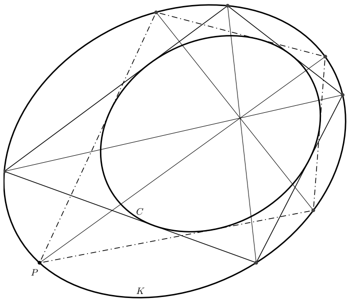
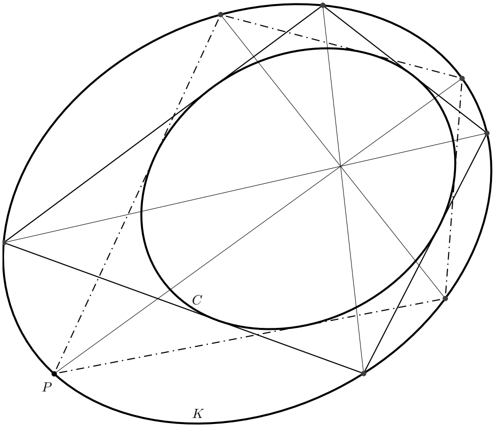
Das Theorem von Poncelet

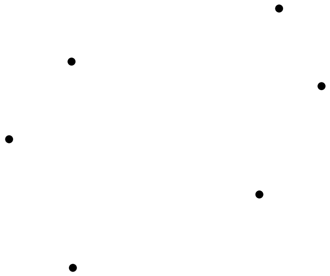


L. Halbeisen

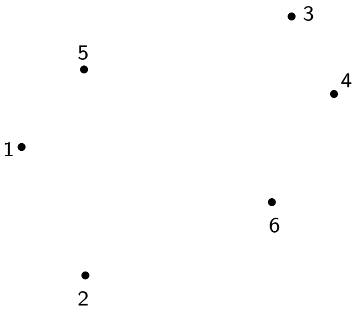
Das Theorem von Poncelet



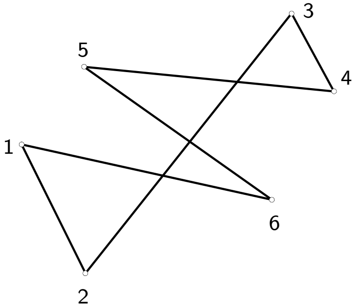
Der Satz von Pascal



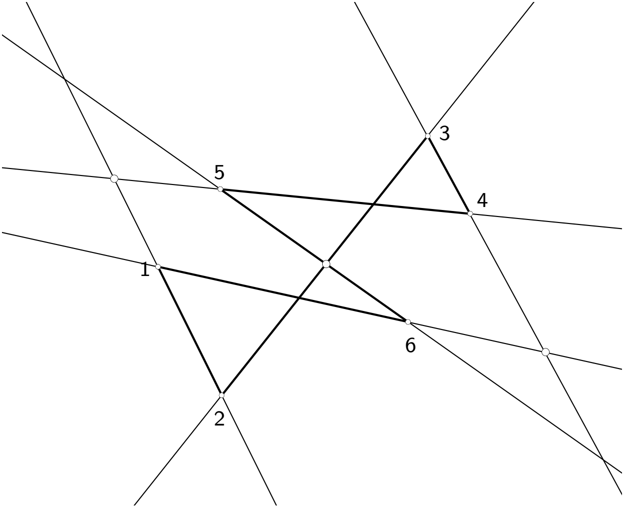
Der Satz von Pascal



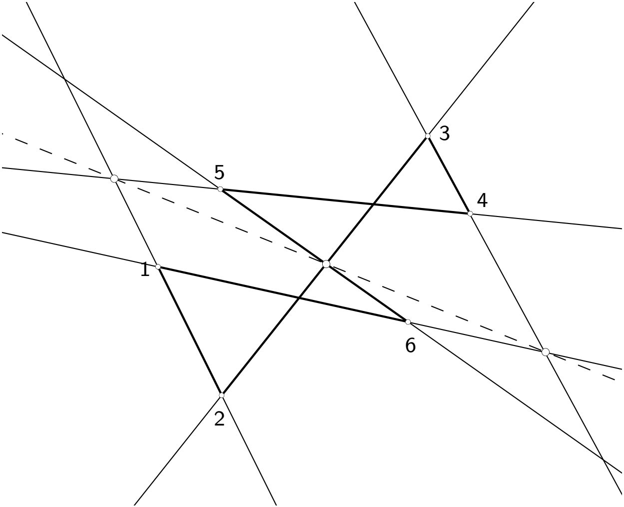
Der Satz von Pascal



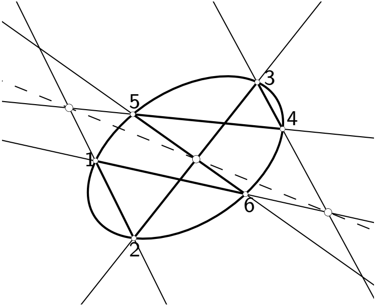
Der Satz von Pascal



Der Satz von Pascal



Der Satz von Pascal



Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Punkte

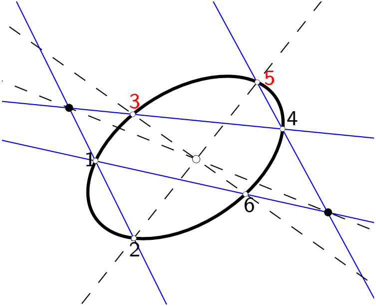
$$(1-2) \wedge (4-5)$$

$$(2-3) \wedge (5-6)$$

$$(3-4) \wedge (6-1)$$

liegen auf einer Geraden

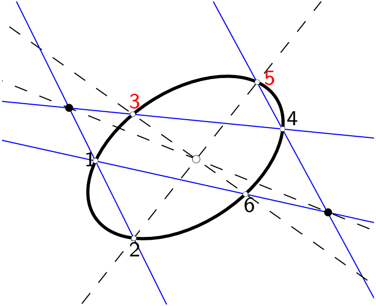
Der Satz von Carnot



Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

$\iff$

Der Satz von Carnot

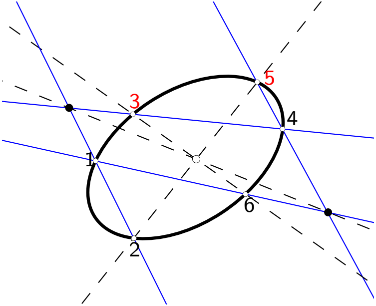


Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Geraden

Der Satz von Carnot



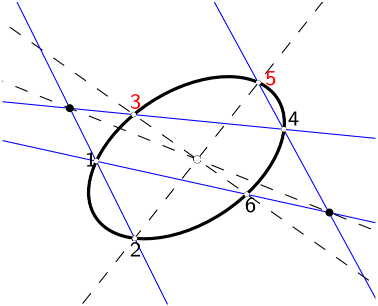
Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Geraden

$$[(1-2)\wedge(3-4)]-[(4-5)\wedge(6-1)]$$

Der Satz von Carnot



Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

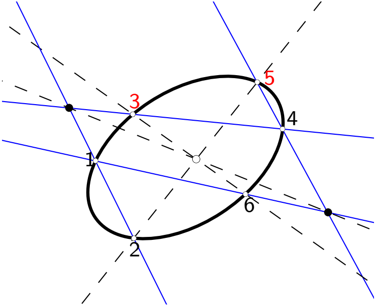
$$\Longleftrightarrow$$

die drei Geraden

$$[(1-2)\wedge(3-4)]-[(4-5)\wedge(6-1)]$$

$$(2-5)$$

Der Satz von Carnot



Die sechs Punkte 1–6 liegen auf einem Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Geraden

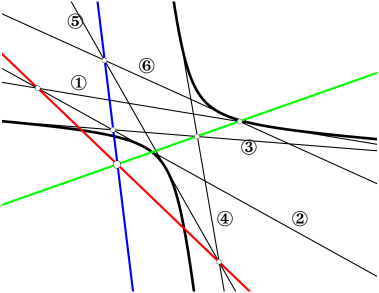
$$[(1-2)\wedge(3-4)]-[(4-5)\wedge(6-1)]$$

$$(2-5)$$

$$(3-6)$$

schneiden sich in einem Punkt

Der Satz von Brianchon



Die sechs Geraden ①–⑥ sind tangential an einen Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Geraden

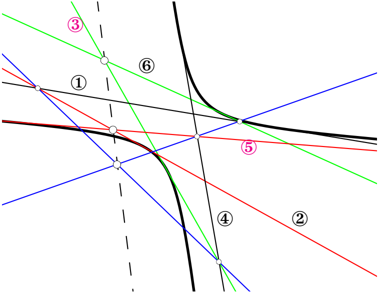
(① ∧ ②) – (④ ∧ ⑤)

(② ∧ ③) – (⑤ ∧ ⑥)

(③ ∧ ④) – (⑥ ∧ ①)

schneiden sich in einem Punkt

Carnot* (duale Form von Carnot)



Die sechs Geraden ①–⑥ sind tangential an einen Kegelschnitt

$\Longleftrightarrow$

die drei Punkte

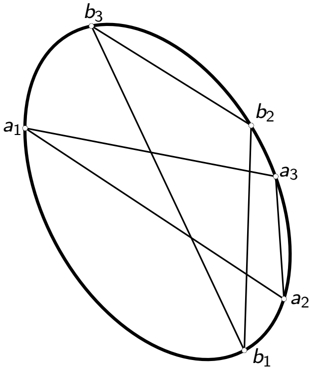
$[(①\wedge②)-(③\wedge④)]\wedge[(④\wedge⑤)-(⑥\wedge①)]$

$(②\wedge⑤)$

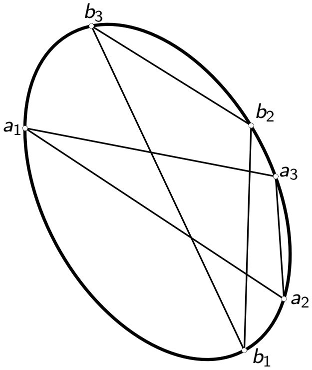
$(③\wedge⑥)$

liegen auf einer Geraden

Der Satz von Poncelet für Dreiecke



Der Satz von Poncelet für Dreiecke

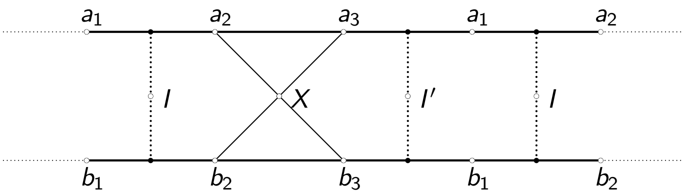


$$I := (a_1 - a_2) \wedge (b_1 - b_2)$$

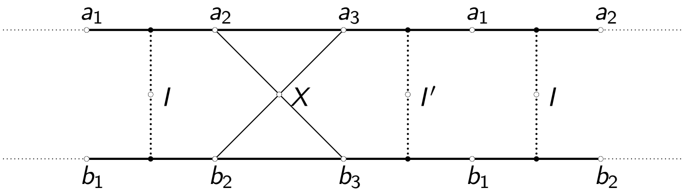
$$X := (a_2 - b_3) \wedge (b_2 - a_3)$$

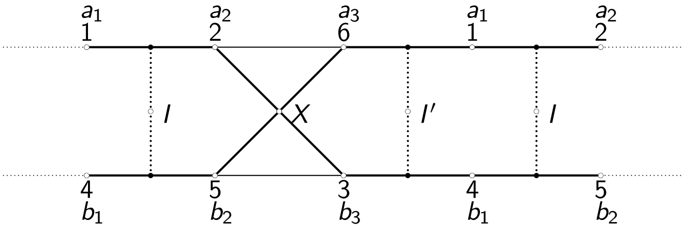
$$I' := (a_3 - a_1) \wedge (b_3 - b_1)$$

Der Satz von Poncelet für Dreiecke

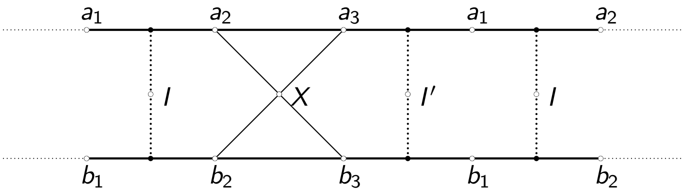


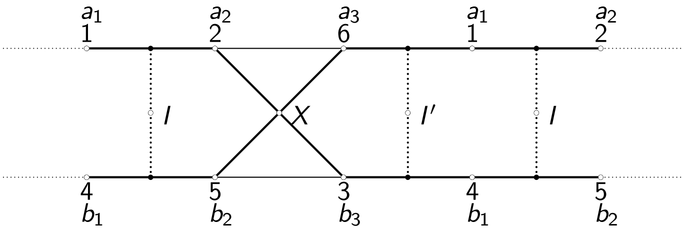
Der Satz von Poncelet für Dreiecke





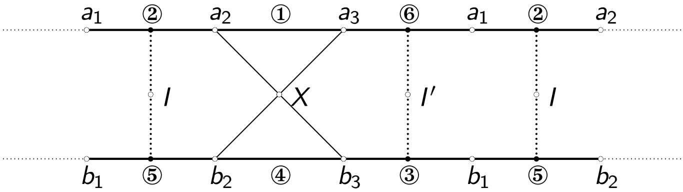
Der Satz von Poncelet für Dreiecke



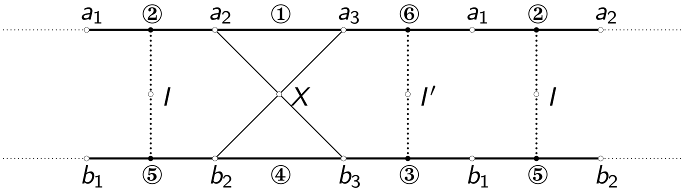


Mit dem Satz von Pascal sind $I - X - I'$ kollinear.

Der Satz von Poncelet für Dreiecke



Der Satz von Poncelet für Dreiecke



Mit Carnot* sind ①–⑥ genau dann tangential an einen Kegelschnitt, wenn die drei Punkte

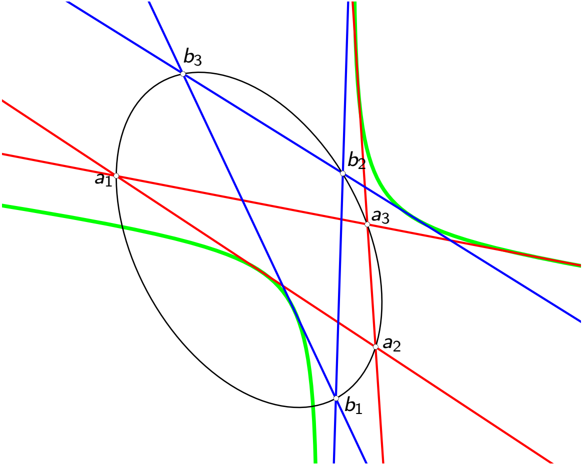
$$[(① \wedge ②) - (③ \wedge ④)] \wedge [(④ \wedge ⑤) - (⑥ \wedge ①)]$$

$$(② \wedge ⑤)$$

$$(③ \wedge ⑥)$$

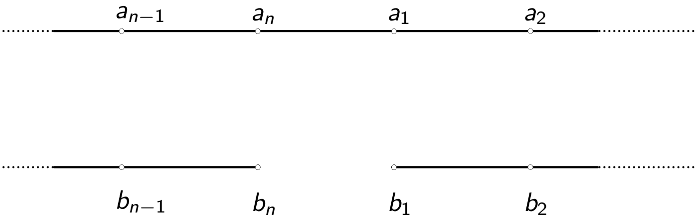
kollinear sind; das heisst wenn $X - I - I'$ kollinear sind.

Der Satz von Poncelet für Dreiecke



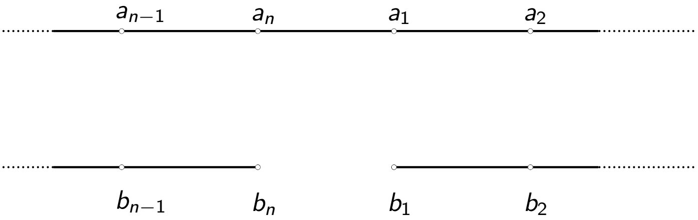
Der Satz von Poncelet für n-Ecke ($n \geq 4$)

Der Satz von Poncelet für n-Ecke ($n \geq 4$)



- $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Punkte auf Kegelschnitt K
- $a_1 - a_2, \ldots, a_n - a_1$ und $b_1 - b_2, \ldots, b_{n-1} - b_n$ tangential an Kegelschnitt C

Der Satz von Poncelet für n-Ecke ($n \geq 4$)



- $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Punkte auf Kegelschnitt K
- $a_1 - a_2, \ldots, a_n - a_1$ und $b_1 - b_2, \ldots, b_{n-1} - b_n$ tangential an Kegelschnitt C

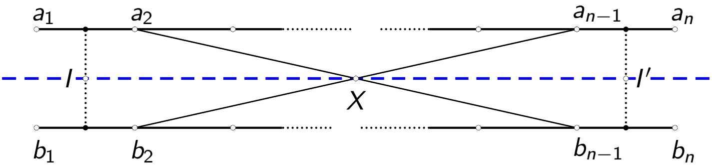
Es ist zu zeigen, dass $b_n - b_1$ ebenfalls tangential an C ist.

Lemma

Für $n \geq 4$ sind die drei Schnittpunkte

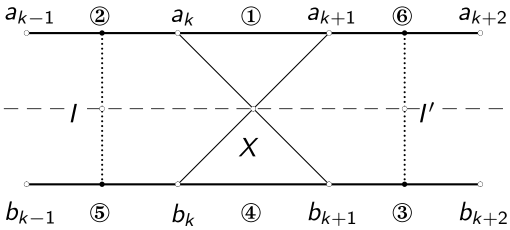
$$\begin{aligned} I &:= (a_1 - a_2) \wedge (b_1 - b_2) \\ X &:= (a_2 - b_{n-1}) \wedge (b_2 - a_{n-1}) \\ I' &:= (a_{n-1} - a_n) \wedge (b_{n-1} - b_n) \end{aligned}$$

paarweise verschieden und kollinear.



Verankerung für n gerade

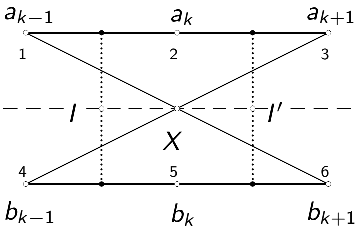
n gerade und $k = \frac{n}{2}$:



Mit Carnot* sind $l - X - l'$ kollinear, womit das Lemma im Fall $n = 4$ bewiesen ist.

Verankerung für n ungerade

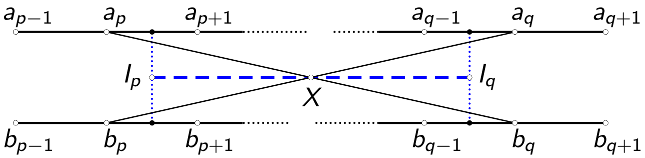
n ungerade und $k = \frac{n+1}{2}$:



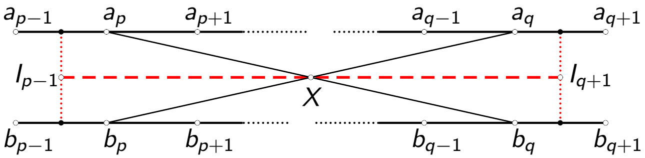
Mit dem Satz von Pascal sind $I - X - I'$ kollinear.

Behauptung 1

Für p, q mit $2 \leq p < q \leq n-1$ gilt:

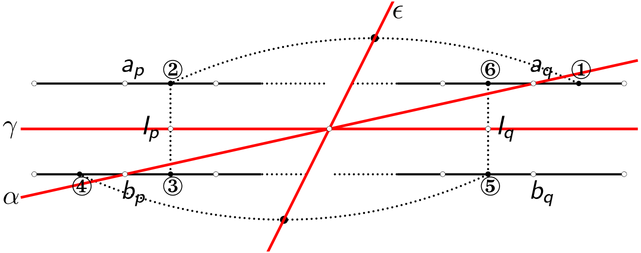


$\Downarrow$



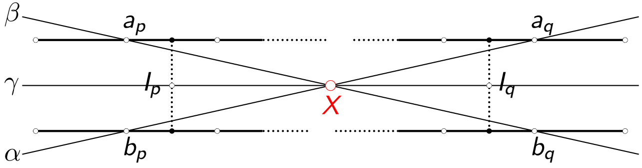
Sind l_p, X, l_q paarweise verschieden, so auch l_{p-1}, X, l_{q+1}.

Beweis Behauptung 1



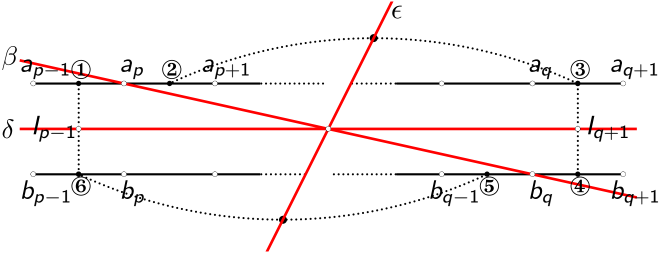
(a) Mit dem Satz von Brianchon sind die Geraden α, γ, ϵ paarweise verschieden und kopunktal.

Beweis Behauptung 1



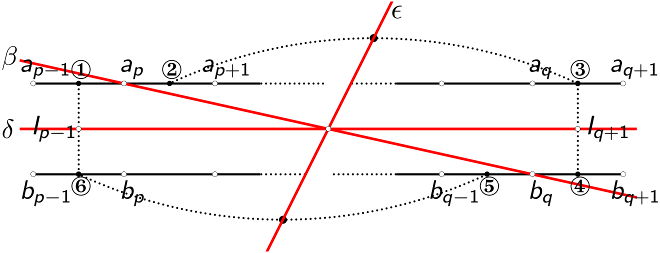
(b) Nach Voraussetzung schneiden sich die Geraden α, β, γ im Punkt X, also schneiden sich auch die Geraden ϵ und β in X.

Beweis Behauptung 1



(c) Mit dem Satz von Brianchon sind die Geraden β, ϵ, δ paarweise verschieden und kopunktal.

Beweis Behauptung 1



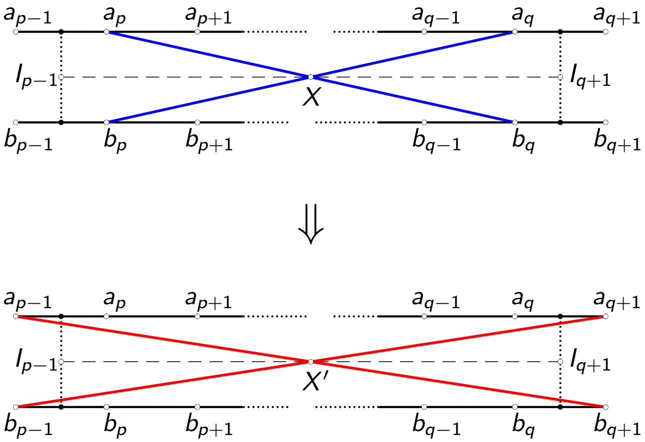
(c) Mit dem Satz von Brianchon sind die Geraden β, ϵ, δ paarweise verschieden und kopunktal.

Aus (b) folgt, dass sich β, ϵ, δ im Punkt X schneiden.

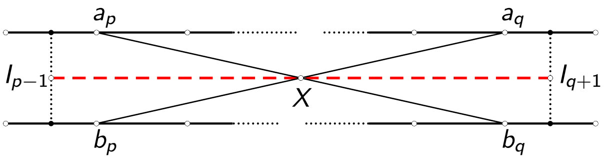
Somit sind $I_{p-1} - X - I_{q+1}$ kollinear, was zu zeigen war.

Behauptung 2

Für p, q mit $2 \leq p < q \leq n-1$ gilt:

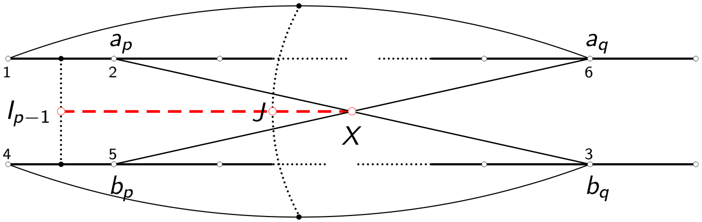


Beweis Behauptung 2



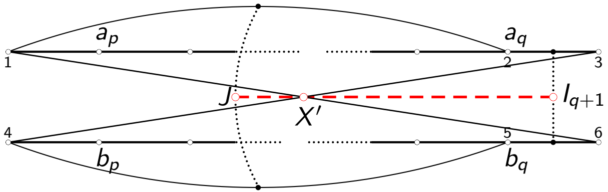
(a) Nach Voraussetzung sind $I_{p-1} - X - I_{q+1}$ paarweise verschieden und kollinear.

Beweis Behauptung 2



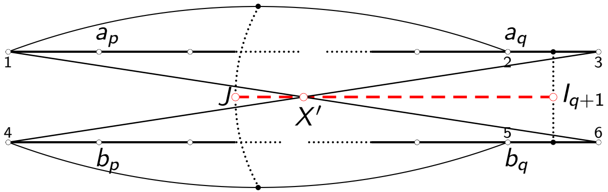
(b) Mit dem Satz von Pascal sind die Punkte $I_{p-1} - X - J$ paarweise verschieden und kollinear.

Beweis Behauptung 2



(c) Mit dem Satz von Pascal sind $X' - J - I_{q+1}$ paarweise verschieden und kollinear.

Beweis Behauptung 2

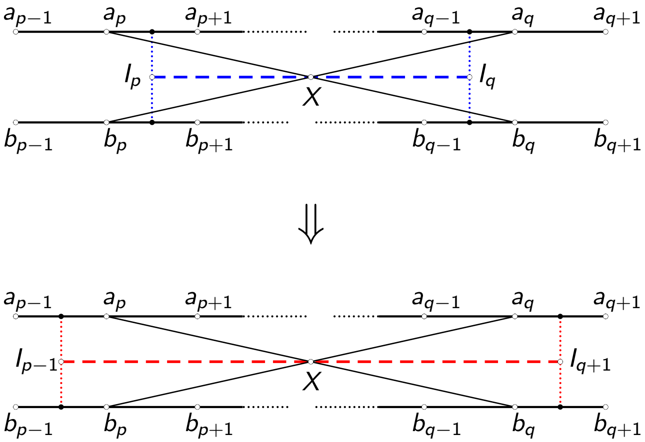


(c) Mit dem Satz von Pascal sind $X' - J - I_{q+1}$ paarweise verschieden und kollinear.

Aus (a)–(c) folgt, dass $I_{p-1} - X' - I_{q+1}$ paarweise verschieden und kollinear sind, was zu zeigen war.

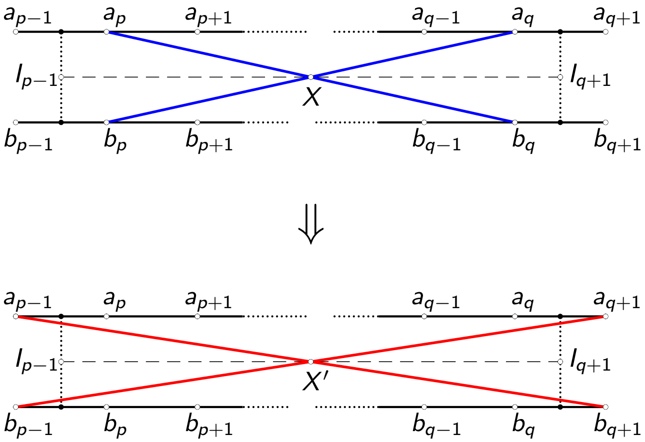
. . . zurück zum Lemma

Mit Behauptung 1 haben wir



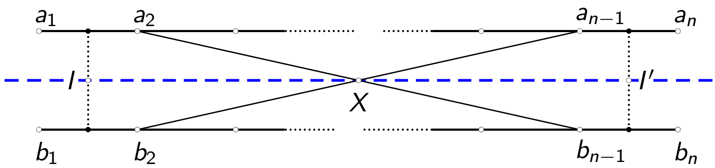
. . . zurück zum Lemma

. . . und mit Behauptung 2 haben wir

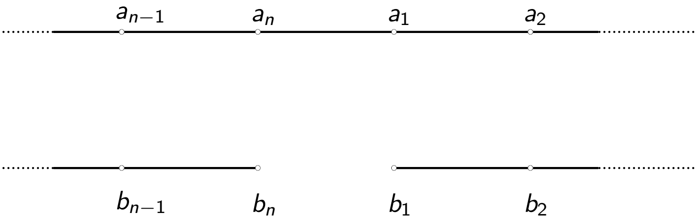


. . . zurück zum Lemma

. . . und durch wiederholtes Anwenden dieser Prozesse sind wir schliesslich in der Situation des Lemmas:



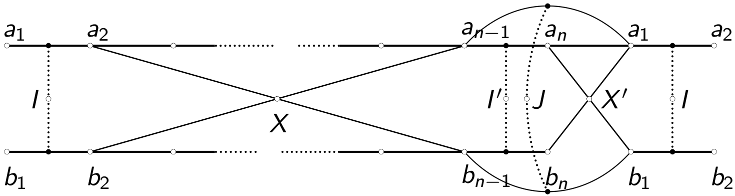
Beweis des Theorems von Poncelet



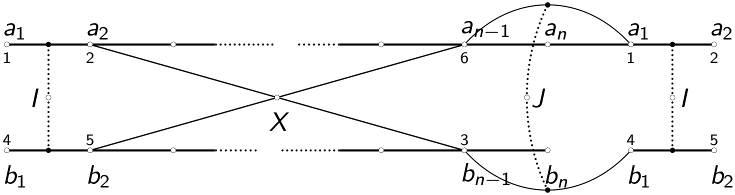
Beweis des Theorems von Poncelet

Wir führen folgende Punkte ein:

$$\begin{aligned} J &:= (a_{n-1} - a_1) \wedge (b_{n-1} - b_1) \\ X' &:= (a_n - b_1) \wedge (b_n - a_1) \end{aligned}$$

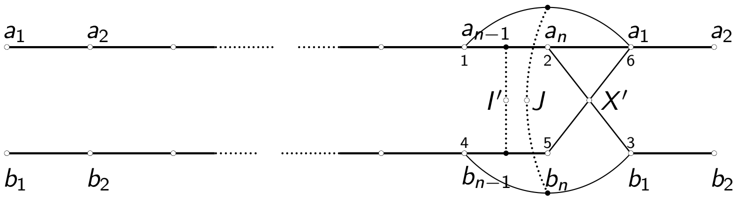


Beweis des Theorems von Poncelet



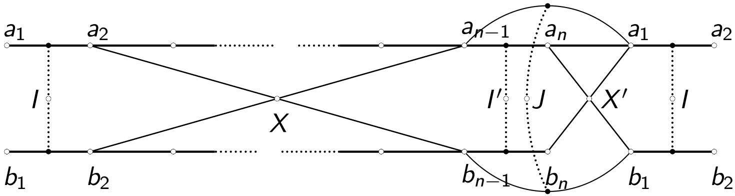
(a) Mit dem Satz von Pascal sind $I - X - J$ paarweise verschieden und kollinear.

Beweis des Theorems von Poncelet



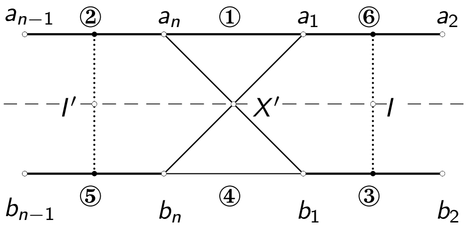
(b) Mit dem Satz von Pascal sind $I' - J - X'$ paarweise verschieden und kollinear.

Beweis des Theorems von Poncelet



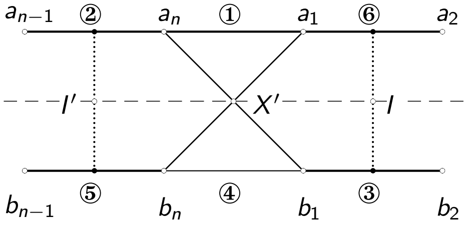
Da mit dem Lemma, die Punkte $I - X - I'$ paarweise verschieden und kollinear sind, folgt mit (a) und (b), dass auch $I - X' - I'$ kollinear sind.

Beweis des Theorems von Poncelet



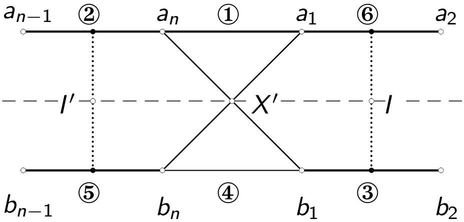
- Weil $I - X' - I'$ kollinear sind, folgt mit Carnot*, dass ①–⑥ tangential an einen Kegelschnitt C' sind.

Beweis des Theorems von Poncelet



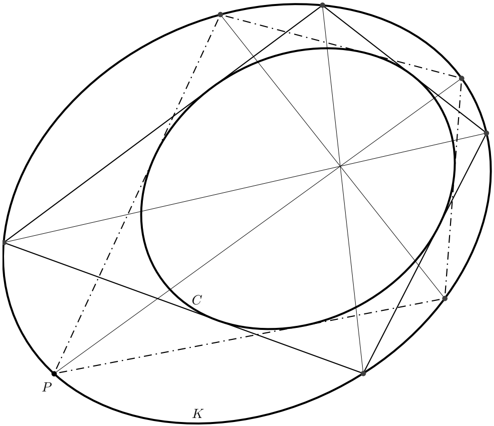
- Weil $I - X' - I'$ kollinear sind, folgt mit Carnot*, dass ①–⑥ tangential an einen Kegelschnitt C' sind.
- Weil ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt ist, und ①,②,③,⑤,⑥ tangential an C sind, sind C und C' dieselben Kegelschnitte.

Beweis des Theorems von Poncelet

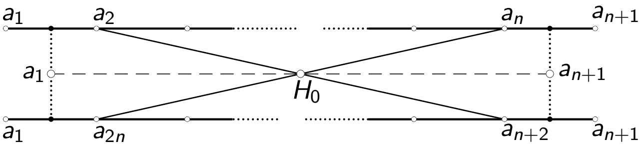


- Weil $I - X' - I'$ kollinear sind, folgt mit Carnot*, dass ①–⑥ tangential an einen Kegelschnitt C' sind.
- Weil ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt ist, und ①,②,③,⑤,⑥ tangential an C sind, sind C und C' dieselben Kegelschnitte.
- Somit ist ④ tangential an C, was zu zeigen war.

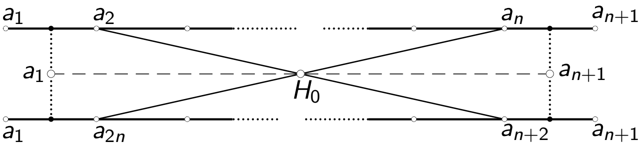
Eine Folgerung

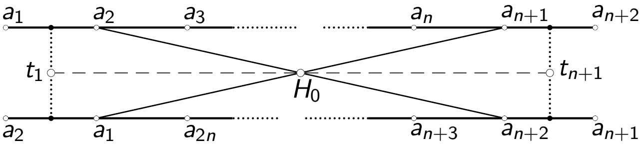


Eine Folgerung



Eine Folgerung





Eine Folgerung