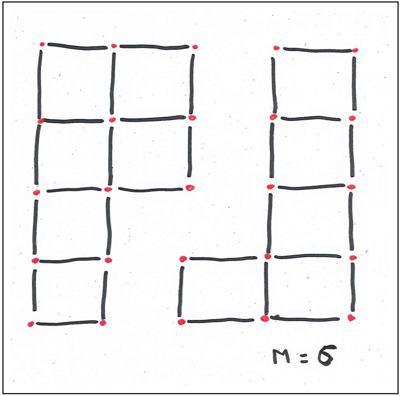
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



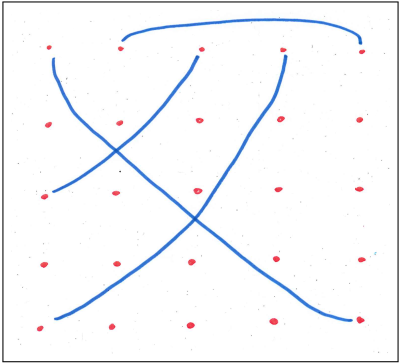
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



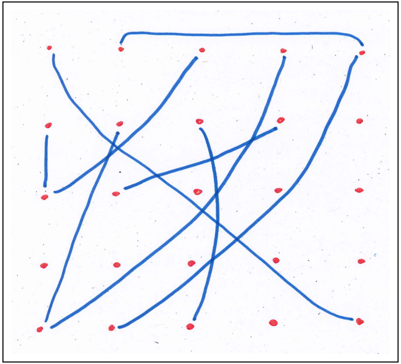
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



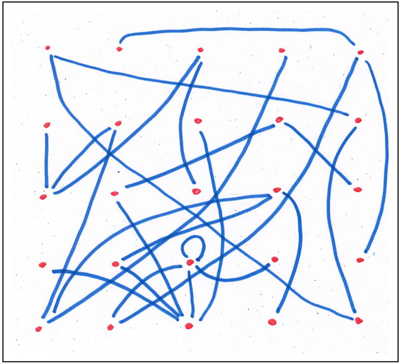
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



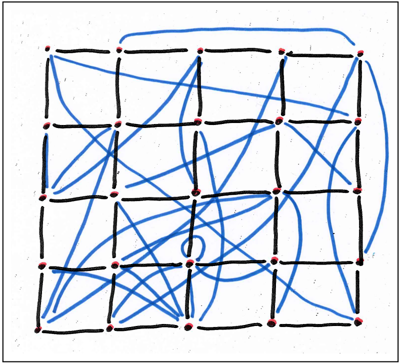
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



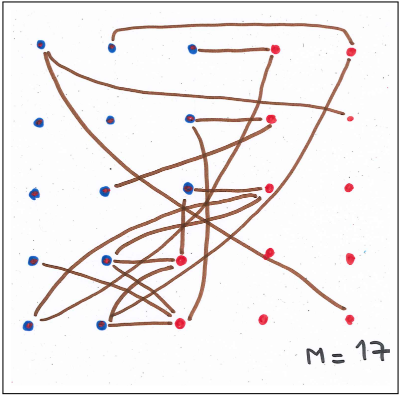
La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



La méthode probabiliste

«L'avenir est au hasard»
(J. Brel)



Applications

Les graphes expanseurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

Applications

Les graphes expanseurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- Géométrie ;

Applications

Les graphes expanseurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- Géométrie ;
- Théorie des nombres ;

Applications

Les graphes expanseurs apparaissent maintenant de manière surprenante dans de nombreux domaines des mathématiques :

- Géométrie ;
- Théorie des nombres ;
- Théorie des groupes ;
- Informatique théorique ;
- Théorie des opérateurs ;
- Combinatoire ;
- Et que sais-je encore...

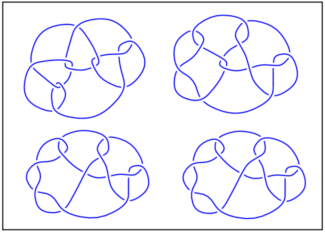
Application : des nœuds compliqués

- Vers 1980, le Mikhaïl Gromov demanda s'il existe des nœuds qui sont extrêmement compliqués : il serait impossible de les plonger dans l'espace de sorte que leur *distorsion* soit petite.

Voir l'exposé de V. Borrelli en 2016, «La machine à démanteler les impossibles de Mikhaïl Gromov», `https://vimeo.com/152258861`

Application : des nœuds compliqués

- Vers 1980, le Mikhaïl Gromov demanda s'il existe des nœuds qui sont extrêmement compliqués : il serait impossible de les plonger dans l'espace de sorte que leur *distorsion* soit petite.
- Dire que la distorsion est grande signifie que, *quelle que soit la manière dont on place le nœud dans l'espace*, il y aura des points proches «à vol d'oiseau» qui seront éloignés le long du nœud.

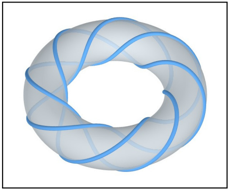


Nœuds compliqués

- Existe-t-il des noeuds dont la distorsion est arbitrairement grande ?

Nœuds compliqués

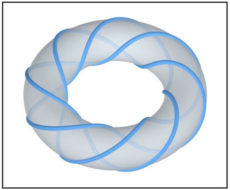
- Existe-t-il des noeuds dont la distorsion est arbitrairement grande ?
- Oui ! Première preuve : John Pardon (2010)
  Voir `images.math.cnrs.fr/Des-Noeuds-Indetordables.html`



$T_{8,3}$; image B. Klœckner

Nœuds compliqués

- Existe-t-il des noeuds dont la distorsion est arbitrairement grande ?
- Oui ! Première preuve : John Pardon (2010)
  Voir `images.math.cnrs.fr/Des-Noeuds-Indetordables.html`



$T_{8,3}$; image B. Klœckner

- Re-oui ! Second preuve : M. Gromov et L. Guth, en utilisant des graphes expanseurs d'origine géométrique.

Quelques références

- (Sur Kolmogorov) *Kolmogorov in perspective*, History of Mathematics vol. 20, American Math. Society (2000).
- (Expanseurs en général) S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson : *Expander graphs and their applications*, Bulletin of the AMS 43 (2006), 439–561.
- (Applications arithmétiques) E. Fuchs : *Counting problems in Apollonian packings*, Bull. of the AMS 50 (2013), 229-266.
- (Applications en général) A. Lubotzky : *Expander graphs in pure and applied mathematics*, AMS Colloquium Lectures 2011, Bulletin of the AMS 49 (2012), 113–162.
- (Introduction générale) *An introduction to expander graphs*, SMF Cours Spécialisés, à paraître.