Axiomatische Mengenlehre - Serie 10 - Musterlösung

Aufgabe 30

① $f(\mathcal{V})$ ist ein Filter

- Da $\emptyset \notin \mathcal{V}$ folgt auch $\emptyset \notin f(\mathcal{V})$. Sei $y \in \mathcal{V}$. Dann ist $f[y] \subseteq \omega$. Also folgt $\omega \in f(\mathcal{V})$
- Seien $x_0, x_1 \in f(\mathcal{V})$. Das heisst, es gibt $y_0, y_1 \in \mathcal{V}$ mit
$$f[y_0] \subseteq x_0 \text{ und } f[y_1] \subseteq x_1.$$
Da $\mathcal{V}$ ein Filter ist, gilt $y_0 \cap y_1 \in \mathcal{V}$. Weiter haben wir
$$f[y_0 \cap y_1] = f[y_0] \cap f[y_1] \subseteq x_0 \cap x_1.$$
Also ist $x_0 \cap x_1 \in f(\mathcal{V})$.
- Sei $x_0 \in f(\mathcal{V})$ und sei $x_1 \subseteq \omega$. Dann gibt es ein $y_0 \in \mathcal{V}$ mit $f[y_0] \subseteq x_0$.
Also folgt
$$f[y_0] \subseteq x_0 \cup x_1.$$
Das heisst, $x_0 \cup x_1 \in f(\mathcal{V})$.

② $f(\mathcal{V})$ ist ein Ultrafilter.

Sei $x \subseteq \omega$. Dann gilt $f^{-1}[x] \cup f^{-1}[\omega \setminus x] = \omega$ und $f^{-1}[x] \cap f^{-1}[\omega \setminus x] = \emptyset$.
Da $\mathcal{V}$ ein Ultrafilter ist, gilt $f^{-1}[x] \in \mathcal{V}$ oder $f^{-1}[\omega \setminus x] \in \mathcal{V}$. Nehmen wir an, $f^{-1}[x] \in \mathcal{V}$. Dann folgt
$$f[f^{-1}[x]] \subseteq x \Rightarrow x \in f(\mathcal{V}).$$
Ist $f^{-1}[\omega \setminus x] \in \mathcal{V}$, so folgt analog $\omega \setminus x \in f(\mathcal{V})$.

Aufgabe 31a

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq [\omega]^\omega$ Ultrafilter für die gilt
$$\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V} \text{ und } \mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{W}.$$
Zu zeigen ist, dass $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{W}$ gilt. Seien $f, g \in {}^\omega\omega$ mit
$$\mathcal{U} \overset{(*)}{=} f(\mathcal{V}) \text{ und } \mathcal{V} \overset{(**)}{=} g(\mathcal{W}).$$
Wir zeigen, dass $\mathcal{U} = (f \circ g)(\mathcal{W})$ ist und damit $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{W}$ gilt.

"$\supseteq$" Sei $x \in (f \circ g)(\mathcal{W})$. Das heisst, es gibt ein $w \in \mathcal{W}$ mit
$$(f \circ g)[w] \subseteq x$$

Wegen (**) gilt $g[w] \in \mathcal{V}$ und wegen (*) folgt $(f \circ g)[w] \in \mathcal{U}$.
Also ist auch $x \in \mathcal{U}$, da $(f \circ g)[w] \subseteq x$ ist.

"$\subseteq$" Sei $x \in \mathcal{U} = f(\mathcal{V})$. D.h es gibt ein $v \in \mathcal{V}$ mit $f[v] \subseteq x$. Da $\mathcal{V} = g(\mathcal{W})$ gibt es ein $w \in \mathcal{W}$ mit $g[w] \subseteq v$. Also

$$(f \circ g)[w] \subseteq f[v] \subseteq x$$

und damit ist $x \in (f \circ g)(\mathcal{W})$.

<u>Aufgabe 31 b</u>

- "$\equiv_{RK}$" ist reflexiv (d.h $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{U}$ für jeden Ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^{\omega}$)

Es gilt $\mathcal{U} = id(\mathcal{U})$.

- "$\equiv_{RK}$" ist transitiv (d.h. $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \equiv_{RK} \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{W}$)

Es gibt also Bijektionen $f, g \in {}^{\omega}\omega$ mit

$$\mathcal{U} = f(\mathcal{V}) \quad \text{und} \quad \mathcal{V} = g(\mathcal{W})$$

Wie wir in A31a gesehen haben, gilt $\mathcal{U} = (f \circ g)(\mathcal{W})$. Da f und g Bijektionen sind, ist auch $f \circ g$ eine Bijektion. Das heisst

$$\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{W}.$$

- "$\equiv_{RK}$" ist symmetrisch (d.h. $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \equiv_{RK} \mathcal{U}$)

Da $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V}$, gibt es eine Bijektion $f \in {}^{\omega}\omega$ mit $\mathcal{U} \overset{(*)}{=} f(\mathcal{V})$. Dann ist $\mathcal{V} = f^{-1}(\mathcal{U})$.

"$\subseteq$" Sei $v \in \mathcal{V}$. Wegen (*) gibt es ein $u \in \mathcal{U}$ mit $u = f[v] \Rightarrow f^{-1}[u] = v$.
Also ist $v \in f^{-1}(\mathcal{U})$.

"$\supseteq$" Sei $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$. D.h. es gibt ein $u \in \mathcal{U}$ mit $f^{-1}[u] \subseteq x \Rightarrow u \subseteq f[x]$
Also ist $f[x] \in \mathcal{U} = f(\mathcal{V})$. D.h. $\exists v \in \mathcal{V}$ mit $f[v] \subseteq f[x] \Rightarrow v \subseteq x$ und somit ist $x \in \mathcal{V}$.

<u>Aufgabe 32</u>

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt entweder   "<u>oder</u> = exklusives oder"

$$A := \{n \in \omega \mid f(n) = n\} \in \mathcal{U} \quad \underline{\text{oder}}$$

$$B := \{n \in \omega \mid f(n) < n\} \in \mathcal{U} \quad \underline{\text{oder}}$$

$$C := \{n \in \omega \mid f(n) > n\} \in \mathcal{U}.$$

Wir werden zeigen, dass $B \notin \mathcal{U}$ und $C \notin \mathcal{U}$ sind. Dann ist nämlich $A \in \mathcal{U}$.

- Angenommen $B \in \mathcal{U}$. Für jedes $n \in B$ betrachten wir die Folge

$$\langle f^k(n) \mid k \in \omega \rangle,$$

wobei $f^0(n) = n$ und $f^{k+1}(n) := f(f^k(n))$ für jedes $k \in \omega$. Dann gibt es ein kleinstes $k_n \in \omega$ mit $f^{k_n}(n) \notin D$. Denn ansonsten hätten wir eine unendliche, absteigende Folge

$$n > f(n) > f^2(n) > f^3(n) > f^4(n) > \dots$$

Und das können wir nicht haben. Also gilt

$$B = \underbrace{\{n \in B \mid k_n \text{ ist gerade}\}}_{=: B_0} \cup \underbrace{\{n \in B \mid k_n \text{ ist ungerade}\}}_{=: B_1}$$

sonst analog argumentieren

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt $B_0 \in \mathcal{U}$ <u>oder</u> $B_1 \in \mathcal{U}$. OBdA nehmen wir an, dass $B_0 \in \mathcal{U}$. Es gilt

$$f(B_0) = B_1.$$

Da $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ ist, folgt $B_1 \in \mathcal{U}$ $\lightning$

- Angenommen $C \in \mathcal{U}$. Wie im letzten Fall definieren wir erneut für jedes $n \in C$ die Folge

$$\langle f^k(n) \mid k \in \omega \rangle.$$

Sei $k_n \in \omega \cup \{\omega\}$ das kleinste $k_n \in \omega$ mit $f^{k_n}(n) \notin C$ oder wenn für alle $k \in \omega$ $(f^k(n) \in C)$, sei $k_n := \omega$. Es gilt

$$C = \underbrace{\{n \in C \mid k_n \text{ ist gerade}\}}_{=: C_0} \cup \underbrace{\{n \in C \mid k_n \text{ ist ungerade}\}}_{=: C_1} \cup \underbrace{\{n \in C \mid k_n = \omega\}}_{=: C_\omega}$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt $C_0 \in \mathcal{U}$ <u>oder</u> $C_1 \in \mathcal{U}$ <u>oder</u> $C_\omega \in \mathcal{U}$. Angenommen $C_0 \in \mathcal{U}$ oder $C_1 \in \mathcal{U}$: Dann können wir gleich wie oben argumentieren. Das heisst, es muss $C_\omega \in \mathcal{U}$ gelten. Auf C_ω definieren wir wie folgt eine Äquivalenzrelation. Für $n, m \in C_\omega$ sei

$$n \sim m \;:\Longleftrightarrow\; \exists k, \ell \in \omega \; (f^k(n) = f^\ell(m))$$

Sei η eine Funktion, die aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählt. Für jedes $n \in C_\omega$ sei $k_n \in \omega$ kleinst möglich, sodass $\ell_0, \ell_1 \in \omega$ existieren mit

$$f^{l_0}(\eta([n])) = f^{l_1}(n) \quad \text{und} \quad k_n = l_0 + l_1.$$

Es gilt

$$C_\omega = \overbrace{\{n \in C_\omega \mid k_n \text{ ist gerade}\}}^{=:\, C_{\omega,0}} \cup \overbrace{\{n \in C_\omega \mid k_n \text{ ist ungerade}\}}^{=:\, C_{\omega,1}}$$

Da $C_\omega \in \mathcal{U}$ ist, gilt entweder $C_{\omega,0} \in \mathcal{U}$ <u>oder</u> $C_{\omega,1} \in \mathcal{U}$. OBdA nehmen wir an, dass $C_{\omega,0} \in \mathcal{U}$ ist. Es gilt $f[C_{\omega,0}] \subseteq C_{\omega,1}$. Warum?

Sei $n \in C_{\omega,0}$. Das heisst, es gibt $l_0, l_1 \in \omega$ mit

$$f^{l_0}(\eta(\underbrace{[n]}_{\text{Äquivalenzklasse von } n})) = f^{l_1}(n) \quad \text{und} \quad l_0 + l_1 = k_n.$$

<u>1. Fall:</u> $l_1 \neq 0$

Dann gilt, da $[n] = [f(n)]$ ist

$$f^{l_0}(\eta([f(n)])) = f^{l_0}(\eta([n])) = f^{l_1 - 1}(f(n)) \Rightarrow k_{f(n)} \leq l_0 + l_1 - 1.$$

Angenommen $k_{f(n)} = m_0 + m_1 < l_0 + l_1 - 1$. Dann gilt

$$f^{m_0}(\eta([f(n)])) = f^{m_0}(\eta([n])) = f^{m_1}(f(n)) = f^{m_1 + 1}(n).$$

Also gilt $k_n \leq m_0 + m_1 + 1 < l_0 + l_1 - 1 + 1 = l_0 + l_1 = k_n$. ↯ Somit ist also $k_{f(n)} = l_0 + l_1 - 1$ und wir erhalten $f(n) \in C_{\omega,1}$.

<u>2. Fall:</u> $l_1 = 0$

Dann erhalten wir

$$(**) \quad f^{l_0 + 1}(\eta([f(n)])) = f^{l_0 + 1}(\eta([n])) = f(n) \Rightarrow k_{f(n)} \leq l_0 + l_1 + 1 = l_0 + 1.$$

Angenommen: $k_{f(n)} = m_0 + m_1 < l_0 + 1$. Dann gilt

$$f^{m_0}(\eta([n])) = f^{m_1}(f(n)) \overset{(**)}{=} f^{m_1 + l_0 + 1}(\eta[n])$$

$$\Rightarrow m_0 = m_1 + l_0 + 1 \Rightarrow k_{f(n)} = m_0 + m_1 = m_1 + l_0 + 1 + m_1 \geq l_0 + 1 \text{ ↯}$$

Also gilt tatsächlich $k_{f(n)} = l_0 + 1 = k_n + 1$ und wir haben $f(n) \in C_{\omega,1}$.

Da nach Voraussetzung $\mathcal{U} = f(\mathcal{U})$ ist, gilt $C_{\omega,1} \in f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. ↯

Das heisst auch $C_\omega \notin \mathcal{U}$ und damit ist $C \notin \mathcal{U}$. Das heisst,

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \rightarrow \{n \in \omega \mid f(n) = n\} \in \mathcal{U}.$$

Nun zeigen wir, dass

$$f(\mathcal{U}) \equiv_{RK} \mathcal{U} \Rightarrow \exists x \in \mathcal{U} \, (f|_x \text{ ist injektiv}).$$

Da $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ ist, gibt es eine Bijektion $g \in {}^\omega\omega$ mit

$$\mathcal{U} = (g \circ f)(\mathcal{U}).$$

auf Übungsblatt

Mit $(*)$ folgt, dass

$$x := \{n \in \omega \mid (g \circ f)(n) = n\} \in \mathcal{U}$$

ist. Es gilt $x = \{n \in \omega \mid f(n) = g^{-1}(n)\}$. Da g bijektiv ist, ist

$$f|_x \text{ injektiv.}$$

Aufgabe 33

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subseteq [\omega]^\omega$ zwei Ultrafilter, wobei $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter ist. Weiter gelte $\mathcal{U}' \leq_{RK} \mathcal{U}$. Das heisst, es gibt eine Funktion $f \in {}^\omega\omega$ mit $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$. Da $\mathcal{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter ist, und daher sowohl P-point als auch Q-point, gibt es nach S9A26 und S9A27 ein $x \in \mathcal{U}$ mit

$$f|_x = \text{const oder } f|_x \text{ ist injektiv.}$$

- Angenommen f ist konstant: Es gilt $\omega \in \mathcal{U}$. Das heisst,

$$f[\omega] \in \mathcal{U}',$$

aber $f[\omega]$ ist eine einelementige Menge. Also $\mathcal{U}' \not\subseteq [\omega]^\omega$. ↯

- Angenommen $f|_x$ ist injektiv: Da $x \in [\omega]^\omega$ ist, können wir x aufteilen in zwei unendliche, disjunkte Stücke x_0 und x_1. OBdA nehmen wir an, dass $x_0 \in \mathcal{U}$ ist. Da $f|_{x_0}$ injektiv ist und $x_1 \subseteq \omega \setminus x_0$ ist, gilt

$$|\omega \setminus x_0| = |\omega \setminus f[x_0]| = \omega.$$

Sei $h : \omega \setminus x_0 \to \omega \setminus f[x_0]$ eine Bijektion. Wir definieren wie folgt

eine Bijektion
$$\tilde{f}: \omega \to \omega$$
$$n \mapsto \begin{cases} f(n), & \text{wenn } n \in x_0; \\ h(n), & \text{wenn } n \in \omega \setminus x_0. \end{cases}$$
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$ ist. Bemerke, dass sowohl $\tilde{f}|_{x_0} = f|_{x_0}$ als auch $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$ gelten.

- "$\tilde{f}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}'$": Sei $u \in \tilde{f}(\mathcal{U})$. Das heisst, es gibt ein $v \in \mathcal{U}$ mit
$$\tilde{f}[v] \subseteq u.$$
Weiter gilt
$$f[\underbrace{v \cap x_0}_{\in \mathcal{U}}] = \tilde{f}[v \cap x_0] \subseteq \tilde{f}[v] \subseteq u \quad \Rightarrow u \in f(\mathcal{U})$$
Da $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$ ist, folgt $u \in \mathcal{U}'$.
- "$\mathcal{U}' \subseteq \tilde{f}(\mathcal{U})$": Sei $u' \in \mathcal{U}'$. Da $\mathcal{U}' = f(\mathcal{U})$ ist, gibt es ein $u \in \mathcal{U}$ mit
$$f[u] \subseteq u'.$$
Wir erhalten also
$$u' \supseteq f[u] \supseteq f[\overbrace{u \cap x_0}^{\in \mathcal{U}}] = \tilde{f}[u \cap x_0]$$
Daraus folgt, dass $u' \in \tilde{f}(\mathcal{U})$ ist.