Die Gödel'schen Sätze

Serie 8

Teichmüller Prinzip, Ideale und Ultrafilter

Musterlösung

---

32. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls gilt: Eine Menge X ist in $\mathscr{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von X in $\mathscr{F}$ ist.

Das **Teichmüller Prinzip** besagt, dass jede nicht-leere Familie mit endlichem Charakter bezüglich Inklusion eine maximale Menge besitzt.

(a) Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

(b) Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass sich jeder Filter über S zu einem Ultrafilter über S erweitern lässt.

Beweis:

(a) Sei V ein Vektorraum und sei

$$\mathscr{G} := \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhänging}\}.$$

Dann hat $\mathscr{G}$ endlichen Charakter. Nach dem Teichmüllerprinzip enthält $\mathscr{G}$ also eine maximale Menge B bezüglich Inklusion. Nach Definition von $\mathscr{G}$ ist B linear unabhängig und wegen der Maximalität ist B erzeugend (Wäre B nicht erzeugend, liesse es sich zu eriner grösseren linear unabhängigen Menge erweitern.). Somit ist B eine Basis von V.

(b) Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter über S und sei $\mathscr{G}$ die Familie aller Mengen X der Form $X \subseteq \mathscr{P}(S)$, sodass für jede endliche Teilmenge $\{u_0, \ldots, u_n\} \subseteq X \cup \mathscr{F}$ gilt

$$\bigcap\{u_0, \ldots, u_n\} \neq \emptyset.$$

Dann hat $\mathscr{G}$ endlichen Charakter und das maximale Element von $\mathscr{G}$ ist ein Ultrafilter über S, welcher $\mathscr{F}$ enthält (wegen der Maximalität).

33. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

Beweis:

Angenommen, $\mathscr{U}$ enthielte die endliche Menge x. Dann ist $S \setminus x \in \mathscr{U}$ nach Voraussetzung und $\varnothing = x \cap (S \setminus x) \in \mathscr{U}$ nach Filtereigenschaft. Dies wäre allerdings ein Widerspruch zur Definition eines Filters.

34. Sei S eine Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter.

(a) Zeige: Enthält $\mathscr{U}$ eine endliche Menge, so ist $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter.

(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathscr{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathscr{U}$ gilt:

$$\textit{entweder} \quad y \in \mathscr{U} \quad \textit{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathscr{U}$$

Beweis:

(b) Enweder $y \in \mathscr{U}$ und es folgt $(x \setminus y) \notin \mathscr{U}$ analog zur vorherigen Aufgabe.
Oder $y \notin \mathscr{U}$, dann folgt $(S \setminus y) \in \mathscr{U}$, da $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter ist. Also gilt auch $(x \setminus y) = x \cap (S \setminus y) \in \mathscr{U}$ wegen der Durchschnittseigenschaft von Filtern.

(a) Sei $x \in \mathscr{U}$ endlich. Entweder $|x| = 1$ oder es existiert y mit $\varnothing \subsetneq y \subsetneq x$ und somit auch $\varnothing \subsetneq (x \setminus y) \subsetneq x$. Dann gilt nach (b), dass entweder $y \in \mathscr{U}$ oder $(x \setminus y) \in \mathscr{U}$. Es gibt also $x_1 \subsetneq x$ mit $x_1 \in \mathscr{U}$.
Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $x_n \in \mathscr{U}$ mit $|x_n| = 1$. Dieses x_n erzeugt $\mathscr{U}$.

35. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathscr{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \qquad \text{und} \qquad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.
Wie sehen Primideale aus im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(e) Sei $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Primideal im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ mit $S \notin I$.
Zeige, dass $\mathscr{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.

Beweis:

(a) Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Schreibe $\triangle$ und $\cap$ für die Operationen auf $\mathscr{P}(S)$. Dann ist $\big(\mathscr{P}(S), \triangle, \cap\big)$ isomorph zum direkten Produkt $\big(\mathbb{F}_2^S, +, \cdot\big)$. Betrachte

$$j\colon \mathscr{P}(S) \longrightarrow \mathbb{F}_2^S \qquad\qquad \mathbb{1}_A\colon S \longrightarrow \mathbb{F}_2$$
$$A \longmapsto \mathbb{1}_A \qquad\qquad s \longmapsto \mathbb{1}_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A \\ 0 & s \notin A. \end{cases}$$

Mit Wertetafeln lässt sich nun zeigen, dass $\mathbb{1}_{A \triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ und $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$ allgemein gilt. Somit ist j ein Homomorphismus. Die Zuordnung $\mathbb{F}_2^S \ni f \mapsto f^{-1}(\{1\}) \in \mathscr{P}(S)$ definiert die Umkehrfunktion von j. Somit ist j sogar ein Isomorphismus.

(b) Durch Anwendung von j^{-1} (oder direkt in $\mathscr{P}(S)$) lässt sich sehen, dass $\varnothing$ die 0 und S die 1 ist.

(c) Ein (algebraisches) Ideal $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ist entweder ganz $\mathscr{P}(S)$ oder ein (mengentheoretisches) Ideal, d. h. I ist nicht trivial ($\varnothing \neq I \neq \mathscr{P}(S)$) und es gilt:

$$\forall A, B \in I\colon\ \forall D \subseteq A\colon\ (A \cup B \in I \quad \text{sowie} \quad D \in I). \tag{1}$$

Der Fall $I = \mathscr{P}(S)$ ist klar. Sei also $I \neq \mathscr{P}(S)$. Für ein algebraisches Ideal gilt $I \neq \varnothing$ und:

$$\forall A, B \in I\colon\ \forall C \in \mathscr{P}(S)\colon\ (A \triangle B \in I \quad \text{sowie} \quad C \cap A \in I). \tag{2}$$

Nun sind (1) und (2) äquivalent, denn einerseits gilt

$$A \triangle B \subseteq A \cup B \quad \text{sowie} \quad C \cap A \subseteq A,$$

und anderseits

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B) \quad \text{sowie} \quad D = D \cap A,$$

für alle Mengen quantifiziert wie in (1) und (2).

(d) Wir zeigen, dass ein Primideal $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ entweder ganz $\mathscr{P}(S)$ ist oder ein maximales (Mengen-)Ideal. Der Fall $I = \mathscr{P}(S)$ ist klar. Wir wissen also bereits, dass I ein (Mengen-)Ideal ist. Weiter gilt für beliebige $A \subseteq S$, dass

$$A \cap (S \setminus A) = \varnothing \in I,$$

und somit ist entweder $A \in I$ oder $S \setminus A \in I$.
Ist I umgekehrt ein maximales (Mengen-)Ideal, $A, B \subseteq S$ beliebig mit $A \cap B \in I$. Dann gilt entweder $A \in I$ oder $(S \setminus A) \in I$ und somit

$$B \subseteq S \cap (B \cup (S \setminus A)) = (A \cap B) \cup (S \setminus A) \in I,$$

also $B \in I$.

(e) Mithilfe von (c) lassen sich aus den Idealeigenschaften von I die Filtereigenschaften von $\mathscr{U}$ zeigen. Mit (d) folgt aus der Maximalität des Ideals die Maximalität des Filters.