Axiomatische Mengenlehre – Serie 8 – Musterlösung

Aufgabe 21a

Wir definieren

$$\pi^* : [\omega]^2 \to r$$
$$\{a,b\} \mapsto \pi(a+b).$$

Nach Ramsey's Theorem gibt es eine Menge $S \in [\omega]^\omega$, die bezüglich π^* monochromatisch ist. Das heisst, es gibt ein $j \in r$ mit

$$\forall \{a,b\} \in [S]^2 \; \pi^*(\{a,b\}) = \pi(a+b) = j.$$

Aufgabe 21b

Analog zu Teilaufgabe a.

Aufgabe 22a

Sei $\mathcal{A} = \{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ eine abzählbare Menge. Wir definieren

$$a_0 := \min(x_0) \;, \quad b_0 := \min(x_0 \setminus (a_0+1)).$$

Weiter sei für alle $n \in \omega \setminus \{0\}$:

$$a_n := \min(x_n \setminus b_{n-1}) \;; \quad b_n := \min(x_n \setminus (a_n+1)).$$

Sei $B := \{b_n \mid n \in \omega\}$. Es gilt für jedes $n \in \omega$

$$a_n \in x_n \setminus B.$$

Also ist $[B]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Aufgabe 22b

Für alle $x, y \in [\omega]^\omega$ definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow |x \triangle y| < \omega,$$

wobei $x \triangle y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ ist. Bemerke, dass "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf $[\omega]^\omega$ definiert. Sei f eine Funktion, die aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten auswählt. Wir definieren

$$\pi : [\omega]^\omega \to 2$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x \triangle f([x])| \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $B \in [\omega]^\omega$ beliebig und sei $\mathcal{A} := \pi^{-1}[\{1\}]$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $B \in \mathcal{A}$

Es gilt also $[B]^\omega \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Bleibt also noch nachzuprüfen, dass auch $[B]^\omega \not\subseteq \mathcal{A}$ ist. Es gilt $B \setminus \min(B) \sim B$. Somit folgt

$$f([B \setminus \min(B)]) = f([B]).$$

Also

$$|B \setminus \min(B) \triangle f([B \setminus \min(B)])| = |B \setminus \min(B) \triangle f([B])| =$$
$$= |B \triangle f([B])| \pm 1.$$

Also $\pi(B \setminus \min(B)) = 0$, d.h. $B \setminus \min(B) \notin \mathcal{A}$.

2. Fall: $B \notin \mathcal{A}$

Analog zum ersten Fall.

Aufgabe 22c

Sei $\mathcal{A}$ eine fast disjunkte Familie der Kardinalität $\mathfrak{c}$. Eine solche Familie können wir auch ohne das Auswahlaxiom finden, indem wir die Menge M (siehe Musterlösung zu SaA2a) geeignet abzählen. Sei $B \in [\omega]^\omega$. Gilt bereits $[B]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$, so sind wir fertig. Ansonsten sei $C \in [B]^\omega$ mit $C \in \mathcal{A}$ und wir definieren $B' := C \setminus \min(C)$. Angenommen es gibt ein $D \in [B']^\omega$ mit $D \in \mathcal{A}$. Dann wären aber D und B' nicht fast disjunkt $\lightning$. Also gilt tatsächlich

$$[B']^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset.$$

Aufgabe 23

- "$\omega_1 \leq \text{hom}$": Indirekt. Angenommen $\mathcal{H} = \{x_n \mid n \in \omega\}$ ist eine abzählbare, homogene Familie. Sei

$$a_0 \in x_0, \quad b_0 \in x_0 \setminus (a_0 + 1) \quad c_0 \in x_0 \setminus (b_0 + 1)$$

und für jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$

$$a_n \in x_n \setminus (c_{n-1} + 1) \quad b_n \in x_n \setminus (a_n + 1) \quad c_n \in x_n \setminus (b_n + 1).$$

Weiter definieren wir

$$\pi : [\omega]^2 \to 2$$

$$\{a,b\} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } \{a,b\} \cap \{a_n \mid n\in\omega\} \neq \emptyset, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n\in\omega$ gilt dann $\pi(\{a_n, b_n\}) = 0 \neq 1 = \pi(\{b_n, c_n\})$.

Also $\pi|_{[x_n]^2}$ ist nicht konstant. D.h. $\omega_1 \leq \text{hom}$.

- "$\text{hom} \leq c$": Nach Ramsey's Theorem ist $\mathcal{F} = [\omega]^\omega$ eine homogene Familie.

Es gilt $|[\omega]^\omega| = c$.