Axiomatische Mengenlehre Serie 8

Der Satz von Ramsey Besprechung am 16. November

21. Sei $\pi : \omega \to r$ eine r-Färbung von ω, wobei $r > 0$.

(a) Zeige: Es gibt eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen $\{x_n : n \in \omega\}$, so dass die Menge $\{x_i + x_j : i, j \in \omega \wedge i \neq j\}$ monochromatisch ist.

(b) Zeige: Es gibt eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen $\{y_n : n \in \omega\}$, so dass die Menge $\{y_i \cdot y_j : i, j \in \omega \wedge i \neq j\}$ monochromatisch ist.

22. Eine Menge $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ hat genau dann die *Ramsey Eigenschaft*, falls es eine Menge $B \in [\omega]^\omega$ gibt, so dass gilt:

$$[B]^\omega \subseteq \mathscr{A} \quad \text{oder} \quad [B]^\omega \cap \mathscr{A} = \emptyset$$

(a) Zeige, dass jede abzählbare Menge $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ die Ramsey Eigenschaft hat.

(b) Definiere (mit AC) eine Menge $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ welche *nicht* die Ramsey Eigenschaft hat.

(c) Konstruiere (ohne AC) eine Menge $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ der Kardinalität $\mathfrak{c}$, so dass für jedes $B \in [\omega]^\omega$ ein $B' \in [B]^\omega$ existiert mit

$$[B']^\omega \cap \mathscr{A} = \emptyset\,.$$

23. Eine Familie $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ heisst *homogen*, falls für jede Färbung $\pi : [\omega]^2 \to 2$ ein $x_\pi \in \mathscr{F}$ existiert, so dass $\pi|_{[x_\pi]^2}$ konstant ist.

Sei $\mathfrak{hom}$ die kleinste Kardinalität einer homogenen Familie, *d.h.*,

$$\mathfrak{hom} := \min\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \ \mathscr{F} \textit{ ist homogen}\}\,.$$

Zeige: $\omega_1 \leq \mathfrak{hom} \leq \mathfrak{c}$.