Kapitel VI Minkowski–Geometrie

§ 1 Die Metrik

Das Skalarprodukt

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

in $\mathbb{R}^3$ führt zum *Längenbegriff*

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ .$$

Zu den *räumlichen Komponenten* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ führen wir eine zusätzliche Variable t ein, welche die Zeit darstellen wird. Der Raum

$$\mathbb{M}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \{\xi = (x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$$

heisst *Minkowski–Raum*. Einfachheitshalber werden wir uns auf die Minkowski–Ebene

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

beschränken. Elemente $\xi = (x,t) \in \mathbb{M}^2$ haben zwei räumliche Komponenten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und eine Zeitkomponente t. Ein Element $\xi \in \mathbb{M}^2$ ist ein *Ereignis*. Sei

$$t \to \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Die "Kurve"

$$t \to \xi(t) = (x(t), t) \in \mathbb{M}^2$$

heisst eine *Weltlinie*. Sie beschreibt den Fahrplan (Ort und Zeit) einer Bewegung.

Beispiel: $x(t) = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 t \\ u_2 + v_2 t \end{pmatrix}$

beschreibt eine geradlinige Bewegung mit Anfangspunkt $\left(u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, 0\right)$ und konstanter Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Wir führen ein *Skalarprodukt* auf $\mathbb{M}^2$ ein:

$$\langle \xi, \eta \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - c^2 t t'$$

für $\xi = (x, t)$, $\eta = (y, t')$.

Die Zahl c ist eine Konstante, verschieden von 0. Physikalisch ist c die *Lichtgeschwindigkeit*. Als *Länge* von ξ setzen wir

$$|\xi| := \sqrt{|\langle \xi, \xi \rangle|} \ .$$

Für $\xi = (x, 0)$, ist $|\xi| = |x|$ die übliche Länge im $\mathbb{R}^2$. Für $\xi = (0, t)$ ist $|\xi| = ct$ der Weg eines Lichtstrahles während der Zeit t. Elemente $\xi \in \mathbb{M}^2$ mit $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ heissen *Raumvektoren* und solche mit $\langle \xi, \xi \rangle < 0$ *Zeitvektoren*. Die Menge

$$K = \{\xi \in \mathbb{M}^2 \mid \langle \xi, \xi \rangle = 0\}$$

ist der *Lichtkegel*. Sei Z die Menge der *Zeitvektoren*. Ein Zeitvektor $\xi = (x, t) \in Z$ heisst *zukunftszeigend*, falls $t > 0$, und *vergangenheitszeigend*, falls $t < 0$.

Wir setzen $Z_+ = \{\xi \in Z \mid t > 0\}$ und $Z_- = \{\xi \in Z \mid t < 0\}$.

Seien $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix}$ und $\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t' \end{pmatrix}$ Ereignisse und sei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} .$$

Das Skalarprodukt lässt sich als

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^t L \eta$$

darstellen, da $L\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -c^2 t' \end{pmatrix}$. Die *orthogonale Gruppe* $O(2,1)$ von $\mathbb{M}^2$ ist die Menge der (3×3)–invertierbaren Matrizen T, welche das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ invariant lassen:

$$O(2,1) := \{T \in GL(3) \mid \langle T\xi, T\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle\} ,$$

[dabei bezeichnet $GL(3)$ die Menge der (3×3)-Matrizen, welche invertierbar sind.]

Die Menge $O(2,1)$ ist eine Gruppe für die Matrixmultiplikation.

Satz: Es gilt $\quad T \in O(2,1) \Leftrightarrow T^t L T = L$.

Beweis: Wir haben $\langle T\xi, T\eta\rangle = (T\xi)^t L T\eta = \xi^t T^t L T\eta$. Aus

$$\xi^t T^t L T \eta \;=\; \xi^t L \eta$$

für alle ξ, η folgt die Behauptung. $\square$

Aus $T^t L T = L$ folgt $\det(T)^2 \cdot \det L = \det L$. Da $\det L = -c^2 \neq 0$, gilt

$$\det T \;=\; \pm 1$$

für $T \in O(2,1)$. Wir definieren die *spezielle orthogonale Gruppe* in $\mathbb{M}^2$ als

$$SO(2,1) := \{T \in O(2,1) \mid \det T = 1\}\,.$$

Übung: Sei K der Lichtkegel und sei $T \in GL(3)$. Es gilt

$$T \in SO(2,1) \Longleftrightarrow TK \subset K \quad \text{und} \quad \det T = 1\,.$$

Beispiele:

1.) Die Matrix

$$R(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liegt in $SO(2,1)$; $R(\varphi)$ ist eine *räumliche Drehung*. Die Zeitvariable wird nicht geändert.

2.) Sei

$$H(\alpha) \;=\; \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & -c\sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{c}\sinh\alpha & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $H(\alpha)$ liegt auch in $SO(2,1)$ (Übung!). Sie heisst ein "Lorentz–Boost". Sie mischt die erste räumliche Variable und die Zeitvariable.

Die Menge

$$SO^+(2,1) \;:=\; \{T \in SO(2,1) \mid TZ_+ \subset Z_+\}$$

ist eine Untergruppe von $SO(2,1)$. Man kann die Bedingung

$$TZ_+ \subset Z_+$$

als *Erhaltung der Kausalität* interpretieren.

Für $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$, sei $\gamma(T) := t_{33}$.

Satz: Sei $T \in SO(2,1)$. Es gilt

$$T \in SO^+(2,1) \Longleftrightarrow \gamma(T) > 0 \ .$$

Zum Beweis brauchen wir das

Lemma: Sei $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix} \in Z_+$ fest und $\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t' \end{pmatrix}$. Dann

$$\eta \in Z_+ \Longleftrightarrow \langle \xi, \eta \rangle < 0 \ , \quad \eta \in Z_- \Longleftrightarrow \langle \xi, \eta \rangle > 0 \ .$$

Beweis des Lemmas. Wir haben

$$\langle \xi, \eta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - c^2 t t' \ .$$

Da $\xi, \eta \in Z$, gilt

$$x_1^2 + x_2^2 < c^2 t^2 \quad \text{und} \quad y_1^2 + y_2^2 < c^2 t'^2 \ .$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_2^2 + y_2^2)$$

folgt

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 < c^4 (t t')^2 \ .$$

Also aus $\xi \in Z_+$ und $\eta \in Z_+$ folgt

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| < c^2 t t' \ .$$

Insbesondere folgt $x_1 y_1 + x_2 y_2 < c^2 t t'$ und $\langle \xi, \eta \rangle < 0$. Falls $\xi \in Z_+$ und $\eta \in Z_-$, so gilt $t > 0$ und $t' < 0$, also

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 > c^2 t t' \quad \text{und} \quad \langle \xi, \eta \rangle > 0 \ ,$$

und umgekehrt. $\square$

Beweis des Satzes. Sei zuerst $\gamma(T) > 0$; wir zeigen, dass $T \in SO^+(2,1)$:
Die Bedingung $\gamma(T) > 0$ lässt sich als

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Z_+$$

interpretieren. Sei $\xi = (x,t) \in Z_+$. Es folgt aus dem Lemma, dass

$$\left\langle T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = -c^2 t < 0 \ ,$$

also ist $T\xi \in Z_+$. Es folgt also aus $\gamma(T) > 0$, dass $TZ_+ \subset Z_+$ und $T \in SO^+(2,1)$.
Umgekehrt, sei $T \in SO^+(2,1)$, d.h. $T \in SO(2,1)$ und $TZ_+ \subset Z_+$. Wir behaupten, dass $\gamma(T) > 0$. Aus $\gamma(T) < 0$ folgt (wie oben), dass $TZ_+ \subset Z_-$, also $T \notin SO^+(2,1)$. Aus $\gamma(T) = 0$ folgt $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Z_+$, also auch $T \notin SO^+(2,1)$. $\square$

Beispiele: $R(\varphi)$, $H(\alpha) \in SO^+(2,1)$.

Satz: Sei $T \in SO^+(2,1)$. Es gibt φ_1, φ_2 und α so, dass

$$T \ = \ R(\varphi_1) H(\alpha) R(\varphi_2) \ .$$

Beweis: Sei

$$T \ = \ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \in SO^+(2,1) \ .$$

1. Fall: Es sei $t_{13} = t_{23} = 0$. Aus $T^t L T = L$ folgt $-c^2 t_{33}^2 = -c^2$, also $t_{33}^2 = 1$.
Da $\gamma(T) > 0$, ist $t_{33} = 1$ und es folgt aus $T^t L T = L$ noch dass $t_{31} = t_{32} = 0$, also

$$T \ = \ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Die (2×2)–Matrix $T' = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ liegt in $SO(2)$, ist also von der Form

$$T' \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix},$$

und die Behauptung folgt mit $\alpha = 0$, $\varphi_2 = 0$.

2. Fall: Es sei $(t_{13}\,,\, t_{23}) \neq (0,0)$.

Der Vektor $\binom{t_{13}}{t_{23}}$ ist die Projektion von $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die (x_1, x_2)–Ebene. Da

$$t_{13}^2 + t_{23}^2 - c^2 t_{33}^2 = -c^2\,,$$

hat $\binom{t_{13}}{t_{23}}$ die Länge $c\sqrt{\gamma(T) - 1} =: \beta(T)$. Durch eine Drehung in der (x_1, x_2)–Ebene um einen Winkel, den wir $-\varphi_1$ nennen, lässt sich $\binom{t_{13}}{t_{23}}$ in einen Vektor $\binom{\beta(T)}{0}$ überführen. Sei

$$T' := R(-\varphi_1) \circ T\;.$$

Es gilt dann $T'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(T) \\ 0 \\ \gamma(T) \end{pmatrix}$ und $\beta(T)^2 - c^2\gamma(T)^2 = -c^2$.

Wir wählen $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\cosh\alpha = \gamma(T) \qquad\qquad \sinh\alpha = -\frac{\beta(T)}{c}\,,$$

und setzen

$$T'' := H(-\alpha) \circ T' = H(-\alpha) \circ R(-\varphi_1) \circ T\,.$$

Dann ist

$$T''\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma(T) & 0 & -\beta(T) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta(T)}{c^2} & 0 & \gamma(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(T) \\ 0 \\ \gamma(T) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\;.$$

Nach Fall 1) ist T'' eine räumliche Drehung. Wir setzen $T'' = R(\varphi_2)$, und es gilt $T = R(\varphi_1)H(\alpha)R(\varphi_2)$ – wie behauptet. $\square$

§ 2 Relativitätstheorie

Es folgt aus dem letzten Satz, dass die Boosts wichtige Elemente in $SO^+(2,1)$ sind. Sie lassen sich auf eine andere Art parametrisieren:

Sei

$$v := c \tanh\alpha = c\,\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}\ .$$

Aus $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ folgt

$$\cosh\alpha \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}, \quad \sinh\alpha \ = \ \frac{v/c}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}\ .$$

Also

$$\cosh\alpha \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \sinh\alpha \ = \ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,$$

so dass

$$H(\alpha) \ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}\ .$$

Die zweite Raum–Richtung bleibt fest. Lassen wir diese Koordinate weg, so erhalten wir eine Transformation T von $\mathbb{M}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R} \right\}$,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{t} \end{pmatrix} \ = \ T\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \widetilde{x} \ &= \ \frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ , \\ \widetilde{t} \ &= \ \frac{-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ . \end{aligned}$$

Diese Transformation heisst *(homogene) Lorentz–Transformation.* Eine *inhomogene* Lorentz–Transformation hat die Form

$$\begin{aligned} \widetilde{x} \ &= \ \frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + x_0 \\ \widetilde{t} \ &= \ \frac{-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + t_0. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Lorentz-Transformationen als Koordinatentransformationen interpretieren:

Annahme: $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ seien die Weltkoordinaten eines Ereignisses E bezüglich eines Beobachters O und $\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{t} \end{pmatrix}$ seien die Weltkoordinaten von E bezüglich $\widetilde{O}$.

Behauptung: $\widetilde{O}$ bewegt sich bezüglich O mit der Geschwindigkeit v.

Beweis: Da $\widetilde{x} = 0$ (für $\widetilde{O}$) folgt

$$0 \;=\; \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + x_0 \;,$$

also gilt für die Koordinate x von $\widetilde{O}$ (bezüglich. O)

$$\boxed{x \;=\; vt + \;\text{Konstante}}$$

$\square$

Experiment:

Sei $\widetilde{\lambda}$ ein Lineal der Länge 1 im System $(\widetilde{x}, \widetilde{t})$. Es bewegt sich also mit der Geschwindigkeit v bezüglich des Systems (x, t). Seine Länge l zur Zeit $t = 0$ im System (x, t) ist gegeben durch

$$1 \;=\; \widetilde{x} \;=\; \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;.$$

Also $l = \sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$.

Umgekehrt, sei λ ein Lineal der Länge $x = 1$ bezüglich (x, t). Seine Länge $\widetilde{l}$ bezüglich $(\widetilde{x}, \widetilde{t})$ zur Zeit $\widetilde{t} = 0$ ist

$$\widetilde{l} \;=\; \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; \frac{1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;.$$

Da

$$0 \;=\; \widetilde{t} \;=\; \frac{-(v/c^2)x + t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;,$$

folgt $t = v/c^2$ und $\widetilde{l} = \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Beide Längen sind gleich. Diese Tatsache ist Teil des "Relativitätsprinzips".

Beispiel: (Einstein–Zug)

Der Bahnhof (System (x,t)) habe die Länge 100 m. Der Zug (System $(\widetilde{x},\widetilde{t}\,)$) habe die Länge 200 m und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Die Länge des Zuges ist für den Bahnhofvorstand

$$l_1 \;=\; \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot 200m = \frac{1}{2}\cdot 200m = 100 \text{ m}$$

und der Bahnhof hat die richtige Länge! Die Länge des Bahnhofs ist für den Zugführer

$$\widetilde{l}_2 \;=\; \frac{1}{2}\cdot 100m = 50 \text{ m}\,,$$

ist also viel zu kurz!

Die Längen in Richtung der Bewegung werden gekürzt. Entsprechend wird die Zeit dilatiert: ein Zeitabstand Δt im System (x,t) an der Stelle $x=0$ wird als

$$\Delta\widetilde{t} \;=\; \frac{-(v/c^2)\cdot x + \Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;=\; \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > \Delta t$$

gemessen.

Für $c\to\infty$ reduzieren sich die Lorentz-Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= \tfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(+x_0) \\ \widetilde{t} &= \tfrac{(-v/c^2)x+t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(+t_0) \end{aligned}$$

auf die *Galilei–Transformationen*:

$$\begin{aligned} &\widetilde{x} = x - vt \quad && (+x_0) \\ &\widetilde{t} = t && (+t_0) \end{aligned}$$

§ 3 Addition der Geschwindigkeiten

Sei $$\widetilde{x} \;=\; \widetilde{w}\widetilde{t}$$

eine Bewegung im $(\widetilde{x},\widetilde{t}\,)$–System, mit konstanter Geschwindigkeit $\widetilde{w}$. Im Galilei–System haben wir

$$x - vt = \widetilde{x} = \widetilde{w}\widetilde{t} = \widetilde{w}t\,.$$

Also $$x = (v+\widetilde{w}\,)t\,,$$

und die Bewegung hat die Geschwindigkeit

$$w \;=\; v + \widetilde{w}$$

im System (x, t) ("Addition der Geschwindigkeiten").
Es sieht anders aus in $\mathbb{M}^2$:

Aus
$$\widetilde{x} = \widetilde{w}\,\widetilde{t}$$

folgt
$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; \widetilde{w}\frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

oder $x\left(1 + \frac{\widetilde{w}v}{c^2}\right) = vt + \widetilde{w}t$,

$$x \;=\; \frac{v + \widetilde{w}}{1 + \widetilde{w}v/c^2}\; t\;,$$

Also ist die relativistische Formel für die Addition der Geschwindigkeiten:

$$\boxed{w \;=\; \frac{v + \widetilde{w}}{1 + v\widetilde{w}/c^2}} \qquad .$$

Übung: Aus $0 < v < c$ und $0 < \widetilde{w} < c$ folgt

$$0 < \frac{v + \widetilde{w}}{1 + v\widetilde{w}/c^2} < c\;.$$

Beweis: Extremalaufgabe! Benütze Methoden aus der Analysis.