Axiomatische Mengenlehre – Serie 0 – Musterlösung

Aufgabe 0

Wir zeigen die Aussage indirekt und nehmen an, $\mathcal{F} = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare "reaping family". Wähle

$$a_0 \in y_0 \quad \text{und} \quad b_0 \in y_0 \setminus \{a_0\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wählen wir ausserdem

$$a_n \in y_n \setminus \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\} \quad \text{und} \quad b_n \in y_n \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Definiere $x := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$a_n \in y_n \cap x \quad \text{und} \quad b_n \in y_n \setminus x.$$

Also ist $\mathcal{F}$ doch keine "reaping family". $\lightning$

Aufgabe 1a

Wir zeigen dies indirekt und nehmen an, $\mathcal{F}$ sei eine dominierende Familie, die nicht unbeschränkt ist. Das heisst, es gibt ein $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $g \in \mathcal{F}$ gilt

$$g <^* f. \qquad (1)$$

Da $\mathcal{F}$ dominierend ist, gibt es aber ein $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in $\mathcal{F}$ mit

$$f <^* h.$$

Wegen (1) haben wir also $h <^* f <^* h$. Das heisst (nach Definition von "$<^*$"), es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h(n) < f(n) < h(n)$. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Aufgabe 1b

Wir zeigen dies indirekt und nehmen an, $\mathcal{F} = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare, unbeschränkte Familie. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$g(n) = \max\{f_k(n) \mid k \leq n\} + 23$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f_k <^* g$$

weil $f_k(m) < g(m)$ ist für alle $m \geq k$.

Aufgabe 2a

Die Menge

$$M = \{ s \mid s : \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{N} \text{ ist eine Funktion} \}$$

ist abzählbar. Sei $\{ s_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ eine Abzählung von M. Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir

Notation: $f|_n := f|_{\{0,1,\dots,n-1\}}$

$$x_f := \{ i \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \, (f|_n = s_i) \}.$$

Sei $\mathcal{A}_c := \{ x_f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist eine Funktion} \}$. Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei verschiedene Funktionen. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(n) \neq g(n).$$

Insbesondere gilt also für alle $k \geq n$

$$f|_k \neq g|_k$$

Also ist $|x_f \cap x_g| < \infty$. Daraus folgt auch, dass $|\mathcal{A}_c| = c$ ist, da es c viele Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 2b

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir

$$t_n : \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{N}$$
$$k \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \neq n-1 \\ 1, & \text{wenn } k = n-1. \end{cases}$$

Weiter sei $x_0 := \{ i \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \, (t_n = s_i) \}$. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|x_f \cap x_0| \leq 1.$$

Warum? Die t_n's sind Anfangsabschnitte von paarweise verschiedenen Funktionen. Das heisst: Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f|_n = t_n.$$

Dann gibt es kein $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ mit $f|_m = t_m$.