Axiomatische Mengenlehre – Serie 3 – Musterlösung

Aufgabe 11

Wir definieren für jede Menge x und jedes $\alpha \in \Omega$

$$F_\alpha(x) := \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } x = \emptyset \\ x(\beta)+\alpha & \text{wenn } \operatorname{dom}(x) = \beta+1 \text{ für ein } \beta \in \Omega \\ \bigcup_{\delta\in\beta} x(\delta) & \text{wenn } \operatorname{dom}(x)=\beta,\ \beta \in \Omega\setminus\{\emptyset\} \text{ Limesordinalzahl} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem transfiniten Rekursionstheorem gibt es eine Klassenfunktion G_α die auf Ω definiert ist, mit

$$G_\alpha(\beta) = F_\alpha(G_\alpha|_\beta) \quad \text{für jedes } \beta \in \Omega.$$

Wir zeigen mittels transfiniter Induktion, dass $\forall \beta \in \Omega\ (G_\alpha(\beta) = \alpha\cdot\beta)$ gilt.

Ist $\beta = 0$, so gilt

$$G_\alpha(0) = G_\alpha(\emptyset) = F_\alpha(G_\alpha|_\emptyset) = F_\alpha(\emptyset) = \emptyset = 0.$$

Sei $\gamma \in \Omega$ mit $G_\alpha(\gamma) = \alpha\cdot\gamma$. Dann gilt

$$G_\alpha(\gamma+1) = G_\alpha(\gamma\cup\{\gamma\}) = F_\alpha(G_\alpha|_{\gamma\cup\{\gamma\}}) = G_\alpha(\gamma)+\alpha = \alpha\cdot\gamma+\alpha.$$

Sei $\beta \in \Omega\setminus\{\emptyset\}$ eine Limesordinalzahl, sodass für jedes $\gamma\in\beta$, $G_\alpha(\gamma) = \alpha\cdot\gamma$ ist. Dann erhalten wir

$$G_\alpha(\beta) = F_\alpha(G_\alpha|_\beta) = \bigcup_{\gamma\in\beta} G_\alpha|_\beta(\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\beta} G_\alpha(\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\beta}\alpha\cdot\gamma.$$

Also gilt tatsächlich für alle $\beta \in \Omega\ (G_\alpha(\beta) = \alpha\beta)$.

Aufgabe 10

Wir definieren für jede Menge x und jedes $\alpha \in \Omega$

$$F(x) \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } x = \emptyset \\ \mathcal{P}(x(\alpha)) & \text{wenn } \operatorname{dom}(x) = \alpha+1 \text{ für ein } \alpha \in \Omega \\ \bigcup_{\beta\in\alpha} x(\beta) & \text{wenn } \operatorname{dom}(x)=\alpha,\ \alpha \in \Omega\setminus\{\emptyset\} \text{ Limesordinalzahl} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem transfiniten Rekursionstheorem gibt es eine Klassenfunktion G, die auf Ω definiert ist mit

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha) \quad \text{für jedes } \alpha \in \Omega.$$

Wir zeigen mittels transfiniter Induktion, dass $\forall \alpha \in \Omega\ (G(\alpha) = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset))$ ist

Ist $\beta = 0$, so gilt
$$G(0) = F(G|_\emptyset) = \emptyset = \mathcal{P}^0(\emptyset).$$
Sei $\alpha \in \Omega$ mit $G(\alpha) = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset)$. Dann gilt
$$G(\alpha+1) = F(G|_{\alpha+1}) = F(G|_{\alpha \cup \{\alpha\}}) = \mathcal{P}(G(\alpha)) = \mathcal{P}^{\alpha+1}(\emptyset).$$
Sei nun $\alpha \in \Omega \setminus \{\emptyset\}$ eine Limesordinalzahl, sodass
$$\forall \beta \in \alpha\ (G(\beta) = \mathcal{P}^\beta(\emptyset)).$$
Dann gilt:
$$G(\alpha) = F(G|_\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} G|_\alpha(\beta) = \bigcup_{\beta \in \alpha} G(\beta) = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}^\beta(\emptyset) = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset).$$
Also gilt für jedes $\alpha \in \Omega$
$$G(\alpha) = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset).$$

<u>Aufgabe 12a</u>

$m_0 = 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$

$m_1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 4{,}4 \cdot 10^{38}$

$m_2 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 3{,}2 \cdot 10^{616}$

$m_3 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 2{,}5\ 10^{10921}$

Also gilt sicher $m_0 < m_1 < m_2 < m_3$.

<u>Aufgabe 12b & 12c</u>

$\mu_0 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

$\mu_1 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 2$

$\mu_2 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1$

$\mu_3 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}$

Es ist klar, dass $\mu_3 \in \mu_2 \in \mu_1 \in \mu_0$ ist, da der erste Teil $(\omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1})$ immer der gleiche ist und $0 \in 1 \in 2 \in \omega$ ist.

<u>Aufgabe 12d</u>

Für jedes $n \in \omega$ sei
$$f_n : \omega \to C$$
diejenige Funktion, die jedes $k \in \omega$ abbildet auf diejenige Zahl die entsteht, wenn wir in der Basis-n-Repräsentation von k jedes Auftreten von n durch ω ersetzen.

Sei $m \in \omega$ und sei $(m_k)_{k \in \omega}$ die dazugehörige Goodstein-Sequenz

Wir definieren für jedes $k \in \omega$

$$\mu_k := f_{k+2}(m_k).$$

Diese Folge ist streng monoton fallend. Nach dem Fundierungsaxiom kann die Folge $(\mu_k)_{k\in\omega}$ nicht unendlich lange sein. Das heisst,

$$\exists k \in \omega \, (\mu_k = 0).$$

Da für jedes $n \in \omega$ gilt $m_n \leq \mu_n$, folgt $m_k \leq \mu_k = 0$. Also $m_k = 0$.