Die Gödel'schen Sätze

Serie 11

Modelle und Gödel'sche β-Funktion

Musterlösung

---

44. Konstruiere eine $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}^-$ mit abzählbarem Bereich, so dass $\mathbb{N}^-$ ein Modell ist für die Axiome $\mathsf{PA}_0 - \mathsf{PA}_5$, in dem jedoch das Axiomenschema PA_6 nicht allgemein gilt (*d.h.* in $\mathbb{N}^-$ gilt PA_6 nicht für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formeln φ).

Beispiel-Lösung:

Als Bereich wählen wir $\mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. Dabei verhalte sich jede Operation wie gewohnt auf $\mathbb{N}$. Wir benötigen noch die folgenden Definitionen:

$$\mathtt{s}\omega = \omega \tag{1}$$

$$\forall x: \quad \omega + x = x + \omega = \omega \tag{2}$$

$$\omega \cdot \mathtt{0} = \mathtt{0} \cdot \omega = \mathtt{0} \tag{3}$$

$$\forall x: \quad x \neq \mathtt{0} \ \rightarrow\ (\omega \cdot x = x \cdot \omega = \omega) \tag{4}$$

Betrachte nun die folgende $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel:

$$\varphi \ \equiv\ \mathtt{s}x \neq x$$

Es gilt $\forall x\colon\ \mathtt{s}x \neq \mathtt{0}$, also insbesondere $\varphi(\mathtt{0}) \equiv \mathtt{s0} \neq \mathtt{0}$. Aus $\mathtt{s}x \neq x$ lässt sich mit PA_1 und KONTRAPOSITION zeigen, dass $\mathtt{ss}x \neq \mathtt{s}x$. Also gilt $\mathtt{s}x \neq x \rightarrow \mathtt{ss}x \neq \mathtt{s}x$, *d.h.* $\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathtt{s}x)$, insbesondere $\forall x\big(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathtt{s}x)\big)$.

Angenommen, PA_6 gälte für φ. Dann hätten wir insbesondere $\varphi(\omega) \equiv \mathtt{s}\omega \neq \omega$, im Widerspruch zu (1).

45. Berechne die Sequenz, welche durch $c = 24445524009903$ codiert wird.

Hinweis: $24445524009903 = \mathrm{op}(4943821, 420)$ und $420 = \mathrm{kgV}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Lösung:

Seien $x := 4943821$ und $y := 420$, dann gilt nach LEMMA 8.14 und LEMMA 9.7 für $0 \leq i < j < 7$:

$$\mathrm{coprime}\big(1 + (i+1)y, 1 + (j+1)y\big)$$

Durch nachrechnen, sehen wir auch, dass sich x wie folgt zerlegen lässt:

$$x = (1 + 4y)(1 + 7y)$$

Das heisst also, dass x für $j < 7$ genau dann durch ein Produkt der Form $1 + (j+1)y$ geteilt wird, wenn $j = 3 \vee j = 6$.

Wir wollen nun die Sequenz berechnen, die c codiert. Dafür müssen wir für $i = 0, 1, \ldots, \beta(c, 0)$ jeweils das minimale b finden, sodass

$$\gamma(b, i, y, x) \equiv \Big(1 + \big(\operatorname{op}(b, i) + 1\big)y\Big)\Big| x$$

erfüllt ist, wobei $\beta(c, 0)$ der Länge der durch c codierten Sequenz entspricht. Nun ist

$$\operatorname{op}(b, i) = (b + i)(b + i) + b + 1$$

offensichtlich eine monoton wachsende Funktion in b, i. Setzen wir nun

$$\varphi_y(i, b) := \Big(1 + \big(\operatorname{op}(b, i) + 1\big)y\Big),$$

dann ist offenbar

$$\begin{aligned}\varphi_y(0, 1) &= 1 + 4y,\\ \varphi_y(1, 1) &= 1 + 7y,\end{aligned}$$

wobei diese beiden Terme nach den obigen Bemerkungen gerade den beiden Teiler von x entsprechen. Demnach gelten $\gamma(b, 0, y, x)$ und $\gamma(b, 1, y, x)$ nur für $b = 1$. Da für ein festes i dann jeweils $\beta(c, i) = b$ ist, haben wir also

$$\beta(c, 0) = \beta(c, 1) = 1.$$

Daraus folgt, dass c die Sequenz $\langle 1 \rangle$ codiert.

46. Berechne eine Zahl c, welche die Sequenz $\langle 1, 0 \rangle$ codiert.

Mit anderen Worten, berechne c, so dass gilt:

$$\beta(c, 0) = 2 \qquad \beta(c, 1) = 1 \qquad \beta(c, 2) = 0$$

Lösung:

Zuerst suchen wir x, y so, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Das heisst, die Terme

$$\begin{aligned}\varphi_y(0, 2) &= 1 + 8y,\\ \varphi_y(1, 1) &= 1 + 7y,\\ \varphi_y(2, 0) &= 1 + 6y,\end{aligned}$$

sollen Teiler sein von x, wobei die Terme

$$\begin{aligned}\varphi_y(0, 0) &= 1 + 2y,\\ \varphi_y(0, 1) &= 1 + 4y,\\ \varphi_y(1, 0) &= 1 + 3y,\end{aligned}$$

x nicht teilen dürfen. Mit den beiden Lemmas aus der vorherigen Aufgabe können wir beispielsweise $y := \operatorname{kgV}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 840$ und $x = (1 + 8y)\,(1 + 7y)\,(1 + 6y) = 199251579241$ setzen und alle obigen Bedingungen sind erfüllt.

Wir können nun c direkt berechnen aus

$$c = \operatorname{op}(x, y) = 39701192164974407545803.$$