

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **nirgends konstant**, falls für jedes offene, nicht leere Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  gilt:  $f|_I$  ist nicht konstant.

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist eine **magic set**, wenn für alle stetigen, nirgends konstanten Funktionen  $f, g$  gilt:

$$g[M] \subseteq f[M] \Rightarrow f = g.$$

18. (a) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall mit nicht leerem Inneren, sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, nirgends konstante Funktion und sei  $x \in \mathbb{R}$ .  
Zeige, dass  $f^{-1}(\{x\})$  nicht dicht ist in  $I$ .
- (b) Sei  $I$  wie oben. Folgere aus (a), dass

$$I \setminus \left( \bigcup_{n \in \omega} f_n^{-1}(\{x_n\}) \right) \neq \emptyset,$$

für jede Folge  $(x_n)_{n \in \omega}$  in  $\mathbb{R}$  und alle Folgen  $(f_n)_{n \in \omega}$  von stetigen, nirgends konstanten Funktionen.

- (c) Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{F} := \{(f, g) \mid f, g \text{ sind verschieden, stetig und nirgends konstant}\}$$

die Kardinalität  $\mathfrak{c}$  hat.

- (d) Zeige, dass es für zwei verschiedene stetige Funktionen  $f$  und  $g$  ein abgeschlossenes Intervall  $I$  mit nicht leerem Inneren gibt, sodass für jedes  $x \in I$  gilt:  $f(x) \neq g(x)$ .
- (e) Konstruiere in einem Modell von ZFC + CH, *d.h.* in einem Modell von ZFC in dem die Kontinuumshypothese gilt, mittels transfiniter Induktion eine magic set.

*Hinweis:* Benutze die Teilaufgaben (b), (c), (d).