Sur la forme d'Albert et le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions

Max–Albert Knus

Soit k un corps. Cette note donne une démonstration, valable en toute caractéristique, du fait que trois corps de quaternions de somme nulle dans le groupe de Brauer de k se déploient sur une même extension quadratique séparable de k. Il faut la voir comme un complément à la note [7] de J. Tits. On trouvera dans [7] une démonstration semblable, mais de nature plus géométrique, et, en introduction, un rappel sur d'autres démonstrations.

Je remercie J. Tits et J.-P. Tignol, qui m'ont encouragé à rédiger cette démonstration et D. Saltman pour ses commentaires, ainsi que pour l'exemple donné en fin de note. Je dois aussi ma reconnaissance au rapporteur pour les améliorations suggérées.

Soient H_1 et H_2 deux algèbres de quaternions de centre k, de normes réduites n_1, n_2, de traces réduites t_1, t_2 et d'involutions σ_1, σ_2. Le sous-espace de $H_1 \otimes H_2$ défini par

$$Q(H_1, H_2) = \{\xi = x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2,\ t_1(x_1) = t_2(x_2)\}$$

est de dimension 6 et la forme quadratique $N(\xi) = n_1(x_1) - n_2(x_2)$ est non singulière sur $Q(H_1, H_2)$. On peut le vérifier facilement si $H_1 = M_2(k)$ et le cas général suit par descente. Observons que

$$Q(H_1, H_2) = \mathrm{Alt}(H_1 \otimes H_2) = \{\nu - (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\nu),\ \nu \in H_1 \otimes H_2\}.$$

On le voit en choisissant une base de $Q(H_1, H_2)$ sur k, telle que tout élément $\xi = x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2$ de la base vérifie $t_1(x_1) = t_2(x_2) \neq 0$ et on applique la formule

$$(x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2) \cdot t_1(x_1) = x_1 \otimes \sigma_2(x_2) - (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(x_1 \otimes \sigma_2(x_2)).$$

Soit $V_N \subset \mathrm{P}^5$ la k-quadrique définie par N et soit U_N la sous-variété ouverte des points $\xi = x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2$ tels que $x_1 \notin k$ et $x_2 \notin k$ (par point d'une variété, on entendra toujours un point fermé). Le résultat indiqué suit des deux propositions suivantes.

Proposition. *Les points rationnels de U_N sont en bijection avec les systèmes $(z_1, z_2; \alpha)$, où z_i est un générateur d'une sous-algèbre commutative A_i de dimension 2 de H_i et α est un isomorphisme de $A_1 = k(z_1)$ sur $A_2 = k(z_2)$ tel que $\alpha(z_1) = z_2$. En particulier, il existe un système $(z_1, z_2; \alpha)$ tel que les extensions $k(z_i)$ soient quadratiques séparables si et seulement si V_N a un point rationnel et, en caractéristique 2, il existe un système $(z_1, z_2; \alpha)$ tel que l es extensions $k(z_i)$ soient quadratiques purement inséparables, si et seulement si $V_N \cap \{t_1(x_1) = 0\}$ a un point rationnel.*

Preuve. Pour tout système $(z_1, z_2; \alpha)$, l'élément z_i vérifie l'équation

$$z_i^2 - t_i(z_i) z_i + n_i(z_i) = 0.$$

On a donc un isomorphisme $\alpha : k(z_1) \xrightarrow{\sim} k(z_2)$ tel que $\alpha(z_1) = z_2$ si et seulement si $n_1(z_1) = n_2(z_2)$ et $t_1(z_1) = t_2(z_2)$. Ainsi tout système $(z_1, z_2; \alpha)$ définit un point rationnel de U_N. Inversement, pour tout $\xi = x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2 \in U_V$, il existe un isomorphisme $k(x_1) \xrightarrow{\sim} k(x_2)$ d'algèbres quadratiques. L'assertion sur l'existence d'extensions séparables suit du fait que si V_N a un point rationnel, l'ensemble de ses points rationnels est dense dans V_N. En particulier il existe un point $\xi = x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_2$ dans U_N tel que $t_1(z_1) = t_2(z_2) \neq 0$. La dernière assertion est claire, puisque $k(z_i)$ est inséparable si et seulement si l'élément z_i vérifie $t_i(z_i) = 0$. $\square$

Proposition. *Soient H_1, H_2, H_1', H_2' des algèbres de quaternions de centre k. Les algèbres $H_1 \otimes H_2$ et $H_1' \otimes H_2'$ sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques $Q(H_1, H_2)$ et $Q(H_1', H_2')$ sont similaires. En particulier on a $H_1 \otimes H_2 \simeq M_2(H_3)$ pour une algèbre de quaternions H_3 si et seulement si la forme quadratique $Q(H_1, H_2)$ est isotrope.*

Preuve. On voit facilement que $\sigma_1 \otimes 1 = -1 \otimes \sigma_2$ sur $Q(H_1, H_2)$ et que $N(\xi) = \xi \cdot (\sigma_1 \otimes 1)(\xi) = (\sigma_1 \otimes 1)(\xi) \cdot \xi$. Il suit que l'application $Q(H_1, H_2) \to M_2(H_1 \otimes H_2)$ donnée par

$$\xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_1 \otimes 1)(\xi) \\ \xi & 0 \end{pmatrix}$$

s'étend à un homomorphisme d'algèbres graduées de l'algèbre de Clifford $C(Q(H_1, H_2))$ de $Q(H_1, H_2)$ dans $M_2(H_1 \otimes H_2)$. Puisque les deux algèbres sont centrales simples de même dimension, c'est un isomorphisme. En particulier on obtient

$$C_0(Q(H_1, H_2)) \simeq H_1 \otimes H_2 \times H_1 \otimes H_2,$$

où $C_0(Q(H_1, H_2))$ dénote l'algèbre de Clifford paire. Il est bien connu qu'une similitude de formes quadratiques induit un isomorphisme des algèbres de Clifford paires correspondantes. Les algèbres $H_1 \otimes H_2$ et $H_1' \otimes H_2'$ sont donc isomorphes si les formes $Q(H_1, H_2)$ et $Q(H_1', H_2')$ sont similaires. Soit maintenant $\varphi : H_1 \otimes H_2 \xrightarrow{\sim} H_1' \otimes H_2'$ un isomorphisme d'algèbres et soit $\sigma' = \varphi(\sigma_1 \otimes \sigma_2)\varphi^{-1}$ le transport de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ sur $H_1' \otimes H_2'$. Il existe une unité $u \in H_1' \otimes H_2'$ telle que $(\sigma_1' \otimes \sigma_2')(u) = u$ et $\sigma'(\eta) = u \cdot (\sigma_1' \otimes \sigma_2')(\eta) \cdot u^{-1}$ pour tout $\eta \in H_1' \otimes H_2'$. Utilisant le fait que $Q(H_1, H_2) = \mathrm{Alt}(H_1 \otimes H_2)$ (voir plus haut), on vérifie sans peine que $\varphi(\xi)u \in Q(H_1', H_2')$ pour tout $\xi \in Q(H_1, H_2)$. On conclut alors de

$$N'(\varphi(\xi)u) = \varphi(\xi)u \cdot (\sigma_1' \otimes 1)(\varphi(\xi)u) \quad \text{et} \quad N(\xi) = \xi \cdot (\sigma_1 \otimes 1)(\xi)$$

pour tout $\xi \in Q(H_1, H_2)$ que ξ est inversible si et seulement si $N(\xi) \neq 0$, respectivement si et seulement si $N'(\varphi(\xi)u) \neq 0$. Il suit que $N(\xi) = 0$ si et seulement si $N'(\varphi(\xi)u) = 0$. Comme N et N' sont irréductibles, il existe, par le Théorème des zéros de Hilbert, $\lambda \in k$ tel que $N'(\varphi(\xi)u) = \lambda N(\xi)$ pour tout $\xi \in Q(H_1, H_2)$. Les formes sont donc bien similaires. La dernière assertion est une conséquence du fait que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes 1$ est un élément isotrope de $Q(M_2(k) \otimes H_2'$. $\square$

Remarque. La forme $Q(H_1, H_2)$ est la *forme d'Albert* de $H_1 \otimes H_2$. Le définition donnée ici, qui est valable en toute caractéristique, provient de [5]. Une autre définition peut être trouvée dans [6] et (en caractéristique différente de 2) dans [3]. La seconde Proposition, qui généralise un résultat de Albert ([1]) est due à Jacobson ([3]) pour des corps de caractéristique différente de 2. En particulier, l'idée d'utiliser le Théorème des zéros de Hilbert remonte à Jacobson. D'autres démonstrations de cette Proposition se trouvent dans [4] et [6].

Remarque. Le résultat en caractéristique 2 et avec l'hypothèse de séparabilité est dû à P. Draxl [2]. Dans la même note, P. Draxl demande si trois corps de quaternions de somme nulle dans le groupe de Brauer de k se déploient sur une même extension quadratique inséparable de k. Une telle extension n'existe pas nécessairement, comme le montre l'exemple suivant, qui nous a été communiqué par D. Saltman. Pour tout corps k de caractéristique 2 et toute paire d'éléments $(a,b) \in k \times k^\times, k^\times = \setminus\{0\}$, notons par $[a,b)/k$ l'algèbre de quaternions engendrée par u,v et vérifiant les relations $u^2+u=a$, $v^2=b$ et $uv+vu=v$. Soit F un corps de caractéristique 2, soit $K=F(x,y)$ le corps des fonctions rationnelles en deux variables x et y sur F et soit $k=K((t))$ le corps des séries formelles en t sur K. Les algèbres $H_1=[x,y)/k$ et $H_2=[x,t)/k$ sont des corps gauches, de normes réduites

$$\begin{aligned} n_1(\xi) &= \xi_1^2+\xi_1\xi_2+x\xi_2^2+y\xi_3^2+y\xi_3\xi_4+xy\xi_4^2 \\ n_2(\xi) &= \xi_1^2+\xi_1\xi_2+x\xi_2^2+t\xi_3^2+t\xi_3\xi_4+xt\xi_4^2 \end{aligned}$$

par rapport aux bases $\{1,u_i,v_i,u_iv_i\}$ de H_i. Ces normes sont anisotropes. Les éléments $\{1\otimes 1, u_1\otimes 1 - 1\otimes u_2, v_1\otimes 1, u_1v_1\otimes 1, 1\otimes u_2, 1\otimes u_2v_2\}$ forment une base de la forme d'Albert $Q(H_1,H_2)$ et on a

$$N(\eta)=\eta_1^2+\eta_1\eta_2+y\eta_3^2+y\eta_3\eta_4+xy\eta_4^2+t(\eta_5^2+\eta_5\eta_6+x\eta_6^2)$$

par rapport à cette base. Les extensions séparables $k(u_1)$ et $k(u_2)$ sont isomorphes et la forme N est visiblement isotrope. Un système $(z_1,z_2;\alpha)$ avec $k(z_i)$ inséparables correspond à un point rationnel de $V_N\cap\{t_1(x_1)=0\}$ d'après la première Proposition. La condition $t_1(x_1)=0$ se lit ici $\eta_2=0$. La forme N est isotrope si et seulement si les deux réductions

$$N_1(\eta)=\eta_1^2+\eta_1\eta_2+y\eta_3^2+y\eta_3\eta_4+xy\eta_4^2$$

et

$$N_2(\eta)=\eta_5^2+\eta_5\eta_6+x\eta_6^2$$

sont isotropes. En effet, si $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6)$ est un vecteur isotrope, on peut supposer $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6\in k[[t]]$, non tous divisibles par t. Si $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ ne sont pas tous divisibles par t, alors on déduit par réduction modulo t que $N_1(\eta)$ est isotrope sur k; dans le cas contraire ξ_5 ou ξ_6 n'est pas divisible par t et N_2 est isotrope. Comme$N_1|_{\eta_2=0}$ et N_2 sont des sous-formes de n_1, respectivement n_2, elles sont anisotropes et $V_N\cap\{t_1(x_1)=0\}$ n'a pas de point rationnel.

Remarquons qu'on peut déduire directement de la théorie des algèbres de division sur les corps locaux, que toute extension quadratique L commune à H_1 et H_2 dans l'exemple ci-dessus, est nécessairement isomorphe à $k(u_1)\simeq k(u_2)$, et est donc séparable.

Références

[1] Albert, A.A.: On the Wedderburn norm condition for cyclic algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 37, 301-312 (1931)

[2] Draxl, P.: Über gemeinsame separabel-quadratische Zerfällungskörper von Quaternionenalgebren, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 16, 251-259 (1975)

[3] Jacobson, N.: Some applications of Jordan norms to involutorial simple associative algebras, Adv. in Math. 48, 1-15 (1975)

[4] Knus, M.-A.: Quadratic forms, Clifford algebras and Spinors, Seminários de Matematica 1, Campinas, 1988

[5] Knus, M.-A., Parimala, R. and Sridharan, R.: Involutions on rank 16 central simple algebras, Journal of the Indian Math. Soc. 57, 143-151 (1991)

[6] Mammone, P. and Shapiro, D.B.: The Albert quadratic form for an algebra of degree four, Proc. Amer. Math. Soc.105, 525-530 (1989)

[7] Tits, J.: Sur le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions, 1992

M.-A. Knus
Mathematik
ETH Zentrum
CH 8092 Zurich