40. Zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{coprime}(x,y) \leftrightarrow \big(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \forall z < \mathrm{s}x(z \mid x \wedge z \mid y \to z = 1)\big)$$

Lösung:

Gemäss Vorlesung bezeichnen wir mit $\mathrm{coprime}(x,y)$, dass gilt:

$$\forall w\,(x \mid yw \to x \mid w)$$

'$\to$' Kontraposition: Falls $\exists\, z \leq x\,(z \mid x \wedge z \mid y \wedge z \neq 1)$, dann gilt auch $\exists\, m, n\,(mz = x \wedge nz = y \wedge m < x)$, woraus folgt, dass $x \mid ym \wedge x \nmid m$, also $\neg\,\mathrm{coprime}(x,y)$.

'$\leftarrow$' Widerspruch: Mit dem KLEINSTEN ZAHL PRINZIP können wir annehmen, dass x, y minimal bezüglich ihrer Summe existieren, welche die Eigenschaft auf der rechten Seite haben, wobei $\neg\,\mathrm{coprime}(x,y)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen $x \leq y$, da die Relation $\mathrm{coprime}$ nach LEMMA $8.12.$ symmetrisch ist und wir sonst x und y vertauschen können. Es gilt also $\exists w(x \mid yw \wedge x \nmid w)$. Mit dem DIVISION MIT REST PRINZIP erhalten wir $\exists\, q \exists\, r(y = qx + r \wedge r < x)$. Wir zeigen nun, dass x, r ebenfalls die Eigenschaft auf der rechten Seite besitzen: Falls $z \mid r$ und $z \mid x$, dann gilt auch $z \mid y$, woraus $z = 1$ folgt, da x, y diese Eigenschft auch haben. Ausserdem ist $x \mid yw = (qx + r)w$, woraus $x \mid rw$ folgt. Da nun $x + r < x + y$, müssen x, r die Eigenschaft auf der linken Seite haben und deshalb gilt $x \mid w$, was ein Widerspruch ist.

41. Definiere die einstelligen Relationen $\mathrm{even}(x)$ und $\mathrm{odd}(x)$ formal und zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{odd}(x)\big)$$

Lösung:

Wir definieren die beiden einstelligen Relationen wie folgt:

$$\mathrm{even}(x) :\Longleftrightarrow \exists y(y + y = x)$$
$$\mathrm{odd}(x) :\Longleftrightarrow \exists y\big(s(y + y) = x\big)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion: Es ist $0 = 0 + 0$, also gilt $\mathrm{even}(0)$. Sei nun $\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{odd}(x)$ wahr. Falls $\mathrm{even}(x)$, dann gilt $\exists y(y+y = x)$ und somit $\exists y\big(s(y+y) = sx\big)$. Andernfalls gilt $\exists y\big(s(y + y) = x\big)$ und somit auch $sy + sy = sx$. Mit PA_6 folgt nun die Ausssage.

42. Zeige, dass BÉZOUT'S LEMMA in PA beweisbar ist. Das heisst, zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \Big(\operatorname{coprime}(x,y) \leftrightarrow \big(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \exists a \leq y \exists b \leq x(ax+1=by)\big)\Big).$$

Tipp: Zeige zuerst $\exists a \exists b(ax+1=by) \leftrightarrow \exists a' \exists b'(a'x=b'y+1)$ (z.B. sei $a' := y-a$ und $b' := x-b$). Verwende anschliessend das DIVISION MIT REST PRINZIP und das KLEINSTE ZAHL PRINZIP.

Lösung:

Wir zeigen zuerst den Hinweis: Da die beiden Seiten symmetrisch sind, reicht es, eine Seite zu zeigen. Angenommen wir haben $ax+1=by$, dann gibt es n, n', sodass gilt $ny > a \wedge n'x > b$. Definiere $N := \max\{n, n'\}$ und $a' := Ny - a$ sowie $b' := Nx - b$, dann folgt daraus die Aussage auf der rechten Seite.

Wir zeigen nun beide Richtungen des Beweises:

'$\rightarrow$' Sei $\operatorname{coprime}(x,y)$ und gelte die Äquivalenz für alle Zahlen, deren Summe kleiner ist als $x+y$. Ohne Einschränkung sei $x \geq y$, dann gibt es q, r mit $r < y$, sodass $x = qy+r$. Nach LEMMA 8.18 folgt aus $\operatorname{coprime}(x,y)$ auch $\operatorname{coprime}(y,r)$, wobei $r+y < x+y$. Nach Annahme existieren also a, b mit $ax = br+1$. Ersetzen wir x durch $qy+r$, so erhalten wir durch Äquivalenzumformungen $aqy = r(b-a)+1$ und mit de Substitutionen $a' := b-a$ und $b' := aq$ erhalten wir schliesslich $b'y = a'r+1$. Nach dem Hinweis finden wir somit auch a'', b'', sodass gilt $b''y+1 = a''r$. Daraus folgt wieder durch die Substition von x,

$$\begin{aligned} a''x &= a''(qy+r) \\ &= a''qy + b''y + 1 \\ &= (a''q + b'')y + 1. \end{aligned}$$

Definiert man $a''' := a''$ sowie $b''' := a''q + b''$, so erhalten wir $a'''x = b'''y + 1$ und die Aussage folgt mit dem Hinweis.

'$\leftarrow$' Angenommen es gilt $ax+1 = by$, so haben wir auch $1 = by - ax$. Falls nun ein z existiert mit $z \mid x \wedge z \mid y$, dann folgt auch $z \mid 1$, also ist $z = 1$. Mit AUFGABE 40 folgt nun $\operatorname{coprime}(x,y)$.

43. Beweise PA_6 aus $\mathsf{PA}_0 - \mathsf{PA}_5$, LEMMA 8.4. und dem KLEINSTEN ZAHL PRINZIP.

Lösung:

Falls PA_6 falsch ist, dann existiert eine Formel $\varphi(x)$, wobei $\varphi(0)$ und $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))$, aber es existiert ein z mit $\neg\varphi(z)$. Definiere $\psi(x) := \neg\varphi(x)$. Nun gilt nach Annahme $\psi(z)$ und somit folgt aus dem KLEINSTEN ZAHL PRINZIP $\exists x(\psi(x) \wedge \forall y < x\, \neg\psi(y))$. Das heisst, es gibt es n, sodass die Formel ψ für n wahr ist, aber falsch für alle $y < n$. Nun ist $n \neq 0$, denn $\varphi(0) = \neg\psi(0)$. Mit LEMMA 8.4 folgt schliesslich, dass n einen Vorgänger n' hat. Wenn wir in $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))$ x durch n' ersetzen, dann erhalten wir jedoch auch $\varphi(n)$ und das ist ein Widerspruch zu $\psi(n)$.