Von gut und schlecht gestellten Problemen und ihrer Bedeutung (zum Beispiel für die Gesundheit)*

U. Kirchgraber† und D. Stoffer
Departement Mathematik, ETH Zürich
kirchgra@math.ethz.ch

Ich freue mich, dass Sie sich in dieser Woche besonders intensiv mit Mathematik beschäftigen und dass ich einen kleinen Beitrag beisteuern darf. Ich werde Ihnen so etwas wie eine *mathematische Geschichte* erzählen.

Mein Thema ist mathematisch interessant, aber es hat auch viele Anwendungen. Daher beginne ich mit ein paar Bemerkungen über

1 Die Rolle der Mathematik in den Anwendungen

In den Naturwissenschaften versuchen wir, *Phänomene zu verstehen.* Wie entsteht das Wetter? Wieso fliegt ein Diskus weiter, wenn man ihn gegen, statt mit dem Wind wirft? Welchen Einfluss übt der Mond auf die Erde aus?

Der *Kern naturwissenschaftlicher Erkenntnisse* sind

$$\boxed{\text{Ursache-Wirkungs-Beziehungen.}}$$

Beispiel: Der Wechsel von Tag und Nacht ist eine Folge der Rotation der Erde um ihre eigene Achse.

Wir glauben heute nicht mehr, dass wir *abschliessend* verstehen können, wie *“die Welt funktioniert”*.
Aber es zeigt sich, dass wir uns doch *Vorstellungen und Bilder* machen können, die mindestens zum Teil recht tragfähig sind. Unser Leben wäre sehr anders, wenn das nicht so wäre.
Solche Bilder nennen wir

*Vortrag gehalten an der Kantonsschule Zürcher Unterland in Bülach am 18. April 2002.

†In Zusammenarbeit mit A. Kirsch, Universitt Karlsruhe. Wir verdanken auch die Mitarbeit von P. Spindler.

Modelle.

Von besonderem Interesse sind *quantitative* Ursache-Wirkungs-Beziehungen. Also *funktionale Zusammenhänge* zwischen Grössen.
Ein Beispiel: Zwischen Energie und Masse, entdeckte Einstein, gilt:

$$E = mc^2.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

Auf der Grundlage quantitativer Ursache-Wirkungs-Beziehungen können wir

mathematische Modelle

entwickeln. Sie sind *in der Sprache der Mathematik formuliert.*

Sie sind deshalb so interessant, weil sie mit mathematischen Instrumenten bearbeitet werden können. Das gesamte mathematische Instrumentarium steht zur Verfügung, um sie zu untersuchen, um Folgerungen aus ihnen zu ziehen. Das ist aus *zwei Gründen* wichtig.

1. Aus einem Modell Schlüsse ziehen heisst

   Möglichkeiten entdecken, Prognosen machen.

2. Der springende Punkt dabei ist:

   Die Mathematik ist das sicherste Instrument, um aus gewissen Tatsachen neue zu gewinnen.

So können wir sagen:

Mathematische Modelle sind *mentale Laboratorien,* in denen sehr verlässlich *probegehandelt* werden kann.

2 Zwillinge: direkte und inverse Probleme

Das waren allgemeine Bemerkungen. Nun möchte ich mein eigentliches Thema in Angriff nehmen.

Zu vielen *Fragen* gibt es eine *Umkehrfrage.* Manche Probleme treten paarweise auf: in einer *direkten* und einer dazu umgekehrten, *inversen* Form.

Ein *erstes Beispiel.* Wer multiplizieren kann, kann quadrieren. Das *direkte Problem* besteht darin, zu einer gegebenen Zahl x ihr Quadrat y zu bilden, also $y = x^2$.

Das dazu *inverse Problem* lautet: Gegeben eine Zahl y, man finde eine Zahl x, deren Quadrat gleich y ist. Oder anders gesagt: Man soll aus y die Wurzel ziehen.

Bei diesem Beispiel ist das inverse Problem *schwieriger* als das direkte. Das sieht man daran, dass das direkte Problem in den natürlichen Zahlen, also den Zahlen 1, 2, 3, ..., *immer* ausführbar ist. Hingegen ist die (positive) Wurzel aus einer natürlichen Zahl nur ausnahmsweise eine natürliche Zahl. Damit dieses inverse Problem immer lösbar ist, muss man die reellen Zahlen erfinden!

In der Mathematik begegnen einem solche Zwillingsprobleme häufig. Immer wenn eine *Operation*

$$K$$

gegeben ist, die aus einer Grösse x eine "neue" Grösse y "macht", so dass also

$$y = Kx \tag{1}$$

gilt, kann man die zugehörige *Umkehrfrage* stellen: Gegeben ein y, man finde ein x so dass die Gleichung (1) erfüllt ist.

In (1) repräsentiert x die *Ursache*, y die *Wirkung*, und K vermittelt den *Ursache-Wirkungs-Zusammenhang.* Das *inverse Problem* besteht darin, aus der Wirkung auf die Ursache zurück zu schliessen.

Nun stelle ich Ihnen zwei etwas angewandtere Beispiele vor.

2.1 Wie tief ist der Ziehbrunnen, wie hoch der Turm?

Inverse Problem entstehen in der Praxis aus der Aufgabe, eine Grösse ermitteln zu müssen, die sich *nicht unmittelbar*, *nicht direkt* bestimmen lässt. Die Idee ist, sich in einer solchen Situation auf einen *Effekt* zu stützen, bei dem sich die unbekannte Grösse *manifestiert.*

Die Frage nach der *Tiefe eines Sodbrunnens* oder *Schachts* oder *der Höhe eines Turms* ist eine solche Aufgabe.

Ausgangspunkt ist folgende Feststellung. Wenn Sie einen Gegenstand, zum Beispiel einen Stein, in einen Schacht fallen lassen, hören Sie nach einer gewissen Zeit einen Schlag.

Dieses Phänomen beruht auf folgenden Ursache-Wirkungs-Beziehungen.

a) Wenn ein Gegenstand losgelassen wird, fällt er zu Boden.

b) Durch den Aufprall des Gegenstandes am Boden entsteht ein Geräusch, das sich in der Luft fortpflanzt.

Man erwartet, dass zwischen der Tiefe H des Schachts und der (Warte-)Zeit T, die zwischen dem Loslassen des Steins und dem Hören des Aufschlags vergeht, ein Zusammenhang besteht.

Stellen wir uns die Aufgabe, ein *mathematisches Modell* für diesen Zusammenhang zu finden. Dazu benötigen wir *quantitative Versionen* der genannten Ursache-Wirkungs-Beziehungen a), b).

a) Galilei hat, wie Sie wissen, vor etwa 400 Jahren den sogenannten *Freien Fall* eines Gegenstandes auf der Erdoberfläche untersucht und gefunden, dass zwischen Fallzeit t_1 und durchfallener Höhe s_1 bei Vernachlässigung der Bremswirkung durch die Luft die Beziehung

$$s_1 = 5t_1^2$$

gilt. Dabei wird die Zeit in Sekunden und der Weg in Metern gemessen.

b) Für die Ausbreitung eines Geräusches in der Luft gilt unter gewissen Bedingungen

$$s_2 = 340t_2.$$

Dabei ist s_2 der zurückgelegte Weg, t_2 die dafür benötigte Zeit.

Legt man diese beiden Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu Grunde, folgt für den Zusammenhang zwischen Schachttiefe H und Wartezeit T die Formel:

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{1}{5}H} + \frac{1}{340}H} \tag{2}$$

$\sqrt{\frac{1}{5}H}$ ist die Zeit, die der Gegenstand braucht, bis er am Boden aufschlägt. $\frac{1}{340}H$ ist die Zeit, die verstreicht, bis das durch den Aufschlag erzeugte Geräusch das Ohr des Experimentators oben erreicht.

Die Formel (2) leistet folgendes.

Wenn die Tiefe H des Schachts bekannt ist, liefert sie eine Prognose für die Wartezeit T. Das ist die Lösung des *direkten Problems.*

Wenn die Tiefe H des Schachts *nicht bekannt* ist, kann aus der Kenntnis der Wartezeit T eine Prognose für H gewonnen werden. Dazu ist Gleichung (2) nach H aufzulösen. Das Resultat lautet:

$$\boxed{H = \frac{340T^2}{34 + T + \sqrt{1156 + 68T}}} \tag{3}$$

Das ist die Lösung des *inversen Problems.*

2.2 Ein antikes Designproblem: Wasseruhren

Etwas vom Faszinierendsten ist die Idee der Zeit. Auch ihre Materialisierung in Form von *Uhren zur Zeitmessung* ist ein interessantes Problem und der Motor für viele schöne, geniale und manchmal verrückte Ideen gewesen. Sonnen-, Sand- und Wasseruhren kennt man seit der Antike. In diesem Abschnitt geht es um Wasseruhren.

Eine Wasseruhr ist ein Gefäss mit einer kleinen Öffnung im Boden oder an der Seite. Zu Beginn ist das Gefäss ganz mit Wasser gefüllt. Dann entleert es sich allmählich durch die Öffnung.

Im Hinblick auf die Zeitmessung interessiert der Zusammenhang zwischen verflossener Zeit und Höhe des Wasserstandes: *Wie sinkt der Wasserstand im Laufe der Zeit?*

Die Antwort hängt von der Form der Wasseruhr ab. Bei einem zylindrischen Gefäss verläuft das Absinken des Wasserstandes anders, als wenn die Wasseruhr die Form eines Kegelstumpfes oder einer Vase hat, siehe Abbildung 1.

Wenn Sie in der Antike Uhrendesignerin gewesen wären, hätten Sie sich vielleicht folgende *Umkehrfrage* gestellt: *Welche Form muss die Wasseruhr haben, damit der Wasserstand in vorgegebener Weise sinkt? Zum Beispiel so, dass er in gleichen Zeiten um gleich viel abnimmt.*

Wieder haben wir *ein Paar zueinander inverser Probleme.* Das *direkte Problem* lautet: *Gegeben die Gestalt der Wasseruhr, wie sinkt der Wasserstand im Laufe der Zeit?*

Das *inverse Problem* lautet: *Bei welcher Gestalt der Wasseruhr fällt der Wasserstand in einer ganz bestimmten, im voraus festgelegten Weise?*

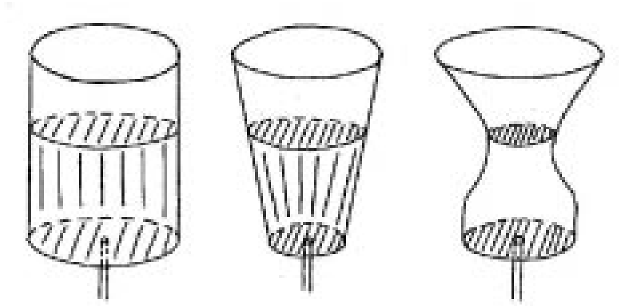

Figure 1: Verschiedene Gefässformen.

Beschränken wir uns auf Wasseruhren, die *rotationssymmetrisch* sind. Wenn wir ein solches Gefäss mit einer Ebene schneiden, die durch die Rotationsachse geht, erhalten wir die *Profilkurve* der Wasseruhr, siehe Abbildung 2. Umgekehrt kann man sich das Gefäss durch Rotation der Profilkurve um die Achse entstanden denken.
Wir müssen die *Profilkurve* der Wasseruhr *mathematisch erfassen* können. Dazu machen wir die Symmetrie- oder Rotationsachse zur y-Achse eines Koordinatensystems, siehe Abbildung 2, und beschreiben den im 1. Quadranten liegenden Teil der Profilkurve durch eine Funktionsgleichung

$$x = f(y).$$

Geläufiger für Sie wäre, wenn y in Abhängigkeit von x gegeben wäre. Die von mir gewählte Version ist bequemer. Mit der Wahl $f(y) = \sqrt{y}$ erhalten Sie eine Parabel, und das Gefäss hat die Form eine Paraboloids.

Ich komme zu einem weiteren wichtigen Punkt. Der *Auslaufvorgang* muss *mathematisch erfasst* werden können. Das geschieht mit folgender Grösse:

Es sei $g(y)$ die Zeit, die es braucht, bis die Wasseruhr ganz entleert ist, falls sie am Anfang bis zur Höhe y mit Wasser gefüllt war.

Falls H die maximale Füllhöhe der Wasseruhr bezeichnet, ist demnach

$$g(H) - g(y)$$

die Zeit, die vergeht, bis der Wasserstand auf die Höhe y abgesunken ist.

Es sind jetzt also zwei Funktionen im Spiel: Die Funktion f, die die Profilkurve, und damit die Form der Wasseruhr, beschreibt. Und die Funktion g, die den Auslaufvorgang erfasst.

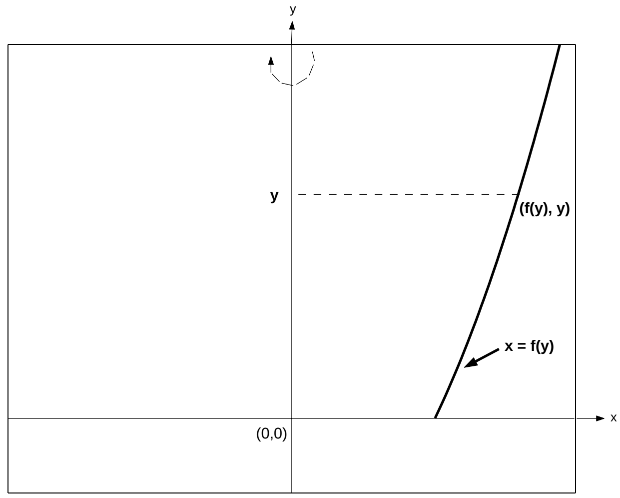

Figure 2: Die Profilkurve der Wasseruhr ist durch die Gleichung $x = f(y)$ gegeben. Das Gefäss entsteht durch Rotation der Profilkurve um die y-Achse.

Nun können wir das direkte und das dazu inverse Problem so formulieren. Beim *direkten Problem* geht es darum, aus der Kenntnis der Funktion f, also des Profils, die Funktion g, also den Auslaufvorgang, zu bestimmen.

Beim *inversen Problem* ist die Funktion g gegeben und die Funktion f gesucht.

Was ist der Unterschied zum Beispiel mit dem Schacht? Bei jenem Beispiel ging es um zwei *Zahlen*: Die Tiefe H des Schachts und die Wartezeit T, die zwischem dem Loslassen des Steines und dem Hören des Aufschlagens verstreicht. Der Zusammenhang wird durch die Formel (2), also durch eine Funktion, vermittelt.

Im Vergleich dazu hat das jetzige Beispiel eine *andere Qualität.* Jetzt geht es um zwei *Funktionen*: f und g. Die interessante Frage lautet: Welches ist in diesem Fall die Ursache-Wirkungs-Beziehung? Wie lautet der Zusammenhang zwischen f und g?

Das Auslaufen einer Flüssigkeit aus einem Gefäss mit einer Öffnung ist ein *physikalischer Vorgang.* Er ist schon im 17. Jahrhundert von Evangelista Torricelli (1608-1647), einem Schüler von Galilei, untersucht worden. Dabei hat Torricelli folgendes entdeckt.

Bezeichnet y die Höhe des Wasserstandes in einem Gefäss, so ist die Geschwindigkeit v, mit der Wasser aus einer kleinen Öffnung im Boden des Gefässes austritt, gleich

$$v = \sqrt{20y}. \tag{4}$$

Dabei wird die Höhe in Metern, die Zeit in Sekunden gemessen.

Wenn man nun *bilanziert*, dass bei einem geringfügigen Absinken des Wasserstandes dieses Wasser ja mit der nach (4) bestimmten Geschwindigkeit aus der kleinen Öffnung im Boden austritt, erhält man (mit den Mitteln der sogenannten *Differentialrechnung*) den folgenden Zusammenhang zwischen den Funktionen f und g:

$$\boxed{g'(y) = k\frac{[f(y)]^2}{\sqrt{y}}, \qquad \text{mit } k = \frac{\pi}{\sqrt{20}a}.} \tag{5}$$

Dabei bezeichnet a die Fläche der Öffnung im Boden des Gefässes und $g'(y)$ ist die sogenannte *erste Ableitung* der Funktion $g(y)$.

(5) ist die *Ursache-Wirkungs-Beziehung* in diesem Beispiel. Da man aus der Funktion f gemäss (5) die *Ableitung* von g erhält, muss man, um g zu finden, die Funktion auf der rechten Seite von (5) noch, wie man sagt, *integrieren.*

Beispiel 1 *Wählt man zum Beispiel die Profilfunktion $f(y) = \sqrt{y}$, erhält man aus (5) für den Auslaufvorgang*

$$g(y) = \frac{2}{3}k\sqrt{y^3}.$$

Nun zum *inversen Problem.* Es lautet: Gegeben g, gesucht f. Seine Lösung ist

$$\boxed{f(y) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt[4]{y}\,\sqrt{g'(y)}.} \tag{6}$$

Um sie zu erhalten, muss man die Funktion g *differenzieren.*

3 Computertomografie

Die bisher diskutierten Beispiele von direkten und dazu inversen Problemen haben keine grosse praktische Bedeutung.
Das ist ganz anders beim nun folgenden Beispiel, der sogenannten

Computertomografie.

Es handelt sich hierbei um eine der wichtigsten neueren medizinischen Diagnosetechniken. Sie, und Varianten davon, wie etwa die Kern-Spin-Tomografie (englisch MRI für Magnetic Resonance Imaging) beruhen auf einem cleveren Zusammenspiel von

High-Tech, Informationstechnologie & Mathematik.

Dass es sich bei einem Computertomografen um ein High-Tech-Gerät handelt, sieht man auf Anhieb, und dass der Computer eine wichtige Rolle spielt, erkennt man, wenn man sieht, wie die Bilder, um die es geht, auf dem Computerschirm entstehen. Dass alles ohne Mathematik nicht funktionieren würde, erschliesst sich dem blossen Auge hingegen nicht so unmittelbar – es bleibt verborgen. Aber es lässt sich im Prinzip leicht erklären.

Im Jahr 1895 hat Wilhelm Conrad Röntgen in Würzburg seine berühmten Strahlen entdeckt. Röntgenstrahlen sind unsichtbar. Sie können aber Gegenstände durchdringen. Wie Lichtstrahlen schwärzen sie Filme. Deshalb kann mit Hilfe von Röntgenstrahlen das Innere des Körpers sichtbar gemacht werden. Röntgenbilder sind jedoch nicht so leicht zu "lesen", weil sich die Bilder von Knochen und Organen *überlagern.*

Diese Problematik vermeiden Techniken wie die Computertomografie, weil sie *Bilder von dünnen Gewebeschichten* liefern. Ein solches Bild zeigt, was man sehen würde, wenn man den Körper oder Gegenstand, um den es geht, *durchschneiden* und die Schnittfäche anschauen würde. Um einen räumlichen Bereich zu erfassen und Erkrankungen wie Blutungen oder Tumore ausschliessen oder erkennen und lokalisieren zu können, müssen allerdings viele parallele und nahe nebeneinander gelegene Schichten abgebildet werden.

Wie entsteht ein Schichtbild?

Um es deutlich zu sagen - es handelt sich nicht um eine Fotografie!

Das Bild wird vielmehr Punkt für Punkt aufgrund von *Messungen errechnet.*

Es beruht darauf, dass Knochen, Flüssigkeiten, gesundes und krankes Gewebe unterschiedlich dicht sind. Durchdringt ein Röntgenstrahl einen Stoff, wird er abgeschwächt und zwar umso mehr, je dichter das Material ist.

Stellen wir uns eine dünne inhomogene Gewebeschicht vor, siehe Abbildung 3. Inhomogen heisst, dass die Gewebeschicht an verschiedenen Stellen unterschiedlich dicht ist. Der eingezeichnete Röntgenstrahl wird bei seinem Gang durch das Gewebe sukzessive mehr abgeschwächt, stärker in Zonen hoher Dichte, weniger stark in Gegenden geringerer Dichte.

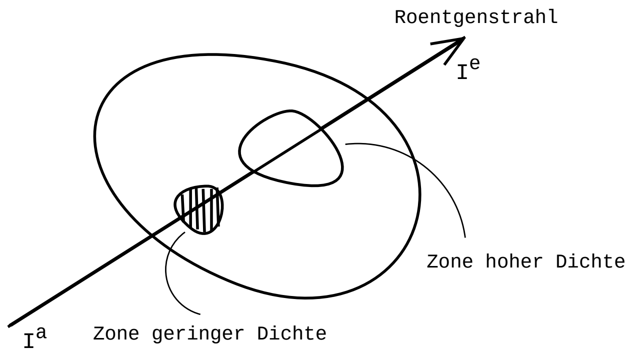

Figure 3: Dünne Gewebeschicht, Röntgenstrahl

Der eingezeichnete Röntgenstrahl hat vor Eintritt in die Gewebeschicht eine bekannte Anfangsintensität I^a. Nach dem Austritt aus der Gewebeschicht kann die noch vorhandene Restintensität I^e gemessen werden.

Wenn die Dichte des Gewebes entlang der Strahlrichtung homogen wäre, könnte man aus dem Verhältnis von I^e zu I^a die Dichte des Gewebes ermitteln. Da das typischerweise nicht der Fall ist, beinhaltet das Verhältnis von I^e zu I^a nur eine "mittlere Information" über den Dichteverlauf entlang des betrachteten Strahls.

Die Grundidee ist, sehr viele Röntgenstrahlen in viele verschiedene Richtungen durch die Gewebeschicht zu schicken. Bei jedem Strahl wird die Verminderung der Intensität gemessen, siehe Abbildung 4. Dann geht es darum, aus dieser Information die Dichteverteilung in der Gewebeschicht durch Rechnung zu bestimmen, zu *rekonstruieren*, wie man sagt. So erhält man ein "Dichteprofil" der untersuchten Gewebeschicht, die bildlich dargestellt wird, wobei hellen Stellen in Anlehnung an klassische Röntgenbilder hohe Dichten, dunklen Stellen geringe Dichten entsprechen.

Wir haben es auch bei diesem Beispiel wieder mit einem *Paar zueinander inverser Probleme* zu tun.

Das *direkte Problem* lautet: Gegeben die Dichteverteilung einer dünnen Gewebeschicht, gesucht die Intensitätsabschwächung, die durch die Schicht verlaufende Röntgenstrahlen erfahren.

Das *inverse Problem* besteht in der Bestimmung der Dichteverteilung, wenn man weiss, wie stark Röntgenstrahlen, die durch die Schicht verlaufen, abgeschwächt werden.

Eigentlich käme jetzt der Moment, ein *mathematisches Modell für die Computertomografie*

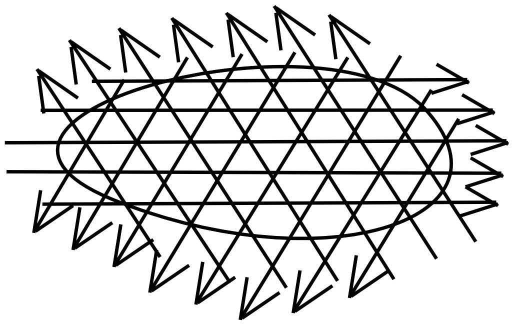

Figure 4: Dünne Gewebeschicht, viele Röntgenstrahlen.

zu entwerfen. Ich will das aus Zeitgründen nicht tun. Es geht in ähnlicher Weise wie bei den vorher besprochenen Beispielen[1].

Sobald ein mathematisches Modell vorliegt, ist die Grundsatzfrage, ob das *inverse Problem überhaupt lösbar* ist. (Nicht jedes inverse Problem ist immer lösbar, wie Sie sich erinnern.) Und falls die Antwort positiv ausfällt, muss man sich fragen: *Kann die Rechnung zuverlässig und effizient durchgeführt werden?*

Erstaunlicherweise hat sich der österreichische Mathematiker

Johann Radon (1887-1956)

schon im Jahre 1917 mit der Grundsatzfrage befasst, zu einer Zeit also, als eine Anwendung à la Computertomografie noch nicht einmal denkbar war. Er untersuchte das Problem *ohne konkreten Grund*, einfach aus *intellektueller Neugier*. Er fand eine positive Antwort auf die Grundsatzfrage, indem er eine *Formel* herleitete, mit der man die *gesuchte Dichteverteilung* im Prinzip berechnen kann.

Die Fragestellung von Radon und seine Lösungsformel wurden ein halbes Jahrhundert später, als *A.M. Cormack* und *G.N. Houndsfield* die Computertomografie erfanden, wieder aktuell.

1979 erhielten Cormack und Houndsfield für ihre bahnbrechende Arbeit den Nobelpreis für Medizin. 1991 wurde auch der Vater der Kern-Spin-Tomografie, der ETH-Chemiker *R. Ernst,* mit einem Nobelpreis ausgezeichnet.

[1]Ein sehr einfaches mathematisches Modell der Computertomografie finden Sie im letzten Kapitel des Leitprogramms *Lineare Gleichungssysteme*. Dieses Leitprogramm steht auf dem Bildungsserver EducETH der ETH-Zürich öffentlich zur Verfügung: http://www.educeth.ch/mathematik/leitprog/lingl/

Es genügt nicht, wenn ein inverses Problem wie die Computertomografie "im Prinzip" gelöst werden kann. Die Lösung muss darüber hinaus

- *zuverlässig*

und

- *effizient*

ermittelt werden können.

Der zweite Punkt ist klar: Da ja die Bilder von vielen parallelen Gewebeschichten benötigt werden, muss die Berechnung eines einzelnen Bildes schnell erfolgen können. Man möchte nicht tage- oder gar monatelang auf den Befund warten müssen, und es sind auch ökonomische Gesichtspunkte im Auge zu behalten.

Ich will mich im folgenden mit der *Frage der Zuverlässigkeit der Rekonstruktion* auseinander setzen, weil hier ein wichtiger und interessanter neuer Aspekt ins Spiel kommt.

4 Gut und schlecht gestellte Probleme

Rekapitulieren wir die Ausgangslage.

Wir gehen aus von einem *mathematischen Modell* eines

$$\boxed{\text{Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs.}}$$

Das heisst, dass einer *Ursache*, repräsentiert durch eine mathematische Grösse x,

in *ganz bestimmter Weise*

eine *Wirkung*, repräsentiert durch eine mathematische Grösse y, entspricht.

x, y können dabei *Zahlen, Funktionen, Vektoren* oder weitere mathematische Objekte sein.

Die *Operation*, die aus dem x das y "macht", wollen wir

$$K$$

nennen. Man bezeichnet K auch als *Operator.*

Die Lösung des *direkten Problems* besteht darin, aus einem gegebenen x durch Anwenden des Operators K das y zu bestimmen, also

$$y = Kx$$

zu berechnen.

Das *inverse Problem* dagegen besteht darin, zu einem gegebenen y ein x zu finden, so dass

$$Kx = y \tag{7}$$

gilt, d.h. die Gleichung (7) bei gegebenem y nach x aufzulösen. Nehmen wir an, dass das geht und dass die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Bei der *Aufgabe mit dem Schacht* entspricht x der Tiefe des Schachts und y der Wartezeit, also der Zeit zwischen dem Loslassen des Steins und dem Hören des Aufschlags.

Bei der Wasseruhr entspricht x dem Profil f des Gefässes und y der Funktion g, die den Auslaufvorgang erfasst.

Nun kommt der weitere Aspekt ins Spiel.

In der Welt mathematischer Modelle können wir natürlich die Annahme machen, dass vorkommende Grössen *exakt* bestimmbar sind. Im ersten Beispiel heisst das, dass entweder die Schachttiefe x oder die Wartezeit y *exakt* bestimmt werden kann. Wir können eine solche Annahme als *Teil der Idealisierung* betrachten, die mit der Bildung eines mathematischen Modells sowieso immer einhergeht. In vielen Situationen ist das gerechtfertigt.

Gewisse inverse Probleme haben leider die unangenehme Eigenschaft, dass genau diese Annahme zu *ganz ungenauen Rekonstruktionen* führt. In solchen Situationen muss man daher

$$\boxed{\text{das Phänomen der Mess}\textit{un}\text{genauigkeit}}$$

mit in die Betrachtung einbeziehen, *mitmodellieren.* Das kann auf verschiedene Weise geschehen. Ich schlage Ihnen folgendes Vorgehen vor.

Wir stellen uns vor, der Brunnen habe die "theoretische" oder "wahre" Tiefe x^*. Zu ihr gehört gemäss unserem Modell die "theoretische" oder "wahre" Wartezeit y^*, und der Zusammenhang zwischen beiden wird durch das mathematische Modell der Ursache-Wirkungs-Beziehung gegeben, also durch eine Beziehung des Typs

$$y^* = Kx^*.$$

Modellieren wir nun zuerst das *direkte Problem* unter Berücksichtigung von Mess*un*genauigkeit. Die Vorstellung ist, dass die Grösse x^* nicht exakt bestimmbar ist, dass vielmehr nur eine *Näherung*

$$\bar{x}$$

zur Verfügung steht, die man in der Praxis durch *Messung* erhält, und die sich mehr oder weniger von x^* unterscheidet, je nach Qualität der verwendeten Messgeräte und dem Aufwand, der beim Messen getrieben wird.

Statt der "theoretischen" oder "wahren" Wartezeit $y^* = Kx^*$ wird aus der Messung $\bar{x}$ von x^*

$$K\bar{x} \tag{8}$$

berechnet, in der Hoffnung, dass $K\bar{x}$ eine gute Näherung für y^* ist.

Die entscheidende Frage ist, *was die Operation K mit einem kleinen Fehler in x macht*, ob sie den Fehler

a) *vergrössert, "aufbläht"*

oder

b) mehr oder weniger unverändert *"weitergibt"*, oder vielleicht sogar *vermindert.*

Im ersten Fall erhalten wir voraussichtlich eine *unbrauchbar schlechte Approximation* für y^*, während im zweiten Fall das Resultat sehr wohl zufriedenstellend sein kann.

Für die Praxis wichtiger ist die analoge Betrachtung für das *inverse Problem.*

Ausgangspunkt ist eine "theoretische" Ursache x^* und ihre "theoretische" Wirkung y^*, und eine durch *Messung* ermittelte Näherung

$$\bar{y} \quad \text{für} \quad y^*.$$

Indem wir die Lösung $\bar{x}$ der Gleichung

$$Kx = \bar{y}$$

bestimmen, erhalten wir nur eine *approximative Rekonstruktion* der "theoretischen" Ursache x^*.

Analog zu oben stellt sich die Frage, wie der Operator K wirkt. Ob K

a) die Abweichung von $\bar{y}$ zu y^* *aufbläht* und die approximative Rekonstruktion $\bar{x}$ somit *stark* von der "theoretischen" Ursache x^* *abweich*t, oder

b) ob sich der Rekonstruktionsfehler $x^* - \bar{x}$ *in akzeptablen Grenzen* hält.

Die *beunruhigende Botschaft* ist: Es gibt einen fatalen Link zwischen dem Verhalten des direkten und des inversen Problems, eine Art *Unschärfe-Relation*! Es gilt nämlich: *Je "gutartiger" das direkte Problem ist, desto "bösartiger" verhält sich das dazu inverse Problem*! Man sagt dann, das inverse Problem sei

"schlecht gestellt", im Englischen: *"ill-posed"*.

Was kann man tun, wenn ein schlecht gestelltes inverses Problem vorliegt?

Man befürchtet natürlich, dass eine *drastische Erhöhung der Messgenauigkeit*, das heisst eine massive Verkleinerung des Messfehlers $y^* - \bar{y}$, der einzige Ausweg ist, wenn überhaupt. Bei realen Problemen würde man allerdings oft rasch an Grenzen stossen, weil die benötigte Messgenauigkeit gar nicht zu erreichen ist, oder nur um einen Preis, den man nicht bezahlen möchte.

Die *Pointe meiner Geschichte ist*, dass die Schwierigkeit durch eine verblüffende mathematische Idee zwar nicht eliminiert, aber immerhin *gemildert* werden kann, wodurch die *Ansprüche an die Messtechnologie* massgeblich *reduziert* werden.

Bevor ich diese bahnbrechende Idee des russischen Mathematikers

A. N. Tikhonov (1906-1993)

vorstelle, will ich noch ein *weiteres inverses Problem* einführen, an dem ich das Phänomen der schlecht-Gestelltheit und den Umgang damit gut demonstrieren kann.

Es ist nämlich so, dass inverse Probleme *unterschiedlich schlecht gestellt* sind. Wie gut oder schlecht gestellt das *Brunnenproblem* ist, können Sie, wenn Sie Lust haben, selber untersuchen. Das *inverse Wasseruhr-Designproblem* erweist sich als *sehr schlecht gestellt.* Das *Computertomografie-Problem* hingegen ist nur *moderat schlecht gestellt.*

5 Welche Form hat die Erde oder Ein richtig schlecht gestelltes Problem!

Was für eine Gestalt hat die Erde?

Natürlich wissen Sie, dass die Erde grosso modo eine Kugel ist. Sie ist aber an den Polen etwas abgeplattet, und die Dichteverteilung im Innern ist keineswegs homogen. Beides wirkt sich aus, zum Beispiel auf die *Bahnen von Satelliten*, also auf die Bewegungen von Kommunikations-, Wetter-, Vermessungssatelliten, usw. Es besteht daher auch ein wirtschaftliches *Interesse*, die *Dichteverteilung unseres Planeten* genau zu kennen, um die Satellitenbahnen genau prognostizieren zu können.

Dieses Problem ist offensichtlich *nicht* auf *direktem Weg lösbar* - wir können die Erde ja nicht einfach auseinander schneiden, dann überall Dichteproben nehmen und wieder zusammen setzen.

Wir brauchen ein *indirektes Verfahren*, à la Computertomografie. Bei der Computertomografie offenbart sich die Dichteverteilung einer Gewebeschicht in der Abschwächung, die Röntgenstrahlen erfahren, die durch das Gewebe hindurchgehen.

Für die folgenden Überlegungen stützen wir uns auf einen anderen Effekt. Nach Newton *ziehen sich zwei Körper* an.

Wenn die zwei Körper geringe Ausdehnung haben (man spricht dann von *Massenpunkten*), ist die Anziehungskraft F, die sie aufeinander ausüben, gleich

γ mal das Produkt der beiden Massen, dividiert durch das Quadrat ihres Abstandes

Das ist der Inhalt des berühmten *Newtonschen Gravitationsgesetzes.*

γ ist die sogenannte *Gravitationskonstante.* Wir denken uns die physikalischen Einheiten so gewählt, dass γ den Wert 1 hat.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz hat zur Folge, dass ein kleiner *Probekörper*, den wir irgendwo ausserhalb der Erde platzieren, durch die Erde eine

gewisse Anziehungskraft F erfährt,

siehe Abbildung 5. Man kann F berechnen, wenn man die Dichteverteilung der Erde kennt. Das ist das jetzt unser *direktes Problem*: Gegeben die Dichteverteilung der Erde, zu berechnen ist die Anziehungskraft F, die ein Probekörper an einem beliebigen Ort ausserhalb der Erde durch sie erfährt.

Das *inverse Problem* besteht darin, aus der Kenntnis der Anziehungskraft F, die ein Probekörper an einem beliebigen Ort ausserhalb der Erde erfährt, die Dichteverteilung der Erde zu rekonstruieren.

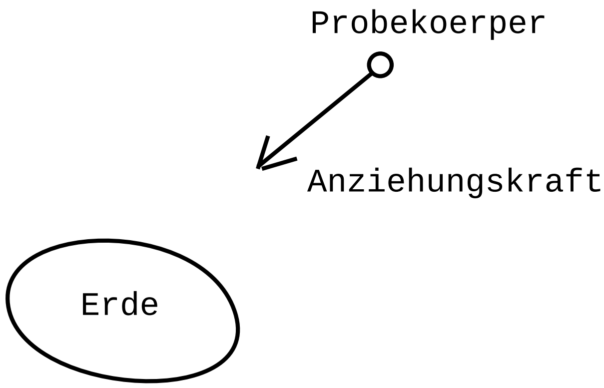

Figure 5: Anziehungskraft der Erde auf eine Probemasse

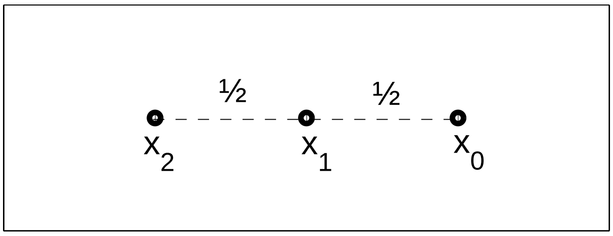

Figure 6: Dreigliedrige "Kette" von Massenpunkten mit Massen x_0, x_1, x_2.

Ich will hier nicht untersuchen, ob das eine wirklich praktikable Methode ist, um die Dichteverteilung der Erde zu bestimmen. Für die grundsätzlichen Überlegungen dieses Vortrags ist sie interessant.

Allerdings will ich die Fragestellung vereinfachen, sie auf ihren wesentlichen Kern reduzieren.

5.1 Eine Kette von Massenpunkten

Statt der komplizierten drei-dimensionalen Erde betrachten wir ein einfaches Objekt: Einen (inhomogenen) *Stab*, den wir uns idealisierenderweise eindimensional denken. Und weil man sich einen Stab quasi als *Perlenkette* von Massenteilchen vorstellen kann, vereinfachen wir weiter und schauen uns eine *"Kette"* von zunächst nur 3, später mehr Massenpunkten an. Die 3 Massenpunkte

$$x_0,\ x_1,\ x_2$$

seien geradlinig im Abstand $\frac{1}{2}$ von einander angeordnet, siehe Abbildung 6. Dieses simple Objekt spielt also jetzt die Rolle der Erde.

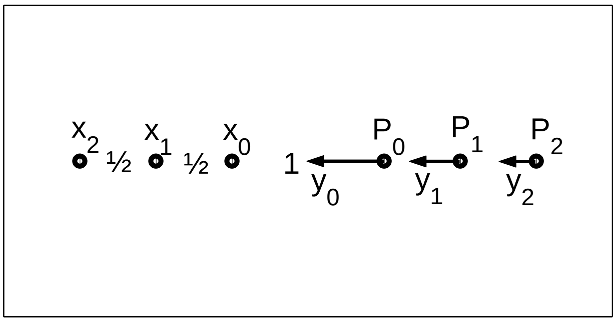

Figure 7: Eingezeichnet ist die Anziehungskraft y_0, bzw. y_1, bzw. y_2, die die dreigliedrige Kette auf einen Probekörper am Punkt P_0, bzw. P_1, bzw. P_2 ausübt.

Weiter werden wir die Wirkung der Kette nicht überall im Raum, sondern nur an drei Punkten

$$P_0,\ P_1,\ P_2$$

betrachten, siehe Abbildung 7. Wir nennen diese Punkte *Aufpunkte.*

Die Massen x_0, x_1, x_2 und die Punkte P_0, P_1, P_2 liegen auf einer Geraden. Der Abstand zwischen x_0 und P_0 ist 1, der Abstand zwischen P_0 und P_1, bzw. zwischen P_1 und P_2 ist jeweils $\frac{1}{2}$.

Es geht jetzt darum, die Anziehungskraft zu bestimmen, die ein Probekörper der Masse 1 durch die Kette erfährt, wenn er sich im Punkt P_0, bzw. P_1, bzw. P_2 befindet.

Berechnen wir zum Anwärmen, sagen wir, die Anziehungskraft der Masse x_2 auf den Probekörper, wenn er sich im Punkt P_1 befindet. Der Abstand der beiden Massen beträgt

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Weil die Gravitationskonstante den Wert 1 hat und auch die Masse des Probekörpers 1 ist, folgt für die gesuchte Kraft

$$1 \cdot \frac{1 \cdot x_2}{(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2})^2} = (\frac{2}{2+2+1})^2 x_2.$$

Analog erhalten wir für die Anziehungskraft der Masse x_j auf den Probekörper der Masse 1, wenn wir ihn am Punkt P_i platzieren,

$$(\frac{2}{j+2+i})^2 x_j.$$

Die *Gesamtkraft* y_i, die die Probemasse am Punkt P_i durch die dreigliedrige Kette erfährt, ist die Summe der Kräfte, die die Massenpunkte x_0, x_1, x_2 auf sie ausüben. Wir erhalten, je nachdem ob sich die Probemasse im Punkt P_0, oder im Punkt P_1, oder im Punkt P_2 befindet, der Reihe nach

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_0 &=& (\frac{2}{2})^2 x_0 + (\frac{2}{3})^2 x_1 + (\frac{2}{4})^2 x_2 \\ y_1 &=& (\frac{2}{3})^2 x_0 + (\frac{2}{4})^2 x_1 + (\frac{2}{5})^2 x_2 \\ y_2 &=& (\frac{2}{4})^2 x_0 + (\frac{2}{5})^2 x_1 + (\frac{2}{6})^2 x_2 \end{array}} \tag{9}$$

Die Gleichungen (9) sind die *Ursache-Wirkungs-Beziehung* für unser Problem.

5.2 Ein Rechenexperiment

Es ist aufschlussreich, ein *Zahlenbeispiel* durchzurechnen.

Ausgangspunkt (oder Hintergrund) ist eine "theoretische" oder "wahre" Kette mit Massen x_0^*, x_1^*, x_2^*. Für die Rechnung nehmen wir an, dass alle drei Massen *gleich gross* sind und dass die *Gesamtmasse 1* ist, das heisst wir setzen:

$$\boxed{x_0^* = x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3} = 0.3333\ldots}$$

Diese Kette erzeugt Gravitationskräfte y_0^*, y_1^*, y_2^* an den Aufpunkten P_0, P_1, P_2. Man erhält sie, indem man in den Gleichungen (9) x_0 durch x_0^*, x_1 durch x_1^*, x_2 durch x_2^* ersetzt. Das Resultat ist:

$$\boxed{y_0^* = \frac{61}{108} \approx 0.564815,\ y_1^* = \frac{769}{2700} \approx 0.284815,\ y_2^* = \frac{469}{2700} \approx 0.173704}$$

Und nun zum *Rekonstruktionsproblem*.

Wir gehen dazu davon aus, dass die in den Aufpunkten P_0, P_1, P_2 wirkenden Gravitationskräfte durch Messung ermittelt werden.

Das heisst man hat, je nach Qualität der Messung, von

$$y_0^*,\ y_1^*,\ y_2^*$$

mehr oder weniger abweichende *Messwerte*

$$\bar{y}_0,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2$$

zur Verfügung.

Wir *simulieren* solche Messwerte, indem wir die exakten Werte y_0^*, y_1^*, y_2^* *geringfügig verändern.* Wir wählen zum Beispiel folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_0 &= \tfrac{61}{108} - \tfrac{1}{1000} \approx 0.563815 \\
\bar{y}_1 &= \tfrac{769}{2700} + \tfrac{1}{1000} \approx 0.285815 \\
\bar{y}_2 &= \tfrac{469}{2700} - \tfrac{1}{1000} \approx 0.172704
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir in (9) für y_0, y_1, y_2 die Werte $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ ein und lösen das entstehende Gleichungssystem nach x_0, x_1, x_2 auf - was sollten wir sonst tun? Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_0 &\approx 0.207622 \\
\bar{x}_1 &\approx 0.999437 \\
\bar{x}_2 &\approx -0.352005
\end{aligned}$$

Dieses Resultat ist eine *böse Überraschung.* Es ist nicht nur ungenau - es ist sogar *unphysikalisch*, weil es eine *negative* Masse liefert!

5.3 Analyse

Wie ist das möglich?

Erinnern Sie sich an folgende Schwierigkeit beim Konstruieren im Geometrieunterricht? Wenn zwei Geraden sich unter einem flachen Winkel schneiden, ist es schwierig, den Schnittpunkt genau zu lokalisieren, besonders, wenn der Bleistift nicht gut gespitzt ist und die Linien ein bisschen "dick geraten" sind. Man spricht dann von "schleifenden Schnitten". Ich behaupte: Wir haben es genau mit diesem Phänomen zu tun!

Durch die drei Gleichungen in (9) werden *3 Ebenen* im Raum definiert. Nehmen Sie die erste Gleichung. Sie definiert eine Ebene im x_0, x_1, x_2 -Raum. Die Koeffizienten von x_0, x_1, x_2 sind die Komponenten ihres *Normalenvektors* $\vec{n}_0$. Durch $\vec{n}_0$ ist die Ebene bis auf Parallelverschiebung festgelegt. Die Konstante y_0 in der Ebenengleichung bestimmt, um welche dieser zueinander parallelen Ebenen es sich handelt.

Analoges gilt für die 2. und die 3. Gleichung von (9).

Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man die *Winkel* zwischen den Normalen berechnen. Man findet folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
\text{Winkel}(\vec{n}_0, \vec{n}_1) &\approx 6.9° \\
\text{Winkel}(\vec{n}_0, \vec{n}_2) &\approx 11.3° \\
\text{Winkel}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &\approx 4.4°
\end{aligned}$$

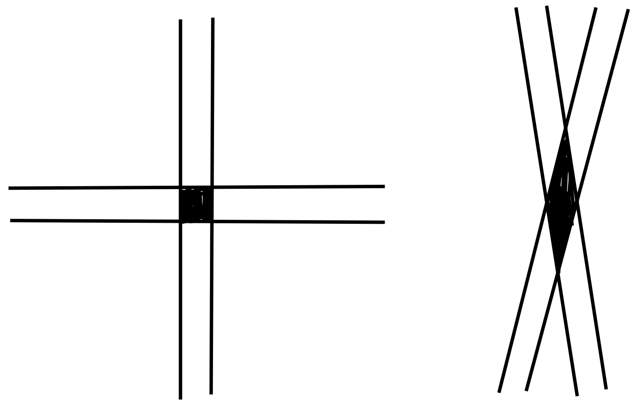

Figure 8: Schnitte von parallelen Geraden. a. Geraden stehen senkrecht, b. Geraden sind fast parallel.

Die Winkel sind *recht klein*, die Ebenen sind in der Tat *fast parallel*.

Das wäre nicht weiter schlimm, wenn die Konstanten y_0, y_1, y_3 in den Ebenengleichungen *exakt* bekannt wären. Das ist aber gerade *nicht* der Fall, weil sie durch Messung gewonnen werden und daher mit Fehlern behaftet sind.

Man muss daher eigentlich *drei Scharen von parallelen Ebenen* betrachten und sie *tripelweise* mit einander schneiden. Wenn nun die Ebenenscharen fast parallel sind, können *verschiedene Schnittpunkte recht weit auseinander liegen*, selbst wenn die drei "Pakete" paralleler Ebenen eher *"dünn"* sind. Das illustriert eine Dimension tiefer Abbildung (8).

Machen wir zur Bestätigung folgendes Experiment: Wir varriieren die Werte von y_0, y_1, y_2 im Gleichungssystem (9) geringfügig und schauen, wie gross die Schwankungen in den Lösungen x_0, x_1, x_2 werden können. Für die obigen Werte von y_0^*, y_1^*, y_2^* und mit $\delta = 0.001$ findet man:

$$\begin{array}{rcl} y_0 & \in & [y_0^* - \delta, y_0^* + \delta] \\ y_1 & \in & [y_1^* - \delta, y_1^* + \delta] \\ y_2 & \in & [y_2^* - \delta, y_2^* + \delta] \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_0 & \in & [0.20, 0.46] \\ x_1 & \in & [-0.34, 1.0] \\ x_2 & \in & [-0.36, 1.1] \end{array}$$

Man sieht, dass *eine sehr kleine Schwankungsbreite* bei den y's eine etwa *um den Faktor 1000 grössere* Schwankungsbreite bei den x-en nach sich zieht!

In der *Numerischen Mathematik* sagt man, das lineare Gleichungssystem (9) sei

$$\boxed{\text{schlecht konditioniert.}}$$

In der *Theorie der Inversen Probleme* spricht man, wie gesagt, von einem

$\boxed{\text{schlecht gestellten Problem.}}$

Ein andere gute Formulierung ist: Die Lösungen x_0, x_1, x_2 des linearen Gleichungssystems (9) hängen $\boxed{\text{sensitiv}}$, d.h. $\boxed{\text{empfindlich}}$, von den Daten y_0, y_1, y_2 ab. Gemeint ist, dass geringfügige Veränderungen der y's zu vergleichsweise sehr verschiedenen Lösungen des Gleichungssystems (9) führen.

5.4 Ein gute Idee

Die Frage ist, ob die *Erhöhung der Messgenauigkeit* der *einzige Ausweg* ist, um bei einem schlecht gestellten Problem eine brauchbare (Näherungs-)Lösung zu erhalten. Das hätte dann zur Folge, dass solche Probleme de facto häufig unlösbar wären, weil die nötige Messgenauigkeit aus technischen Gründen gar nicht erreichbar ist, oder nur mit einem Aufwand, der zum Beispiel aus Kostengründen nicht in Kauf genommen werden kann.

Im Jahr 1963 hatte der russische Mathematiker

A. N. Tikhonov (1906-1993)

eine

gute Idee.

Sein *Grundgedanke*:

Man *verfälsche* das schlecht gestellte inverse Problem *ein wenig*, so dass es *"weniger sensitiv"* ist, *aber nicht zuviel,* damit es noch *"genügend nahe"* beim ursprünglichen Problem ist.

Das verfälschte Problem wird als *stabilisiert* oder *regularisiert* bezeichnet.

Die *Hoffnung* ist: Die *Lösung* des *regularisierten Problems* ist eine *akzeptable Näherungslösung* für das *schlecht gestellte inverse Problem.*

Es ist klar, dass es sich hier um ein *riskantes Manöver* handelt, das darauf setzt, dass die Sensitivität zurückgedrängt werden kann, ohne dass der Bezug zum eigentlichen Problem zu sehr verloren geht.

Die Frage ist, *wie* das gegebene Problem *verfälscht* werden soll, und *wie stark.*

Tikhonovs Vorschlag, angewandt auf unsere Kette, lautet so: Man ersetze die *Diagonalelemente* im Gleichungssystem (9) durch etwas grössere Zahlen. Statt (9) betrachten wir also folgendes System:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= ((\tfrac{2}{2})^2 + \boxed{\boxed{\alpha}})x_0 + (\tfrac{2}{3})^2 x_1 + (\tfrac{2}{4})^2 x_2 \\ y_1 &= (\tfrac{2}{3})^2 x_0 + ((\tfrac{2}{4})^2 + \boxed{\boxed{\alpha}})x_1 + (\tfrac{2}{5})^2 x_2 \\ y_2 &= (\tfrac{2}{4})^2 x_0 + (\tfrac{2}{5})^2 x_1 + ((\tfrac{2}{6})^2 + \boxed{\boxed{\alpha}})x_2 \end{aligned}} \tag{10}$$

Dabei soll α eine *kleine positive Zahl* sein.

α heisst *Regularisierungsparameter.*

Damit das *Konzept* ganz klar ist, hier *nochmals die Logik.*

Ausgangspunkt ist die *zugrundeliegende Kette* mit den drei Massen

$$\boxed{x_0^* = x_1^* = x_2^* = \tfrac{1}{3}.}$$

Sie erzeugen in den Aufpunkten $P_0,\ P_1,\ P_2$ nach (9) die Gravitationskräfte

$$\boxed{y_0^* = \tfrac{61}{108} \approx 0.564815,\ y_1^* = \tfrac{769}{2700} \approx 0.285815,\ y_2^* = \tfrac{469}{2700} - \tfrac{1}{1000} \approx 0.172764.}$$

Die sind uns aber nicht exakt bekannt, sondern wir verfügen nur über mit kleinen Fehlern behaftete *Messungen:*

$$\boxed{\bar{y}_0 = \tfrac{61}{108} - \tfrac{1}{1000},\ \bar{y}_1 = \tfrac{769}{2700} + \tfrac{1}{1000},\ \bar{y}_2 = \tfrac{469}{2700} - \tfrac{1}{1000}.}$$

Die *Idee* ist, in (10) $y_0,\ y_1,\ y_2$ durch $\bar{y}_0,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2$ zu ersetzen, für α eine *kleine positive Zahl zu wählen* und dann das Gleichungssystem (10) nach $x_0,\ x_1,\ x_2$ aufzulösen in der Hoffnung, dass seine *Lösung*, die wir mit $\bar{x}_0^\alpha,\ \bar{x}_1^\alpha,\ \bar{x}_2^\alpha$ bezeichnen, eine *akzeptable Näherung* für $x_0^* = x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3}$ ist.

Wir brauchen ein *Mass für den Fehler.* Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Fehler zu messen. Eine geht so: Wir bestimmen die *Absolutbeträge* der Differenzen

$$x_0^* - \bar{x}_0^\alpha, \quad x_1^* - \bar{x}_1^\alpha, \quad x_2^* - \bar{x}_2^\alpha$$

und nehmen *die grösste* der drei Zahlen. Wir bezeichnen sie mit $error(\alpha)$.

Hier sind die Resultate eines *Computerexperiments.* Für *verschiedene Werte von α* wird der *Fehler* $error(\alpha)$ berechnet, siehe Tabellen 1,2.

α	$error(\alpha)$
0.00	0.69
0.01	0.15
0.02	0.12
0.03	0.12
0.04	0.12
0.05	0.13
0.06	0.13

Tabelle 1

α	$error(\alpha)$
0.024	0.1169
0.025	0.1168
0.026	0.1167
0.027	0.1168
0.028	0.1169
0.029	0.1170
0.030	0.1172

Tabelle 2

Für den offenbar günstigen Wert $\alpha = 0.025$ findet man:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \bar{x}_0^\alpha & \approx & 0.338276 \\ \bar{x}_1^\alpha & \approx & 0.366629 \\ \bar{x}_2^\alpha & \approx & 0.216546 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} x_0^* & = \frac{1}{3} & = 0.33333\ldots \\ x_1^* & = \frac{1}{3} & = 0.33333\ldots \\ x_2^* & = \frac{1}{3} & = 0.33333\ldots \end{array}}$$

Die *Tikhonov-Idee funktioniert* also bei unserem Beispiel ganz *ordentlich.* Jedenfalls können wir feststellen:

a) Das Resultat ist *nicht* aphysikalisch!

b) Der *Fehler* insbesondere für die Massen 0 und 1 ist mit unter 10% respektabel klein. Schlechter sieht es bei der Masse 2 der Kette aus, hier liegt der Rekonstruktionsfehler bei 35%.

5.5 5-gliedrige Kette

Eigentlich wollten wir ja die Dichteverteilung der *Erde* rekonstruieren oder mindestens diejenige eines *Stabes.* Die 3-gliedrige Kette ist eine ziemlich grobe Näherung für einen Stab. Betrachten wir wenigstens noch eine Kette mit *5 Gliedern*, siehe Abbildung 9.
Die "theoretischen" Massen seien

$$x_0^* = x_1^* = x_2^* = x_3^* = x_4^* = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Aus einem zu (9) analogen Gleichungssystem mit 5 Gleichungen für die Beziehung zwischen den Massen x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 und den Gravitationskräften y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 an den 5 Aufpunkten P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, erhält man die "theoretischen" Gravitationskräfte

$$y_0^* = 0.532.., \; y_1^* = 0.371.., \; y_2^* = 0.275.., \; y_3^* = 0.213.., \; y_4^* = 0.170..$$

Daraus *simulieren* wir *Messungen*, indem wir zum Beispiel

$$\bar{y}_0 = y_0^* - \delta, \; \bar{y}_1 = y_1^* + \delta, \; \bar{y}_2 = y_2^* - \delta, \; \bar{y}_3 = y_3^* + \delta, \; \bar{y}_4 = y_4^* - \delta$$

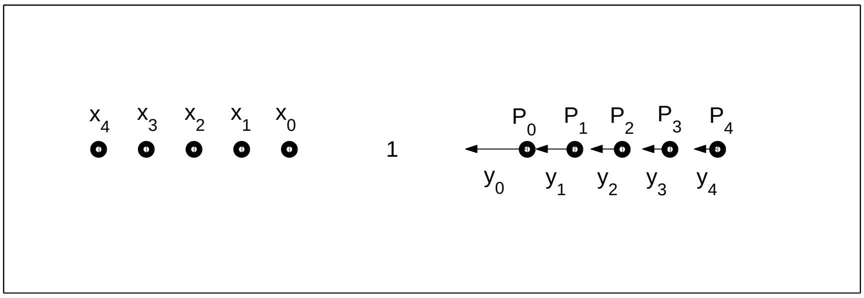

Figure 9: Analog zur 3-gliedrigen Kette betrachten wir nun ein 5-gliedrige Kette.

setzen. Dabei ist δ ein *Mass für die Messgenauigkeit:* Grosses δ bedeutet, dass wir ungenau messen. Kleines δ bedeutet hohe Messgenauigkeit.

a) Beginnen wir mit

$$\delta = 10^{-3} = 0.001$$

wie bei der 3-gliedrigen Kette. *Unregularisiert*, das heisst für $\alpha = 0$, erhalten wir als Rekonstruktion von $x_0^*, \ldots, x_4^*$:

$$-79.2779, 733.555, -2237.01, 2767.58, -1196.55.$$

Diese Resultat ist *noch viel katastrophaler* als dasjenige, das wir im Fall der 3-gliedrigen Kette erhalten haben! Wenn wir mit

$$\alpha = 0.045$$

nach *Tikhonov regularisieren*, erhalten wir hingegen als Rekonstruktion

$$0.201822,\ 0.235736,\ 0.169533,\ 0.191348,\ 0.126361.$$

Das sind halbwegs akzeptable Näherungen. Die *prozentualen Fehler* betragen

$$0.92\%,\ 17.9\%,\ 15.2\%,\ 4.3\%,\ 36.8\%.$$

b) Stellen wir uns vor, dass wir die Messgenauigkeit um eine *Grössenordnung erhöhen* können. D.h. es sei jetzt

$$\delta = 10^{-4} = 0.0001.$$

Unregularisiert finden wir als Rekonstruktion

$$-7.74779,\ 73.5355,\ -223.521,\ 276.938,\ -119.475,$$

ein immer noch völlig unbrauchbares Resultat! Indem wir mit

$$\alpha = 0.005$$

Tikhonov regularisieren, finden wir als Rekonstruktion

$$0.191257, 0.228835, 0.185026, 0.21565, 0.163105.$$

Die prozentualen Fehler sind nun reduziert auf

$$4.4\%, 14.4\%, 7.5\%, 7.8\%, 18.4\%.$$

c) Wir erhöhen die Messgenauigkeit noch um eine Grössenordnung, d.h. wir setzen

$$\delta = 10^{-5} = 0.00001.$$

Unregularisiert erhalten wir weiterhin drei negative Massen, also ein physikalisch unsinniges Ergebnis. *Tikhonov regularisiert* mit

$$\alpha = 0.001$$

ist das Ergebnis recht brauchbar. Die prozentualen Fehler schwanken zwischen 1.5% und 7.5%.

d) Man kann sich fragen, wie hoch die Messgenauigkeit sein müsste, um *unregularisiert* zum Ziel zu kommen. Für

$$\delta = 10^{-8}$$

schwanken die Fehler zwischen 0.4% und 14%. Für

$$\delta = 10^{-9}$$

liegen sie zwischen 0.04% und 1.4%. Das heisst: Man müsste *mehrere Grössenordnungen genauer messen!*

Das ist die Geschichte, die ich Ihnen erzählen wollte. Die Geschichte einer einfachen mathematischen Idee, die theoretisch interessant und von grossem praktischem Nutzen ist.

UK/16.4.02