Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 3: Untergruppen, Erzeugende, Relationen und Abbildungen

---

11. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{k \in \mathbb{Z} : \exists \ell_1,\, \ell_2 \in \mathbb{Z}\,(k = \ell_1 a + \ell_2 b)\}$.

    (a) Zeige, dass $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

    (b) Nach Satz 1.4.2 ist die Untergruppe $(a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}, +)$ von der Form $m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Bestimme m in Abhängigkeit von a und b, so dass $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.

12. (a) Beschreibe die Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, 1, \cdot)$ welche von der Menge $\{2\}$ erzeugt wird.

    (b) Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Beschreibe die Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, 1, \cdot)$ welche von der Menge $\mathbb{P}$ erzeugt wird.

    (c) Zeige, dass $(\mathbb{Q}^*, 1, \cdot)$ von der Menge $\mathbb{P} \cup \{-1\}$ erzeugt wird, wobei $\mathbb{P}$ wieder die Menge der Primzahlen bezeichnet.

(B) Sei W die Würfelgruppe. Sei ferner $\sigma \in W$ eine Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um eine Raumdiagonale des Würfels, und $\delta \in W$ eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um eine Achse, welche durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten des Würfels geht. Zeige: $W = \langle \sigma, \delta \rangle$, d.h. W wird von den Elementen σ und δ erzeugt.

13. Auf der punktierten reellen Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definieren wir eine Relation R wie folgt: $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ genau dann, wenn die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf einem Strahl liegen, der vom Punkt $(0, 0)$ ausgeht.

    (a) Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist.

    (b) Gib ein Repräsentantensystem der Äquivalenzrelation R an.

14. Sei M eine nicht-leere Menge. Definiere auf M eine Relation $R_0 \subseteq M \times M$ so, dass R_0 symmetrisch und transitiv, nicht aber reflexiv ist. Zeige, dass R_0 die einzige Relation mit diesen Eigenschaften ist.

15. Sei M eine Menge von endlichen Mengen. Für $A \in M$ bezeichne $|A| \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente von A (die Kardinalität von A). Für $A, B \in M$ schreiben wir $A \approx B$ genau dann, wenn es eine Bijektion $\Phi : A \to B$ gibt. Ferner schreiben wir $A \preccurlyeq B$ genau dann, wenn es eine Injektion $\varphi : A \to B$ gibt. Im Folgenden seien $A, B \in M$. Zeige:

    (a) $A \approx B$ gilt genau dann, wenn $|A| = |B|$.

    (b) Die Relation "$\preccurlyeq$" ist reflexiv und transitiv.

    (c) Aus $A \preccurlyeq B$ folgt $|A| \leq |B|$.

    (d) Existiert eine Surjektion von A auf B, so gilt $B \preccurlyeq A$, also auch $|B| \leq |A|$.

    (e) Falls eine Surjektion von A auf B und eine Injektion von A in B existiert, so existiert auch eine Bijektion zwischen A und B.

    (f) Falls eine Surjektion von A auf B und eine Surjektion von B auf A existiert, so existiert auch eine Bijektion zwischen A und B.