**48.** Gib die Anzahl Stellen einer Zahl $c$ an, welche die Sequenz $\langle 2, 0, 2, 2\rangle$ codiert.

Lösung:

Gesucht ist also ein $c$, sodass gilt:

$$\beta(c,0) = 4 \qquad \beta(c,1) = 2 \qquad \beta(c,2) = 0 \qquad \beta(c,3) = 2 \qquad \beta(c,4) = 2$$

Zuerst suchen wir wieder $x, y$ so, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. In der Notation von den Lösungen der letzten Serie soll also gelten:

$$\begin{aligned}
\varphi_y(0,4) &= 1 + 22y, \\
\varphi_y(1,2) &= 1 + 13y, \\
\varphi_y(2,0) &= 1 + 6y, \\
\varphi_y(3,2) &= 1 + 29y, \\
\varphi_y(4,2) &= 1 + 40y,
\end{aligned}$$

sollen Teiler von $x$ sein, wobei die Terme

$$\begin{aligned}
\varphi_y(0,0) &= 1 + 2y, \\
\varphi_y(0,1) &= 1 + 4y, \\
\varphi_y(0,2) &= 1 + 8y, \\
\varphi_y(0,3) &= 1 + 14y, \\
\varphi_y(1,0) &= 1 + 3y, \\
\varphi_y(1,1) &= 1 + 7y, \\
\varphi_y(3,0) &= 1 + 11y, \\
\varphi_y(3,1) &= 1 + 19y, \\
\varphi_y(4,0) &= 1 + 18y, \\
\varphi_y(4,1) &= 1 + 28y,
\end{aligned}$$

$x$ nicht teilen dürfen.

Analog zur Aufgabe 47 in der vorherigen Serie können wir

$$y := \mathrm{kgV}(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 40) = 5342931457063200$$

und

$$x = (1 + 22y)\,(1 + 13y)\,(1 + 6y)\,(1 + 29y)\,(1 + 40y) \approx 8,667 \cdot 10^{84}$$

setzen und alle obigen Bedingungen sind erfüllt.

Wir können nun $c$ berechnen aus

$$c = \mathrm{op}(x, y) = 7,5118 \cdot 10^{169},$$

wobei $c$ 170 Stellen hat.

**49.** Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$, welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{R}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_\mathbb{R}$-Struktur $\mathbb{R}$.

Zeige, dass in $\mathbb{R}^\star$ infinitesimale Zahlen existieren, dass heisst, Zahlen, die positiv, beliebig klein und von 0 verschieden sind. Existieren solche infintesimale Zahlen auch, wenn wir $\mathbb{R}$ überall durch $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{N}$ ersetzen?

Lösung:

Sei $\langle a_n^\star : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine Folge von Zahlen definiert durch $a_n := \frac{1}{n}$, dann ist $a^\star \neq 0$, da $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter ist, aber $a^\star < \frac{1}{m}$ für jedes beliebige $m \in \mathbb{N}$, weil $\mathscr{U}$ den Fréchet-Filter enthält. Somit existieren infinitesimale Zahlen in $\mathbb{R}^\star$ und $\mathbb{Q}^\star$.

Sei nun $\langle a_n^\star : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine infinitesimale Zahl in $\mathbb{N}^\star$. Es muss somit gelten $a^\star < 1$, was äquivalent ist zu $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n^\star < 1\} \in \mathscr{U}$. Da aber $a^\star$ nur Werte in $\mathbb{N}$ annimmt, ist die letzte Menge identisch zu $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n^\star = 0\}$, also $a^\star = 0$. Somit kann $a^\star$ nicht infinitesimal sein.

**50.** Sei $f$ eine reelle Funktion, welche an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist und sei $\delta$ eine positive infinitesimale Zahl. Für jedes von 0 verschiedene $\varepsilon$ im Interval $[-\delta, \delta]$ sei

$$\Delta_f(x_0, \varepsilon) := \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Zeige, dass $f'(x_0) = a$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall \varepsilon \in [-\delta, \delta] \Big( \mathrm{st}\big(\Delta_f(x_0, \varepsilon)\big) = a \Big)$.

*Hinweis*: Es ist empfehlenswert, im Buch die Seiten 216-220 zu lesen.

Lösung:

Sei st die stetige Funktion, welche den Zahlen aus $\mathbb{R}^\star$ den (eindeutigen) Standardteil in $\mathbb{R}$ zuweist (sofern existent), so können wir ein infinitesimales $\delta_0 \in [-\delta, \delta]$ wählen (z.B. $\delta_0 := \frac{1}{2}\delta$) und es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \\ &= \mathrm{st}\left( \lim_{\varepsilon \to \delta_0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right) \\ &= \mathrm{st}\left( \frac{f(x_0 + \delta_0) - f(x_0)}{\delta_0} \right) \\ &= \mathrm{st}\big(\Delta_f(x_0, \delta_0)\big) \\ &= a. \end{aligned}$$