Logik II

Die Logischen Axiome

Bis jetzt haben wir uns auf einer syntaktischen Ebene bewegt, das heisst Formeln waren bloss Zeichenketten ohne irgend eine Bedeutung. Falls wir den Symbolen aber eine Bedeutung geben (sozusagen Leben einhauchen), wechseln wir auf die *semantische* Ebene, und syntaktisch korrekt geformte Zeichenketten werden zu Aussagen über mathematische Objekte, die in Abhängigkeit der Interpretation (*bzw.* im Kontext, in dem sie stehen) *wahr* oder *falsch* sind. Eine Formel, welche ungeachtet ihrer Interpretation immer wahr ist, heisst **Tautologie**, und gewisse Tautologien heissen **logische Axiome**. Wir können aber auch den Standpunkt vertreten, dass wir ungeachtet der möglichen Interpretation einfach ein paar Typen von Formeln auswählen und diese als logische Axiome deklarieren. Das heisst wir können ohne einen Wahrheitsbegriff einzuführen und ohne die logischen Symbole zu interpretieren, rein *syntaktisch* gewisse Formeln als logische Axiome auszeichnen.

Egal welchen Standpunkt wir vertreten, die Idee hinter den logischen Axiomen ist, dass sich jede Tautologie mit Hilfe von (zu definierenden) *Schlussregeln* aus den logischen Axiomen formal beweisen lässt. Falls wir viele Schlussregeln zur Verfügung haben, kommen wir mit wenigen logischen Axiomen aus. Falls wir aber (wie in unserem Fall) bloss zwei Schlussregeln zulassen, so brauchen wir entsprechend mehr logische Axiome um alle Tautologien zu beweisen.

Die folgenden logischen Axiome L_1–L_{18} sind eigentlich nicht einzelne Axiome sondern **Axiomen-Schemata**, das heisst Formeltypen, welche für eine unendliche Menge von konkreten Formeln dieses Typs stehen.

Seien φ, φ_1, φ_2, φ_3, ψ, beliebige Formeln:

L_1 : $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

L_2 : $\big(\psi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)\big) \to \big((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2)\big)$

L_3 : $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

L_4 : $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$

L_5 : $\varphi \to \big(\psi \to (\psi \wedge \varphi)\big)$

L_6 : $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

L_7 : $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

L_8 : $(\varphi_1 \to \varphi_3) \to \big((\varphi_2 \to \varphi_3) \to \big((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3\big)\big)$

L_9 : $(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$

L_{10}: $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

L_{11}: $\varphi \vee \neg\varphi$

Die logischen Axiome L_1–L_{11} sind die Axiome der **Aussagenlogik**. In der Aussagenlogik werden Beziehungen zwischen *Aussagen als Ganzes* betrachtet. Im Unterschied dazu betrachtet die **Prädikatenlogik** auch Beziehungen der Objekte untereinander. Dazu benutzen wir die Zeichen "$=$", "$\forall$" und "$\exists$", deren Gebrauch im Folgenden axiomatisch festgelegt wird. Die folgenden vier Axiome regeln den Gebrauch von "$\forall$" und "$\exists$", und die letzten drei Axiome regeln die Bedeutung des Zeichens "$=$".

Um die nächsten beiden logischen Axiome zu formulieren, müssen wir etwas weiter ausholen: Kommt die Variable x in der Formel $\varphi(x)$ frei vor und ist t ein Term, so ist $\varphi(x/t)$ die Formel welche wir erhalten, wenn wir an allen Stellen wo x in $\varphi(x)$ frei vorkommt, x durch t ersetzen. Solch eine sogenannte **Substitution** ist zulässig, falls keine Stelle, an der x in φ frei vorkommt, im Bereich eines Quantors ist der irgend eine Variable, welche in t vorkommt, bindet (*d.h.* für alle Variablen v welche in t vorkommen gilt, dass keine Stelle, an der x frei in φ vorkommt, im Bereich von "$\exists v$" oder "$\forall v$" liegt).

Sei t ein Term und sei die Substitution $\varphi(x/t)$ zulässig.

L_{12}: $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$

L_{13}: $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$

Sei ψ eine Formel in der die Variable x nirgends frei vorkommt.

L_{14}: $\forall x\big(\psi \to \varphi(x)\big) \to \big(\psi \to \forall x \varphi(x)\big)$

L_{15}: $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi\big) \to \big(\exists x \varphi(x) \to \psi\big)$

Was bis jetzt noch nicht behandelt wurde ist das Gleichheitszeichen "$=$". In unserem formalen System wird die Gleichheit durch die folgenden 3 Axiome definiert:

Seien $t, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$ Terme, R ein n-stelliges Relationssymbol (*z.B.* das binäre Relationssymbol "$=$"), und F ein n-stelliges Funktionssymbol.

L_{16}: $t = t$

L_{17}: $\big(t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_n = t'_n\big) \to \big(R(t_1, \dots, t_n) \to R(t'_1, \dots, t'_n)\big)$

L_{18}: $\big(t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_n = t'_n\big) \to \big(F(t_1, \dots, t_n) = F(t'_1, \dots, t'_n)\big)$

Der logische Operator "$\leftrightarrow$", welcher nicht in unserer Liste von logischen Axiomen vorkommt, wird definiert durch

$$\varphi \leftrightarrow \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)\,,$$

d.h. $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist bloss eine abgekürzte Schreibweise für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Zu den logischen Axiomen L_1–L_{18} dürfen wir, in Abhängigkeit zur Theorie die wir betrachten wollen, beliebig viele **nicht-logische Axiome** hinzufügen, wie zum Beispiel die Axiome der Gruppentheorie, die Axiome der Peano Arithmetik, oder die Axiome der Mengenlehre.