Axiomatische Mengenlehre - Serie 4 - Musterlösung

Aufgabe 14

Behauptung 1: Sei $enn: \omega \to \mathbb{Q}$ eine bijektive Funktion, sei ξ eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{F} := \{x \cap \mathbb{Q} \mid x \subseteq \mathbb{R} \text{ offen und nicht leer}\}$.
Dann ist

$$f: C(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^{\omega}\omega$$

$$\alpha \longmapsto \{\langle i, enn^{-1}(\xi(\overbrace{]\alpha(enn(i)) - \tfrac{1}{i+1}, \alpha(enn(i)) + \tfrac{1}{i+1}[\cap \mathbb{Q}}^{=: A_{\alpha,i}}))\rangle \mid i \in \omega\}$$

injektiv.

Beweis (Beh 1): Angenommen es gibt $\alpha, \beta \in C(\mathbb{R})$ mit $\alpha \neq \beta$ und $f(\alpha) = f(\beta)$.
Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|\alpha(x) - \beta(x)| = 4\varepsilon > 0$. Weiter gibt es ein offenes Intervall $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in I$ und

$$\forall y \in I \; (|\alpha(y) - \beta(y)| > 3\varepsilon).$$

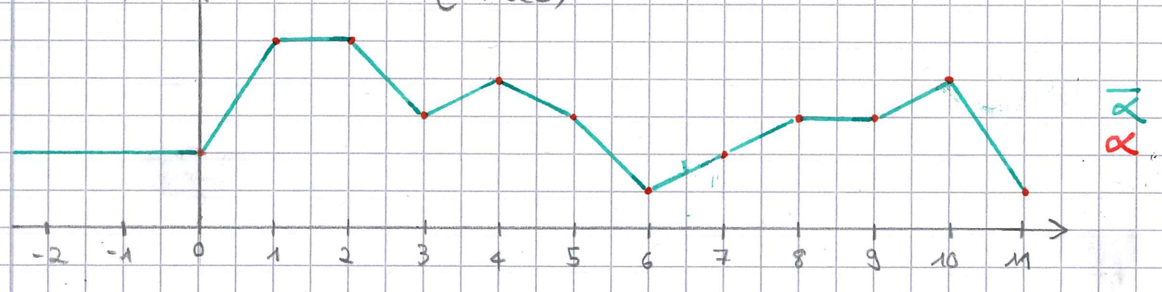
Weiter gibt es ein $q \in I \cap \mathbb{Q}$ mit $enn^{-1}(q) =: i$, sodass $\frac{1}{i+1} < \varepsilon$.
Also folgt $\xi(A_{\alpha,i}) \neq \xi(A_{\beta,i})$, denn $A_{\alpha,i} \cap A_{\beta,i} = \emptyset$. Das heisst $f(\alpha)(i) \neq f(\beta)(i)$ und somit ist f injektiv.

Behauptung 2: Die Funktion

$$g: {}^{\omega}\omega \longrightarrow C(\mathbb{R})$$

$$\alpha \longmapsto \overline{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} (\alpha(\lceil x \rceil) - \alpha(\lfloor x \rfloor))x + \alpha(\lfloor x \rfloor)\lceil x \rceil - \alpha(\lceil x \rceil)\lfloor x \rfloor & \text{für } x \geq 0 \\ \alpha(0) & \text{sonst} \end{cases}$$



ist injektiv.

Beweis (Beh 2): Angenommen g ist nicht injektiv. Dann gibt es $\alpha, \beta \in {}^{\omega}\omega$ mit $g(\alpha) = g(\beta)$ aber $\alpha \neq \beta$. Nach Definition von g kann das nicht sein.

Wir haben also zwei Injektionen, $f: C(\mathbb{R}) \to {}^{\omega}\omega$ und $g: {}^{\omega}\omega \to C(\mathbb{R})$.
Nach Aufgabe 15 gilt also $|C(\mathbb{R})| = |{}^{\omega}\omega| = |\mathbb{R}|$.

Aufgabe 15a

Wir definieren

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1/q & \text{wenn } x = p/q \text{ mit } q \in \omega, p \in \mathbb{Z} \text{ und } ggT(p,q) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung 1: f ist unstetig bei jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Beweis (Beh 1) Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$ und für jedes $n \in \omega$ sei $y_n := x_0 + \pi/n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0 + \lim_{n\to\infty} \pi/n = x_0$ aber $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0 \neq f(x_0)$. Nach dem Folgenkriterium für die Stetigkeit ist f bei x_0 also nicht stetig.

Behauptung 2 f ist stetig bei jedem $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Beweis (Beh 2). Sei $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Wir benutzen das ε-δ-Kriterium für den Nachweis der Stetigkeit. Sei also $\varepsilon > 0$. In jedem Intervall I (mit endlicher Länge) um x_0 herum gibt es nur endlich viele Punkte $x \in I \cap \mathbb{Q}$ mit $x = p_x/q_x$, $p_x \in \mathbb{Z}$, $q_x \in \omega$, $ggT(p_x, q_x) = 1$ mit $q_x \leq 1/\varepsilon$. Wir können also $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählen, dass für jedes $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ gilt

$$q_x > 1/\varepsilon.$$

Wir haben also

$$\forall x \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}| = |f(x)| = |1/q_x| < \varepsilon \right).$$

Somit ist f stetig bei x_0.

Aufgabe 15b

Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jedes $a \in \mathbb{R}$ und alle $\delta > 0$ definieren wir

$$B_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$$

$$osc_{B_\delta(a)} f := \sup_{x \in B_\delta(a)} f(x) - \inf_{x \in B_\delta(a)} f(x)$$

$$osc_f(a) := \inf_{\delta > 0} osc_{B_\delta(a)} f.$$

Behauptung 1: Die Menge aller Unstetigkeitspunkte S von f ist eine Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen.

Beweis (Beh 1): Es gilt

$$S = \{ a \in \mathbb{R} \mid osc_f(a) > 0 \}$$

$$= \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0 \, (\mathrm{osc}_f(a) \geq \varepsilon)\}$$

$$= \bigcup_{\varepsilon > 0} \{a \in \mathbb{R} \mid \mathrm{osc}_f(a) \geq \varepsilon\}$$

$$= \bigcup_{n \in \omega} \underbrace{\{a \in \mathbb{R} \mid \mathrm{osc}_f(a) \geq 1/n\}}_{=: A_n}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass A_n abgeschlossen ist, respektive äquivalent dazu, dass $A_n^c = \{a \in \mathbb{R} \mid \mathrm{osc}_f(a) < 1/n\}$ offen ist. Ist $a \in A_n^c$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $\mathrm{osc}_{B_\delta(a)} f < 1/n$. Das heisst, $B_\delta(a) \subseteq A_n^c$. Also ist A_n^c offen.

Behauptung 2: Seien A_n, $n \in \omega$ abgeschlossene Mengen, sodass

$$\mathrm{int}\left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right) \neq \emptyset$$

ist. Dann gibt es ein $n \in \omega$ mit $\mathrm{int}(A_n) \neq \emptyset$.

- Bemerkung: Diese Behauptung gilt in allen vollständigen, metrischen Räumen. Die Behauptung ist eine Version des Satzes von Baire.

Beweis (Beh 2): Sei $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Wir beweisen indirekt und nehmen an,

$$\forall \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} \; \forall n \in \omega \; (B_\delta(y) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n) \neq \emptyset). \qquad (*)$$

Da A_0 abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R} \setminus A_0$ offen und es gibt $0 < \varepsilon_0 < 1$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subseteq B_{2\varepsilon_0}(x_0) \subseteq \underbrace{B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n)}_{\neq \emptyset \text{ (wegen } *) \text{ und offen}}$$

Sei $n > 0$. Angenommen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sind bereits bestimmt. Dann gibt es $0 < \varepsilon_n < 1/2^n$ und $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq B_{2\varepsilon_n}(x_n) \subseteq \underbrace{B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap (\mathbb{R} \setminus A_n)}_{\neq \emptyset \text{ (wegen } *) \text{ und offen}}.$$

Es gilt

$$|x_j - x_k| \leq \varepsilon_k < 2^{-k} \to 0 \quad (j \geq k \to \infty)$$

Also ist $(x_k)_{k \in \omega}$ eine Cauchyfolge und da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$x^* \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \bigcap_{n \in \omega} (\mathbb{R} \setminus A_n) = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right) \Rightarrow x^* \notin \bigcup_{n \in \omega} A_n.$$

Weiter gilt

$$x^* \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n \;\lightning$$

Behauptung 3: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist keine Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen.

Beweis (Beh. 3): Sei $\mathbb{Q} = \{q_k \mid k\in\omega\}$. Weiter nehmen wir an, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, wobei jedes A_n abgeschlossen ist. Dann ist

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cup \bigcup_{k\in\omega} \{q_k\}.$$

Da $\operatorname{int}(\{q_k\}) = \emptyset$ ist für jedes $k\in\omega$, gibt es nach Beh. 2 ein $n\in\omega$ mit $\operatorname{int}(A_n) \neq \emptyset$. Aber $\operatorname{int}(A_n) \subseteq \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ $\lightning$.

Behauptung 1 zusammen mit Behauptung 3 ergibt, dass es keine Funktion $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ unstetig ist und auf $\mathbb{Q}$ stetig.

Aufgabe 13a

"$\subseteq$" Sei $a\in A_0$. Ist $a\in D = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, so sind wir fertig. Nehmen wir also an, $a\notin D$. Sei $m\in\omega$ kleinst möglich mit

$$a\notin A_m. \quad (\text{Bemerke, } m\neq 0)$$

Dann ist $a\in A_{m-1}\setminus B_{m-1}$, wenn $a\notin B_{m-1}$ und $a\in B_{m-1}\setminus A_m$, wenn $a\in B_{m-1}$ ist. Also folgt "$\subseteq$".

"$\supseteq$" Sei $n\in\omega$. Es gilt nach Definition $A_n\subseteq A = A_0$ und $B_n\subseteq A = A_0$. Ausserdem ist $D = \bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq A_0$. Also folgt auch "$\supseteq$".

Aufgabe 13b

Es gilt $B_0 = A_0\setminus(A_0\setminus B_0)$. Da die Vereinigung in (a) auf der rechten Seite disjunkt ist, folgt (b) also aus (a).

Aufgabe 13c

Wir zeigen, dass die Funktion

$$h_n = g\circ f|_{A_n\setminus B_n}: A_n\setminus B_n \to A_{n+1}\setminus B_{n+1}, \quad x \mapsto (g\circ f)(x)$$

bijektiv ist.

Die Funktion h ist injektiv, da g und f injektiv sind. Ausserdem gilt

$$h[A_n\setminus B_n] = h[A_n] \cap h[B_n{}^c] \underset{h \text{ injektiv}}{=} A_{n+1} \cap h[B_n]^c = A_{n+1} \cap B_{n+1}{}^c = A_{n+1}\setminus B_{n+1}.$$

Also ist h auch surjektiv.

Aufgabe 13d

Wir definieren

$$h: A_0 \longrightarrow B_0$$

$$x \mapsto \begin{cases} h_n(x) & \text{wenn } x \in A_n \setminus B_n \text{ ist} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist eine Bijektion (siehe (a) und (b)).