Axiomatische Mengenlehre Serie 7

Kardinalzahlcharakteristiken Besprechung am 9. November

---

19. Zeige, dass jede splitting Family $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ überabzählbar ist.

Eine Familie $\mathscr{T} \subseteq [\omega]^\omega$ ist ein **tower**, falls $\mathscr{T}$ durch ${}^*\supseteq$ wohlgeordnet ist und keinen unendlichen pseudo-Durchschnitt besitzt. Die **tower number** $\mathfrak{t}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathfrak{t} := \min\left\{|\mathscr{T}| : \mathscr{T} \subseteq [\omega]^\omega \text{ ist ein tower}\right\}$$

20. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$

(b) $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}$

(c) $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{b}$

Bemerkung: Erst vor ein paar Jahren wurde von Maryanthe Malliaris und Saharon Shelah gezeigt, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$ in ZFC beweisbar ist (siehe *Cofinality spectrum theorems in model theory, set theory, and general topology*, J. Amer. Math. Soc., 29 (2016), 237–297).