Axiomatische Mengenlehre - Serie 11 - Musterlösung

Aufgabe 34

- "$\omega_1 \leq cov(\mathcal{N})$": Angenommen $[0,1] = \bigcup_{n\in\omega} L_n$, wobei $\mu(L_n) = 0$ ist für jedes $n \in \omega$. Da das Lebesgue-Mass ein Mass ist, gilt
$$1 = \mu([0,1]) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(L_n) = 0 \;\lightning$$
Also ist $cov(\mathcal{N})$ überabzählbar.
- "$cov(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$": Es gilt $[0,1] = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$. Da $\mu(\{x\}) = 0$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir also $cov(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$.

Aufgabe 35

Angenommen es gibt eine Antikette $\mathcal{A} \subseteq P$ mit $|\mathcal{A}| \geq \omega_1$. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ sei $n_x \in \omega$ minimal mit
$$1/n_x \leq \mu(x).$$
Da $\mathcal{A}$ überabzählbar ist, gibt es ein $n \in \omega$ und eine überabzählbare Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ mit
$$\forall x \in \mathcal{B}\,(0 < 1/n \leq \mu(x)).$$
Da $\mathcal{A}$ eine Antikette ist, gilt
$$\forall x, y \in \mathcal{A}\,(x \neq y \Rightarrow \mu(x \cap y) = 0).$$
Das heisst also $\mu(\bigcup\mathcal{B}) = \infty$. Aber da $\bigcup\mathcal{B} \subseteq [0,1]$ ist, erhalten wir auch, dass
$$\mu(\bigcup\mathcal{B}) \leq \mu([0,1]) = 1$$
ist. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Aufgabe 36

Sei $\mathcal{D} = \{D_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ eine Familie von Nullmengen mit $|\mathcal{D}| = \kappa < \mathfrak{c}$. Für jedes $\alpha \in \kappa$ sei
$$E_\alpha := \{x \in P \mid x \cap D_\alpha = \emptyset\}.$$
Offenbar ist E_α offen. Zu zeigen bleibt also, dass E_α auch dicht ist. Sei also $x \in P$. Ist $x \in E_\alpha$, so sind wir fertig. Nehmen wir also an,
$$x \cap D_\alpha \neq \emptyset.$$
Da D_α eine Nullmenge ist, gilt $\mu(x \setminus D_\alpha) = \mu(x)$. Nach Folgerung

1.3.3 in Struwes Analysis III - Skript, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $y \subseteq x \setminus D_\alpha$ mit $\mu(y) \geq \mu(x) - \varepsilon$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ klein genug, folgt also $0 < \mu(y)$. Also ist $y \in D_\alpha \cap P$.

Sei $\mathcal{E} := \{ E_\alpha \mid \alpha \in \kappa \}$. Nun wenden wir das Martin-Axiom an und finden einen $\mathcal{E}$-generischen Filter G. Der Schnitt $\bigcap G$ ist nicht leer. Warum?

Angenommen $\bigcap G = \emptyset$. Die Menge

$$\mathcal{C} := \{ [0,1] \setminus x \mid x \in G \}$$

bildet also eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. D.h. es gibt $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in G$ mit

$$\bigcap_{k \in n} x_k = \emptyset.$$

Da G aber "directed" ist, gibt es ein $y \in G$ mit

$$\forall k \in n \, (x_k \leq y)$$

d.h. $\forall k \in n \, (y \subseteq x_k)$. Also $\emptyset \neq y \subseteq \bigcap_{k \in n} x_k$ $\lightning$. Das heisst, $\bigcap G \neq \emptyset$.

Da G ein $\mathcal{E}$-generischer Filter ist, schneidet G jedes E_α nicht trivial. Also gilt $(\bigcap G) \cap D_\alpha = \emptyset$ für jedes $\alpha \in \kappa$. Das heisst, $\bigcup \mathcal{D} \neq [0,1]$.

Aufgabe 37

Nach Aufgabe 34 gilt $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$ und nach Aufgabe 36 gilt $\mathfrak{c} \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N})$. Also erhalten wir $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$.