Axiomatische Mengenlehre Serie 10

Rudin-Keisler-Ordnung der Ultrafilter Besprechung am 0. Dezember

---

30. Zeige: Ist $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ein Ultrafilter über ω und $f : \omega \to \omega$ eine Funktion, so ist

$$f(\mathscr{V}) := \big\{x \subseteq \omega : \exists y \in \mathscr{V}\big(f[y] \subseteq x\big)\big\}$$

ebenfalls ein Ultrafilter über ω.

Für Ultrafilter $\mathscr{U}, \mathscr{V} \subseteq [\omega]^\omega$ definieren wir

$$\mathscr{U} \leq_{RK} \mathscr{V} \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathscr{U} = f(\mathscr{V}) \qquad \text{für eine Funktion } f : \omega \to \omega$$

und

$$\mathscr{U} \equiv_{RK} \mathscr{V} \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathscr{U} = f(\mathscr{V}) \qquad \text{für eine Bijektion } f : \omega \to \omega\,.$$

31. (a) Zeige, dass die Relation “$\leq_{RK}$” transitiv ist.

(b) Zeige, dass die Relation “$\equiv_{RK}$” eine Äquivalenzrelation ist.

32. Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter und $f : \omega \to \omega$ eine Funktion, so gilt:

$$f(\mathscr{U}) = \mathscr{U} \;\longrightarrow\; \{n \in \omega : f(n) = n\} \in \mathscr{U} \tag{$*$}$$

Zeige, dass aus $(*)$ folgt:

$$f(\mathscr{U}) \equiv_{RK} \mathscr{U} \;\longrightarrow\; \exists x \in \mathscr{U}\big(f|_x \text{ ist injektiv}\big)$$

33. Zeige: Sind $\mathscr{U}, \mathscr{U}' \subseteq [\omega]^\omega$ zwei Ultrafilter, wobei $\mathscr{U}$ ein Ramsey-Ultrafilter ist, so gilt:

$$\mathscr{U}' \leq_{RK} \mathscr{U} \;\longrightarrow\; \mathscr{U}' \equiv_{RK} \mathscr{U}$$