Logik I

Symbole, Terme, Formeln

Wie jede geschriebene Sprache basiert die *Prädikatenlogik erster Stufe* auf einem *Alphabet*, welches aus den folgenden *Symbolen* besteht:

(a) **Variabeln** wie zum Beispiel $v_0, v_1, x, y, \ldots$ sind "Platzhalter" für die Objekte welche wir untersuchen (*z.B.* die Elemente einer Gruppe, natürliche Zahlen, oder Mengen).

(b) **Logische Operatoren** wie zum Beispiel "$\neg$" (*nicht*), "$\wedge$" (*und*), "$\vee$" (*oder*), "$\rightarrow$" (*impliziert*), und "$\leftrightarrow$" (*genau dann wenn*).

(c) **Logische Quantoren** die da sind *Existenzquantor* "$\exists$" (*es existiert*) und *Allquantor* "$\forall$" (*für alle*), wobei die Quantoren auf Objekte beschränkt sind und nicht zum Beispiel auf Formeln angewendet werden dürfen.

(d) **Gleichheitszeichen** "$=$", welches für die spezielle Relation der Gleichheit steht.

Die Symbole (a)–(d) heissen **logische Symbole**. Je nach mathematischem Gebiet, welches untersucht werden soll, werden sogenannte **nicht-logische Symbole** eingeführt:

(e) **Konstantensymbole** wie zum Beispiel die Zahl $\mathsf{0}$ in der Peano Arithmetik (Zahlentheorie), oder das Neutralelement e in der Gruppentheorie. Konstantensymbole stehen für bestimmte, festgelegte Objekte.

(f) **Funktionssymbole** wie zum Beispiel $\circ$ (die Operation in der Gruppentheorie), oder $+, \cdot, \mathsf{s}$ (die Operationen in der Peano Arithmetik, wobei $\mathsf{s}(n) := n + 1$). Funktionssymbole stehen für bestimmte Funktionen, welche Objekte als Argumente nehmen und Objekte zurückgeben. Mit jedem Funktionssymbol ist eine "Stelligkeit" verbunden, die uns sagt, wieviele Argumente das Funktionssymbol benötigt (*z.B.* ist "$\circ$" eine 2-stellige oder binäre Operation und die Nachfolgeroperation "s" ist eine 1-stellige Funktion).

(g) **Relationssymbole** (wie zum Beispiel $\in$ in der Mengenlehre) stehen für feste Relationen zwischen (oder Eigenschaften von) Objekten. Wieder gehört zu jedem Relationssymbol eine "Stelligkeit"(*z.B.* ist "$\in$" eine 2-stellige oder binäre Relation).

Die Menge der nicht-logischen Symbole, welche zu einer bestimmten Theorie T (wie *z.B.* der Gruppentheorie oder der Mengenlehre) gehört, heisst **Signatur** *bzw.* **Sprache** der entsprechenden Theorie und wird mit $\mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$ bezeichnet; und Formeln, welche in einer Sprache $\mathscr{L}$ formuliert sind, heissen $\mathscr{L}$-Formeln. Zum Beispiel besteht die Sprache der Gruppentheorie bloss aus den nicht-logischen Symbolen "e" und "$\circ$", das heisst $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} = \{\mathsf{e}, \circ\}$ ist die Sprache der Gruppentheorie.

Ein erster Schritt zu einer richtigen Sprache besteht darin, mit diesen logischen und nicht-logischen Symbolen Wörter (*d.h. Terme*) zu bilden.

Terme:

(T1) Jede Variable ist ein Term.

(T2) Jedes Konstantensymbol ist ein Term.

(T3) Sind $t_1, \ldots, t_n$ bereits gebildete Terme und ist F ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $Ft_1 \cdots t_n$ ein Term.

Es ist üblich weitere Symbole (wie *z.B.* Klammern) einzuführen, damit Terme, Relationen, und andere Ausdrücke einfacher zu lesen sind. Zum Beispiel schreiben wir $F(t_1, \ldots, t_n)$ anstelle von $Ft_1 \cdots t_n$.

Terme entsprechen in einem gewissen Grad den Wörtern, weil sie immer Objekte bezeichnen. Wie richtige Wörter sind sie keine Aussagen und können deshalb keine Beziehungen zwischen den Objekten ausdrücken. Im nächsten Schritt werden mit den Wörtern Aussagen (*d.h. Formeln*) gebildet.

Formeln:

(F1) Sind t_1 und t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

(F2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und R ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $Rt_1 \cdots t_n$ eine Formel.

(F3) Ist φ eine bereits gebildete Formel, dann ist $\neg\varphi$ eine Formel.

(F4) Sind φ und ψ Formeln, dann sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln. (Um Klammern zu vermeiden, können diese Formeln *z.B.* in *polnischer Notation* geschrieben werden, *d.h.* $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, *et cetera*.)

(F5) Ist φ eine Formel und x eine Variable, dann sind $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ Formeln.

Für binäre Relationen R (*bzw.* binäre Funktionen F) schreiben wir meist xRy (*bzw.* xFy) anstelle von $R(x, y)$ (*bzw.* $F(x, y)$). Zum Beispiel schreiben wir $x \in y$ (*bzw.* $x + y$) anstelle von $\in(x, y)$ (*bzw.* $+(x, y)$), und wir schreiben $x \notin y$ anstelle von $\neg(x \in y)$.

Ist φ eine Formel der Form $\exists x\psi$ oder der Form $\forall x\psi$ (für eine Formel ψ) und x kommt in der Formel ψ vor, dann sagen wir, dass x im *Bereich* eines logischen Quantors ist. Die Variable x heisst dann **gebunden**. Wenn die Variable x (an einer bestimmten Stelle) in keinem Bereich eines logischen Quantors ist, so heisst x an dieser Stelle **frei**. In einer Formel kann eine Variable x durchaus frei und gebunden vorkommen (*z.B.* $\exists y(x = y) \vee \forall x(x = y)$, hier kommen sowohl x wie auch y sowohl frei wie auch gebunden vor).

Eine Formel φ ist ein **Satz**, wenn alle Variabeln, die in der Formel φ vorkommen, überall gebunden sind. Sätze sind also Formeln ohne freie Variabeln. Zum Beispiel sind $\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$ und $\forall x\forall y(x = y)$ Sätze.