Die Euler–Instabilität, oder der hochgeschleuderte Tennisschläger

(Wohlen, 16.5. 2000)

"Kräftefreier Kreisel" = starrer Körper, der in einem Punkt O befestigt ist und sich um diesen Punkt O bewegt, ohne dass äussere Kräfte wirken.

a) Raumfestes Koordinatensystem mit Ursprung in O. (Vektoren werden im raumfesten Koordinatensystem durch Kleinbuchstaben bezeichnet)

b) Körperfestes Koordinatensystem mit Ursprung in O. (Vektoren werden im körperfesten Koordinatensystem durch Grossbuchstaben bezeichnet)

Zu jeder Zeit t gibt es eine Drehung $R(t)$ um eine Achse durch O, die das raumfeste Koordinatensystem in das körperfeste Koordinatensystem überführt.

Die Koordinaten $\vec{Q}$ eines Punktes des Körpers hängen also bezüglich des körperfesten Koordinatensystems nicht von der Zeit ab, während die Koordinaten $\vec{q}(t) = R(t)\,\vec{Q}$ dieses Punktes bezüglich des raumfesten Koordinatensystems von t abhängen.

Für alle t gibt es einen Vektor $\vec{\omega}(t)$, so dass

$$\dot{\vec{q}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{q}(t)$$

$\vec{\omega}(t)$ heisst die **Winkelgeschwindigkeit** in raumfesten Koordinaten. Es sei

$$\vec{\Omega}(t) = R(t)^{-1}\vec{\omega}(t)$$

die Winkelgeschwindigkeit in körperfesten Koordinaten.

$$\vec{\ell} = \text{Drehimpuls um } O \text{ in Raumkoordinaten}$$

Stellt man sich vor, dass der Körper aus endlich vielen starr untereinander verbundenen Massenpunkten $\vec{Q}_i$ der Massen μ_i besteht, so ist $\vec{\ell} = \sum \mu_i \, \vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i$

Lemma. *Für die kinetische Energie T gilt*

$$T = \tfrac{1}{2}\vec{\ell} \cdot \vec{\omega}(t)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} \sum \mu_i \, \|\dot{\vec{q}}_i\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \sum \mu_i \, (\vec{\omega} \times \vec{q}_i) \cdot \dot{\vec{q}}_i \\ &= \tfrac{1}{2} \sum \mu_i \, (\vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i) \cdot \vec{\omega} \\ &= \tfrac{1}{2}\vec{\ell} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Wegen Energie– und Drehimpulserhaltung bewegt sich $\vec{\omega}(t)$ auf der **invariablen Ebene**

$$\Pi = \Pi_T = \{\vec{x} \,|\, \vec{\ell} \cdot \vec{x} = 2T\}$$

$\vec{L}(t) = R(t)^{-1}\vec{\ell}$ Drehimpuls in Körperkoordinaten.

$$\begin{aligned} \vec{L}(t) &= \sum \mu_i \, R(t)^{-1}\big(\vec{q}_i(t) \times \dot{\vec{q}}_i(t)\big) \\ &= \sum \mu_i \, R(t)^{-1}\Big(\big(\vec{q}_i(t) \times \vec{\omega}(t)\big) \times \vec{q}_i(t)\Big) \\ &= \sum \mu_i \, \Big(\big(\vec{Q}_i \times \vec{\Omega}(t)\big) \times \vec{Q}_i\Big) \\ &= \sum \mu_i \, \big(\|\vec{Q}_i\|^2 \vec{\Omega}(t) - (\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{Q}_i)\, \vec{Q}_i\big) \\ &= \Theta \, \vec{\Omega}(t) \end{aligned}$$

wobei Θ die lineare Abbildung

$$\vec{X} \longmapsto \sum \mu_i \left(\|\vec{Q}_i\|^2 \vec{X} - (\vec{X} \cdot \vec{Q}_i)\, \vec{Q}_i \right)$$

ist. Θ heisst der **Trägheitstensor**. Er ist symmetrisch und positiv semidefinit.

$$T = \tfrac{1}{2}\vec{\ell} \cdot \vec{\omega}(t) = \tfrac{1}{2}\vec{L}(t) \cdot \vec{\Omega}(t) = \tfrac{1}{2}\Omega(t) \cdot \Theta\vec{\Omega}(t)$$

$\vec{\Omega}(t)$ bewegt sich also auf dem **Trägheitsellipsoid**

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E} = \{\, \vec{X} \,\big|\, \vec{X} \cdot \Theta\vec{X} = 2T \,\}$$

Poinsot's Beschreibung:

$$\vec{\omega}(t) = R(t)\vec{\Omega}(t) \in R(t)\,\mathcal{E}$$
$$\Longrightarrow \vec{\omega}(t) \in R(t)\,\mathcal{E} \cap \Pi$$

$\Theta\,\vec{\Omega} = \vec{L}$ ist Normalenvektor an $\mathcal{E}$ im Punkt $\vec{\Omega}$. Deshalb ist $\vec{\ell}$ ein Normalenvektor an $R(t)\,\mathcal{E}$ im Punkt $\vec{\omega}(t)$.

$\Longrightarrow$ Π ist in $\omega(t)$ tangential an $R(t)\,\mathcal{E}$.

$\Longrightarrow$ **Das Trägheitsellipsoid $R(t)\,\mathcal{E}$ rollt,**
ohne zu gleiten, auf der invariablen Ebene Π.

Die Kurve, die $\vec{\Omega}(t)$ auf $\mathcal{E}$ durchläuft, heisst **Polhodiekurve**, die Kurve, die $\vec{\omega}(t)$ auf Π durchläuft, heisst **Herpolhodiekurve**.

Die Eigenwerte von Θ heissen Hauptträgheitsmomente, die Achsen in Richtung der Eigenvektoren Haupt- trägheitsachsen. O.B.d.A.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

mit $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$.

Lemma. *Liegt der Körper ganz in der X_1, X_2–Ebene, so ist $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$.*

Beweis: Für $\nu = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\theta_\nu &= \hat{e}_\nu \cdot \Theta \hat{e}_\nu \\
&= \hat{e}_\nu \cdot \left(\sum \mu_i \left(\|\vec{Q}_i\|^2 \hat{e}_\nu - (\hat{e}_\nu \cdot \vec{Q}_i)\, \vec{Q}_i \right) \right. \\
&= \sum \mu_i \, \|\vec{Q}_i\|^2 - \sum \mu_i \, (\hat{e}_\nu \cdot \vec{Q}_i)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \\
&= \sum \mu_i \left(\|\vec{Q}_i\|^2 - (\hat{e}_1 \cdot \vec{Q}_i)^2 - (\hat{e}_2 \cdot \vec{Q}_i)^2 + (\hat{e}_3 \cdot \vec{Q}_i)^2 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

da $\hat{e}_3 \cdot \vec{Q}_i = 0$ und $\|\vec{Q}_i\|^2 = (\hat{e}_1 \cdot \vec{Q}_i)^2 + (\hat{e}_2 \cdot \vec{Q}_i)^2$. ■

Polhodiekurven auf dem Trägheitsellipsoid $\mathcal{E} = \{ \vec{X} \mid \theta_1 X_1^2 + \theta_2 X_2^2 + \theta_3 X_3^2 = 2T \}$:

Der Betrag des Drehimpulses

$$d = \|\vec{\ell}\| = \|\vec{L}(t)\| = \|\Theta \vec{\Omega}(t)\| = \sqrt{\theta_1^2 \Omega_1^2 + \theta_2^2 \Omega_2^2 + \theta_3^2 \Omega_3^2}$$

ist konstant. $\vec{\Omega}(t)$ bewegt sich also auf dem Durchschnitt von $\mathcal{E}$ mit dem Ellipsoid

$$\{ \vec{X} \mid \theta_1^2 X_1^2 + \theta_2^2 X_2^2 + \theta_3^2 X_3^2 = d^2 \}$$

Heterokline Orbits, wenn $d^2 = 2T\theta_2$. Sie erfüllen also

$$\begin{aligned}
\theta_1 X_1^2 + \theta_2 X_2^2 + \theta_3 X_3^2 &= 2T \\
\theta_1^2 X_1^2 + \theta_2^2 X_2^2 + \theta_3^2 X_3^2 &= 2T\theta_2
\end{aligned}$$

also auch $\theta_1(\theta_2 - \theta_1) X_1^2 - \theta_3(\theta_3 - \theta_2) X_3^2 = 0$. Sie liegen also im Durchschnitt von $\mathcal{E}$ mit den beiden Ebenen

$$P_\pm : \quad \sqrt{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)} X_1 = \pm \sqrt{\theta_3(\theta_3 - \theta_2)} X_3$$

Der hochgeschleuderte Tennisschläger

Approximation: Schläger eben, in $\hat{e}_1, \hat{e}_2$–Ebene.

Schreibe $\theta_1 = \varepsilon,\ \theta_2 = \theta$. Nach Lemma $\theta_3 = \theta + \varepsilon$.

Approximation: Bewegung auf dem heteroklinen Orbit $P_- \cap \mathcal{E}$, beginnend in $(0, \frac{d}{\theta}, 0)$, endend in $(0, -\frac{d}{\theta}, 0)$.

Einsetzen: $P_- = \{\, \vec{X} \mid \sqrt{\theta - \varepsilon}\, X_1 = -\sqrt{\theta + \varepsilon}\, X_3 \,\}$.

Lemma. *$E = P_- \cap \mathcal{E}$ ist eine Ellipse mit kleiner Hauptachse in $\hat{e}_2$–Richtung der Länge $\dfrac{d}{\theta}$ und grosser Hauptachse der Länge $\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+\varepsilon}}\,\dfrac{d}{\theta}$.*

Griff $\vec{G} = \hat{e}_1$ senkrecht zu kleiner Hauptachse $\hat{e}_2$, bildet Winkel von ungefähr 45^o mit grosser Hauptachse.

Bespannung ist in Ebene, die von $\vec{G}$ und $\vec{N} = \hat{e}_2$ aufgespannt wird.

Interessiert an Bewegung von $\vec{g}(t) = R(t)\,\vec{G}$ und $\vec{n}(t) = R(t)\,\vec{N}$.

Lemma.

$$\left|\vec{g}(t) \cdot \vec{\ell}\right| \le \varepsilon\,\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+\varepsilon}}\,\frac{d}{\theta}$$

d.h., der Griff bewegt sich in nahezu in einer Ebene durch O parallel zu Π.

Beweis:

$$\vec{g}(t) \cdot \vec{\ell} = R(t)\,\vec{G}(t) \cdot R(t)\,\vec{L}(t) = \vec{G}(t) \cdot \vec{L}(t)$$
$$= \hat{e}_1 \cdot \Theta\,\vec{\Omega}(t) = \theta_1 \Omega_1 = \varepsilon \Omega_1$$

und $|\Omega_1| \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+\varepsilon}}\frac{d}{\theta}$ (grosse Hauptachse). ■

Auf der invariablen Ebene Π verwenden wir Polarkoordinaten r, φ bezüglich der orthogonalen Projektion $\bar{O}$ von O.

Satz: Die Herpolhodiekurve H wird durch

$$r(\varphi) = \frac{c}{\cosh c\varphi} \frac{d}{\theta} \qquad \text{mit } c = \tfrac{\theta-\varepsilon}{\theta+\varepsilon}$$

beschrieben. Hat $\vec{\omega}(t) = R(t)\,\vec{\Omega}(t) \in H$ die Polarkoordinaten r, φ, so ist $\Omega_2^2 = \frac{d^2}{\theta^2} - \frac{r^2}{c^2}$.

Beweisskizze im Fall $\varepsilon = 0$:
$\vec{\omega} \in H$ habe Polarkoordinaten r, φ. Sei $\vec{\omega} = R\,\vec{\Omega}$ mit $\vec{\Omega} \in E$. Nach Pythagoras ist $\|\vec{\omega}\|^2 = r^2 + \frac{d^2}{\theta^2}$.
Abrollen $\Longrightarrow$ Die Tangente an H in $\vec{\omega}$ stimmt mit der Tangente an $R\,E$ in $\vec{\omega} = R\,\vec{\Omega}$ überein.
$\Longrightarrow$ Der Winkel zwischen H und dem Kreis mit Radius r um $\bar{O}$ in Π ist gleich dem Winkel zwischen E und der Kugel mit Radius $\|\vec{\omega}\| = \|\vec{\Omega}\|$ im Raum.
Rechnung ergibt: Dieser Winkel ist

$$\arcsin \sqrt{\frac{d^2/\theta^2 - r^2}{2\,d^2/\theta^2 - r^2}}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\left(\tfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2\left(1 - \tfrac{\theta^2}{d^2}\,r^2\right)$$

Deren Lösung gibt die behauptete Formel. ∎

Parametrisiere den heteroklinen Orbit durch φ, so dass

$$\vec{\Omega}\big|_{\varphi=\pm\infty} = (0, \pm\tfrac{d}{\theta}, 0), \qquad \Omega_2\big|_{\varphi=0} = 0$$

Lemma. *Im Limes $\varepsilon \to 0$ gilt*

a)

$$r(-\pi) = r(\pi) \approx 0,0864 \ \frac{d}{\theta}$$
$$\Omega_2\Big|_{\varphi=\pm\pi} \approx \pm 0,996 \ \frac{d}{\theta}$$

b) Der Winkel zwischen $-\vec{n}\big|_{\varphi=-\pi}$ und $\vec{n}\big|_{\varphi=+\pi}$ ist kleiner als 10^o.

c) Der Winkel zwischen $\vec{g}\big|_{\varphi=-\pi}$ und $\vec{g}\big|_{\varphi=+\pi}$ ist kleiner als $0,6^o$. Zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = -\pi$ dreht sich $\vec{g}$ einmal um etwa 360^o.

Beweis: (a) Einsetzen!
(b)

$$\vec{n}(\varphi) \cdot \tfrac{1}{\|\vec{\ell}\|}\vec{\ell} = \vec{N} \cdot \tfrac{1}{d}\vec{L}(\varphi) = \hat{e}_2 \cdot \tfrac{1}{d}\,\Theta\,\vec{\Omega}(\varphi) = \Omega_2(\varphi)$$
$$\Longrightarrow \angle(\pm\vec{n}\big|_{\varphi=\pm\pi}\,,\ \vec{\ell}) \leq \arccos\big(\Omega_2(\pi)\big) < 5^o$$

(c) Sei $\vec{\mathfrak{t}}(\varphi)$ der Einheitstangentialvektor an H in $\vec{\omega}(\varphi)$ und $\vec{\mathfrak{t}}'(\varphi)$ der Einheitstangentialvektor an E in $\vec{\Omega}(\varphi)$. Dann ist $R(t)\,\vec{\mathfrak{t}}'(\varphi) = \vec{\mathfrak{t}}(\varphi)$. Somit ist

$$\vec{g}(\varphi) \cdot \vec{\mathfrak{t}}(\varphi) = \vec{G} \cdot \vec{\mathfrak{t}}'(\varphi) = \hat{e}_1 \cdot \vec{\mathfrak{t}}'(\varphi)$$
$$\Longrightarrow \angle\big(\vec{g}(\varphi)\,,\ \vec{\mathfrak{t}}(\varphi)\big)\Big|_{\varphi=-\pi} \approx \ 45,2^o$$
$$\angle\big(\vec{g}(\varphi)\,,\ \vec{\mathfrak{t}}(\varphi)\big)\Big|_{\varphi=\pi} \approx 134,8^o$$

Da $\angle\big(\vec{\mathfrak{t}}(-\pi),\, \vec{\mathfrak{t}}(\pi)\big) \approx 89,8^o$, sind $\vec{g}(\varphi)\big|_{\varphi=\pm\pi}$ nahezu parallel. ■

Entschuldigung:

Meine Antwort auf die Frage, was passiert, wenn man den Schläger erst nach zwei Umdrehungen des Griffs wieder fängt, war falsch. Da man ja nicht genau auf dem heteroklinen Orbit ist, hat man nach einer Umdrehung eine analoge Situation wie am Anfang, d.h. bei der zweiten Umdrehung des Griffes dreht sich die Bespannung wieder um 180^o.