Axiomatische Mengenlehre Serie 13

Stichworte zur Prüfungsvorbereitung

1 Axiome der Mengenlehre

- Axiome der Mengenlehre; insbesondere Auswahlaxiom und äquivalente Formulierungen (*z.B.* Wohlordnungsprinzip und Teichmüller-Prinzip)
- Definition von Ordinalzahlen und deren Eigenschaften
- Zusammenhang zwischen Ordinalzahlen und wohlgeordneten Mengen
- Konstruktion von ω
- Transfinite Rekursion und einige Folgerungen daraus (*z.B.* Addition von Ordinalzahlen)
- Cummulative Hierarchie der Mengen
- Kardinalzahlen in ZF: Cantor-Bernstein Theorem, Theorem von Cantor, Kardinalzahlen als Klassen/Mengen

2 Kardinalzahlarithmetik in ZFC

- Definition von Kardinalzahlen als Ordinalzahlen
- Kardinalzahlarithmetik
- Kofinalität einer Kardinalzahl und reguläre Kardinalzahlen
- Regularität von Nachfolgerkardinalzahlen
- Ungleichung von König-Jourdain-Zermelo und die Folgerung $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$

3 Kardinalzahlcharakteristiken

- Definitionen der 9 Kardinalzahlcharakteristiken ω_1, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$
- Die Grössenbeziehungen zwischen diesen 9 Kardinalzahlcharakteristiken welche in ZFC bewiesen werden können

4 DER SATZ VON RAMSEY

- Beweis des Satzes von Ramsey
- Verallgemeinerungen und warum sie fehlschlagen
- die Ramsey-Eigenschaft von Mengen $A \subseteq [\omega]^\omega$

5 FILTER & ULTRAFILTER (ÜBER ω)

- Definitionen: Filter, Fréchet-Filter, Ultrafilter, Hauptultrafilter, nicht-triviale Ultrafilter, Ramsey-Ultrafilter, P-point, Q-point
- Ultrafiltertheorem
- Eigenschaften von Ramsey-Ultrafiltern, P-points und Q-points (*z.B.* bezüglich Funktionen $f : \omega \to \omega$)
- Verschiedene Charakterisierungen von Ramsey-Ultrafiltern, P-points und Q-points
- Axiom der Determiniertheit AD und Beweis von $\mathsf{AC} \Rightarrow \neg\mathsf{AD}$
- Charakterisierung von P-points mit unendlichen Spielen
- Rudin-Keisler-Ordnung der Ultrafilter und deren Eigenschaften

6 DAS MARTIN-AXIOM

- Definitionen: Partialordnung, offen-dichte Mengen, *ccc*, $\mathscr{D}$-generischer Filter
- Verallgemeinerungen von MA und warum sie fehlschlagen
- Folgerungen aus dem Martin-Axiom: $\mathrm{cov}(\mathscr{N}) = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$
- Abgeschwächte Versionen des Martin-Axioms, *d.h.* $\mathsf{MA}(\sigma\text{-centred})$ und $\mathsf{MA}(\mathrm{ctbl})$
- Folgerungen aus $\mathsf{MA}(\sigma\text{-centred})$: $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, $\mathrm{add}(\mathscr{M}) = \mathfrak{c}$, "*es existieren magic sets*", $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c} \Rightarrow 2^\kappa = \mathfrak{c}$
- Folgerungen aus $\mathsf{MA}(\mathrm{ctbl})$: "*es existieren* $2^{\mathfrak{c}}$ *Ramsey-Ultrafilter*"