Die Gödel'schen Sätze

Serie 7

Vollständigkeit, Nichtstandard-Modelle von PA

Musterlösung

---

28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; *d.h.* für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$-Sätze σ gilt:

$$\mathsf{DLO} \vdash \sigma \quad \textit{oder} \quad \mathsf{DLO} \vdash \neg\sigma$$

Beweis:

Da wir von Aufgabe 23.(a) wissen, dass DLO ein Modell hat und somit konsistent sein muss, reicht es, wenn wir den folgenden Fall ausschliessen können: Angenommen, es gäbe einen $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$-Satz σ mit

$$\mathsf{DLO} \nvdash \sigma \quad \textit{und} \quad \mathsf{DLO} \nvdash \neg\sigma.$$

Dann existierten abzählbare Modelle $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO} + \neg\sigma$ und $\mathbf{N} \models \mathsf{DLO} + \sigma$. Da $\mathbf{M} \models \neg\sigma$, während $\mathbf{N} \models \sigma$, wären $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ nicht elementar äquivalent, also insbesondere nicht isomorph. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu Aufgabe 23.(b).

29. Sei $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*} := \mathscr{L}_{\mathsf{PA}} \cup \{\mathrm{c}\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei φ_n der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz

$$\underbrace{\mathrm{s} \ldots \mathrm{s}}_{n\text{-mal}} 0 < \mathrm{c}\,.$$

Weiter sei $\mathsf{PA}^* := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^* konsistent ist.

(b) Da die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ abzählbar ist, hat PA^* ein abzählbares Modell $\mathbb{N}^*$. Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells $\mathbb{N}^*$.

Beweis:

(a) Sei $\mathsf{T}^* \subseteq \mathsf{PA}^*$ eine endliche Teiltheorie. Sei $m := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \in \mathsf{T}^*\}$. Dann ist $\mathbb{N} \models \mathsf{T}^*$ für $\mathrm{c}^{\mathbb{N}} = m+1$, beispielsweise. Da T^* beliebig war, haben wir $\mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{PA}^*)$.

(b) Wir zeigen, dass $\mathbb{N}^*$ dieselbe Ordnungstruktur besitzt wie $\mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z}$. Dazu identifizieren wir den Bereich von $\mathbb{N}$ mit dem Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}^*$.
Für $m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ gibt es sm, ssm, $sssm$ usw. und da $m \neq 0$, besitzt es einen Vorgänger, da $m \neq 1$, besitzt dieser wiederum einen Vorgänger usw. Entsprechend befindet sich m in einer Kopie von $\mathbb{Z}$.
Seien nun $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ so, dass $\exists d(m + d = n)$. Wenn $d \in \mathbb{N}$, dann befinden sich m und n in derselben Kopie von $\mathbb{Z}$. Wenn nicht, dann befindet sich $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$ in einer Kopie von $\mathbb{Z}$, die zwischen dem $\mathbb{Z}$ von m und dem $\mathbb{Z}$ von n liegt.
Mithilfe von $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ und $2n$ können wir analog zeigen, dass die Kopien von $\mathbb{Z}$ dicht linear angeordnet sind – wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$ also wie $\mathbb{Q}$.

30. Seien $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ und PA^* wie in Aufgabe 29. Zu PA^* fügen wir nun alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze σ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei PA^{**}

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^{**} konsistent ist.

(b) Sei $\mathbb{N}^{**}$ ein abzählbares Modell von PA^{**}.
Sind die Modelle $\mathbb{N}^{**}$ und $\mathbb{N}$ als Modelle von PA isomorph oder zumindest elementar äquivalent?

Beweis:

(a) Analog zur vorherigen Aufgabe ist $\mathbb{N}$ ein Modell für jede endliche Teiltheorie von PA^{**}, woraus dessen Konsistenz folgt.

(b) Die Modelle können nicht isomorph sein, da sie nicht-isomorphe Ordnungstypen haben.
Sie sind allerdings elementar äquivalent, denn es gilt

$$\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathsf{PA}^{**} \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \sigma$$

und

$$\mathbb{N} \not\models \sigma \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \not\models \sigma.$$

31. Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt, welche alle elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.

Beweis:

Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller (Standard-)Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei ψ_p der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz $p|\mathrm{c}$. Für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ setze

$$\mathsf{PA}^*_P := \mathsf{PA}^* \cup \{\psi_p \mid p \in P\} \cup \{\neg\psi_p \mid p \notin P\},$$

sei $\mathsf{PA}^{**}_P := \mathsf{PA}^*_P \cup \mathsf{PA}^{**}$ und sei $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}^{**}_P$ ein abzählbares Modell. Dann gilt insbesondere $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}$.

Gewisse dieser Modelle können isomorph zueinander sein. (Alle sind nach Konstruktion elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$.)

Allerdings gibt es überabzählbar viele Isomorphieklassen. Sind nämlich $M_1, M_2 \in \{\mathbb{N}^{**}_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}$ isomorph, aber verschieden, so gilt für einen Isomorphismus

$$f\colon M_1 \longrightarrow M_2,$$

dass $f(c^{M_1}) \neq c^{M_2}$. Da alle betrachteten Modelle abzählbar sind, kann ein einzelnes also nur zu abzählbar vielen anderen Modellen isomorph sein.

Somit erhalten wir überabzählbar viele nicht-isomorphe Modelle von PA, die elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.